

一种基于神经网络分形模型的一维信号表示方法¹

杨 夙 李志舜

(西北工业大学航海工程学院 西安 710072)

摘 要 本文提出了一种基于神经网络的分形模型,讨论了映射收缩条件,并对湖底回波进行了实验。实验结果表明,在此基础上求解分形逆问题,得到的吸引子能很好地逼近指定信号。

关键词 分形,分形逆问题,神经网络,非线性

中图分类号 TN-052, TN911.7

1 引 言

分形在信号处理领域有着广泛的应用前景。其优点在于可以用一个简单的迭代函数系统 (IFS) 产生各种复杂的信号,可以利用 IFS 中几个较少的参数来建立一个信号的模型。当已知某一信号时,可以构造一个 IFS,使其吸引子逼近指定信号,这就是分形逆问题^[1-3]。

根据拼贴定理,吸引子与原信号之间的误差是由 IFS 的映射误差决定的。由于线性函数逼近能力有限,为了使吸引子能更好地逼近原信号,可采用基于非线性映射的 IFS,在此基础上求解分形逆问题能获得更为接近原信号的吸引子。神经网络可以以任意精度逼近一个非线性映射,所以本文采用神经网络构造非线性 IFS 模型。

根据吸引子定理,只有当映射收缩时吸引子才存在。本文给出了映射收缩的条件,可以看出,由神经网络模型得到的映射收缩条件具有非常简单的形式。

2 分形理论简介^[4]

2.1 分形理论基础

定义 1 (X, d) 是一个度量空间, d 是 X 上的距离,称 $w : X \rightarrow X$ 是一个收缩映射,如果对于任意的 $x \in X, y \in X$, 存在 $s : 0 \leq s < 1$, 使得 $d(w(x), w(y)) \leq sd(x, y)$ 。 s 称为收缩因子。

定理 1 $w : X \rightarrow X$ 是一个度量空间 (X, d) 上的收缩映射,收缩因子为 s 。 $(H(X), h(d))$ 是相应的由 X 的非空紧集组成的空间, $h(d)$ 是 Hausdorff 距离。在 $(H(X), h(d))$ 上定义 $W : H(X) \rightarrow H(X)$ 为 $W(B) = \{w(x) : x \in B\}$, 则 W 对于任意的 $B \in H(X)$ 也是一个收缩映射,且收缩因子也为 s 。

定义 2 如果 $H(X)$ 上存在唯一不动点 A , 满足 $A = W(A)$, 并且 A 可由下式给出,对于任意的 $B \in H(X)$ 有 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B)$ 。 A 即称为 W 的吸引子, $W^{on}(B)$ 表示变换 W 的 n 次复合。

定义 3 迭代函数系统 (IFS) 是完备度量空间 (X, d) 上一组收缩映射 $w_n : X \rightarrow X$, $n = 1, 2, \dots, N$; 每个收缩映射 w_n 的收缩因子是 s_n 。如上定义的 IFS 也称为双曲的 IFS, 记为 $\{X : w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ 。其收缩因子 $s = \max\{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ 。

定理 2(吸引子定理) 设 $\{X : w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ 为一双曲 IFS, 收缩因子为 s , 则在 $(H(X), h(d))$ 上定义的 $W : H(X) \rightarrow H(X) : W(B) = \cup_{i=1}^N w_i(B)$ 对所有 $B \in H(X)$ 也是

¹ 1998-02-09 收到, 1998-10-23 定稿

一个收缩映射, 并有收缩因子 s , 即对于任意的 $B, C \in H(X)$, 总存在 $h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$. 且存在吸引子 A , 对于任意的 $B \in H(X)$, 总存在 $A = W(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B)$.

定理 3(拼贴定理) (X, d) 为一完备度量空间, 给定 $L \in H(X)$ 和 ϵ , 选取一个具有收缩因子 s 的 IFS $\{X : w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$, 使得 $h(L, \cup_{i=1}^N w_i(L)) \leq \epsilon$, 则有 $h(L, A) \leq \epsilon/(1-s)$, A 为该 IFS 的吸引子.

以上两条定理就是分形理论的基础, 吸引子定理给出了 IFS 吸引子存在的条件, 拼贴定理给出了吸引子与原信号误差的度量. 拼贴定理的实质是, 将信号整体分别通过 IFS 的各个收缩映射, 映射到各个局部, 将这些局部片段拼贴在一起, 拼贴后的结果与原信号误差越小, 则此 IFS 产生的吸引子与原信号的相似程度越高.

2.2 基于线性 IFS 的分形插值简介

已知一个时间序列 $y_j = F(t_j) : j = 0, 1, \dots, n$; 将其分为 N 段, 以每段的两端点作为插值点, 插值点记作 $(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N$; 寻找一组映射:

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

且满足

$$w_i \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$w_i \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$i = 0, 1, \dots, N-1$; 这组映射组成了一个 IFS. 可以证明只要 $0 \leq d_i < 1$, 则 w_i 是收缩的, 根据吸引子定理, 该 IFS 的吸引子总存在. 同时, 由 (2) 式和 (3) 式可看出, 这个 IFS 的各个映射 w_i 将整个信号从 $[x_0, x_N]$ 映射到了局部 $[x_i, x_{i+1}]$. 根据拼贴定理, 该 IFS 的吸引子与原信号间的误差将由映射后得到的各局部片段与原信号各局部片段的误差之和决定.

由 (1)、(2)、(3) 式可得

$$a_i = (x_{i+1} - x_i)/(x_N - x_0),$$

$$e_i = (x_N x_i - x_0 x_{i+1})/(x_N - x_0),$$

$$c_i = [(y_{i+1} - y_i)/(x_N - x_0)] - d_i(y_N - y_0)/(x_N - x_0),$$

$$f_i = (x_N y_i - x_0 y_{i+1})/(x_N - x_0) - d_i(x_N y_0 - x_0 y_N)/(x_N - x_0),$$

其中 d_i 是可以自由选取的参数. 当 d_i 选定之后, 由 d_i 计算出的一组参数 $\{a_i, e_i, c_i, f_i, d_i : i = 0, 1, \dots, N-1\}$ 即可确定一个 IFS, 且其吸引子在插值点与原信号相同. 在插值区间 (x_i, x_{i+1}) 内吸引子与原信号一般是不同的, 其误差由 d_i 的取值决定. 当 $d_i = 0$ 时, 吸引子是原信号的线性插值.

3 基于神经网络的非线性分形模型

3.1 非线性 IFS 模型

一个非线性映射可表示为

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & f(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 $x \in [x_0, x_N]$, $f(x, y)$ 可以是任何形式的非线性函数。按以上形式定义的一组映射 $\{R^2 : w_i, i = 0, 1, \dots, M\}$ 即可构成一个非线性 IFS。对于映射 w_i 还应满足端点条件:

$$x_{i1} = ax_0 + e, \quad (5)$$

$$x_{i2} = ax_N + e, \quad (6)$$

即映射 w_i 将信号从整体 $[x_0, x_N]$ 映射到局部 $[x_{i1}, x_{i2}]$ 。通过 M 个映射 w_1, w_2, \dots, w_M 将信号分别映射到 M 个局部段 $\{[x_{i1}, x_{i2}] : i = 1, 2, \dots, M; \}$ 且 $\cup_{i=1}^M [x_{i1}, x_{i2}] = [x_0, x_N]$ 。这 M 个局部段合并在一起与原信号比较, 如果二者之间误差很小, 说明二者很接近, 则根据拼贴定理可知, 这 M 个映射构成的 IFS 所产生的吸引子亦将与原信号十分接近。

3.2 映射收缩条件

定义 R^2 上的距离为 $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \theta|y_1 - y_2|$, 其中 $\theta > 0$; 可以证明 d 与欧氏距离是等价的。

$$\begin{aligned} d((\hat{x}_1, \hat{y}_1), (\hat{x}_2, \hat{y}_2)) &= |\hat{x}_1 - \hat{x}_2| + \theta|\hat{y}_1 - \hat{y}_2| \\ &= |(ax_1 + e) - (ax_2 + e)| + \theta|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &= |a(x_1 - x_2)| + \theta|f_x(p, q)(x_1 - x_2) + f_y(p, q)(y_1 - y_2)| \\ &\leq |a| \cdot |x_1 - x_2| + \theta|f_x(p, q)| \cdot |x_1 - x_2| + \theta|f_y(p, q)| \cdot |y_1 - y_2| \\ &= (|a| + \theta|f_x(p, q)|)|x_1 - x_2| + \theta|f_y(p, q)| \cdot |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

上式中用到了二元函数的拉格朗日中值定理, 其中 $y_1 < p < y_2, y_1 < p < y_2$, $f_x(*, *)$ 和 $f_y(*, *)$ 分别表示 f 对 x 和 y 的偏导数。因为 $|a| = |x_{i1} - x_{i2}| / |x_N - x_0| < 1$, 所以总存在 $\theta > 0$, 使得 $|a| + \theta|f_x(p, q)| < 1$, 因此只要 $|f_y(p, q)| < 1$, 就能保证 $d((\hat{x}_1, \hat{y}_1), (\hat{x}_2, \hat{y}_2)) < |x_1 - x_2| + \theta|y_1 - y_2| = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, 所以映射收缩条件为

$$|f_y(x, y)| < 1. \quad (7)$$

3.3 基于神经网络的非线性映射模型

(4) 式中的非线性映射 $f(x, y)$ 可以用神经网络实现。一个多输入单输出的三层神经网络(感知器)模型可表示为 $f(z) = v_0 + \sum_{i=1}^m v_i h\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} z_j + b_i\right)$, 其中, $h(t) = 1/(1 + e^{-t})$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ 是输入向量, $f(z)$ 是输出。多输入多输出的三层感知器模型可以类似得到。对于三层感知器有两个重要定理。

定理 4(参看文献 [5, 6]) 对于任意的 $\epsilon > 0$ 和任意的平方可积函数 $f : [0, 1]^M \subset R^M \rightarrow R^N$, 总存在一个三层感知器, 使得感知器实现的映射与 f 的均方差小于 ϵ 。

定理 5(Kolmogorov 定理, 参看文献 [6]) 隐层神经元数为 $2M + 1$ 的三层感知器可以精确实现任意的连续映射 $f : [0, 1]^M \subset R^M \rightarrow R^N$ 。

由这两个定理可知, 如果输入满足 $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$, 则总存在一个隐层单元数为 5 的三层感知器, 可以以任意精度逼近任何一个非线性映射 $f(x, y)$ 。

由于神经网络能实现任意一种非线性映射, 所以信号通过神经网络映射到局部段后可以与原信号的局部任意接近, 由拼贴定理可知, 由神经网络构成的非线性 IFS 所产生的吸引子也能够以任意精度接近原信号。所以, 本文采用神经网络实现 (4) 式中的非线性映射 $f(x, y)$ 。

对于一维信号 $y = F(x)$, 神经网络的输入为 $(x, y)^T$, 输出为 $f(x, y) = v_0 + \sum_{i=1}^m v_i h(w_{ix}x + w_{iy}y + b_i)$, 其中 $m = 5$. $f(x, y)$ 对 y 的偏导数为 $f_y(x, y) = \sum_{i=1}^m v_i h'(w_{ix}x + w_{iy}y + b_i)w_{iy}$, 其中 $h'(t) = e^{-t}/(1+e^{-t})^2$. 令 $a = 1, b = e^{-t}$, 根据基本不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 可得 $ab/(a+b)^2 \leq 1/4$, 即 $h'(t) \leq 1/4$, 因而可以得到 $|f_y(x, y)| = |\sum_{i=1}^m v_i w_{iy} h'(w_{ix}x + w_{iy}y + b_i)| \leq \sum_{i=1}^m |v_i w_{iy} h'(w_{ix}x + w_{iy}y + b_i)| \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m |v_i w_{ix}|$, 由 (7) 式可知, 基于神经网络的非线性映射的收缩条件为 $\sum_{i=1}^m |v_i w_{iy}| < 4$. 凡是满足上述条件的神经网络所构成的 IFS, 一定有吸引子存在.

3.4 神经网络参数的训练

由 (4)、(5)、(6) 式可知, 将信号 $y = F(x)$ 通过神经网络后, 从整体 $[x_0, x_N]$ 映射至局部 $[x_{i1}, x_{i2}]$, 与原信号局部相比, 所产生的误差可定义为

$$E = \sum_{x=x_{i1}}^{x_{i2}} (\hat{y} - y)^2 = \sum_{k=0}^N \{f(x_k, y_k) - F(ax_k + e)\}^2$$

$$= \sum_{k=0}^N \left[v_0 + \sum_{i=1}^m v_i h(w_{ix}x_k + w_{iy}y_k + b_i) - F(ax_k + e) \right]^2,$$

上式中的误差 E 是由神经网络中的权值 $\{w_{ix}, w_{iy}, b_i, v_i, v_0 : i = 1, 2, \dots, m\}$ 决定的, 指定一个阈值 e_{limit} 并训练神经网络, 最终可得到一组权值, 使得在这组权值下, 网络的输出误差 $E < e_{\text{limit}}$. 此时, 以信号整体作为输入, 经过神经网络后得到的输出与信号的局部是非常接近的. 关于神经网络的训练, 尤其是感知器这样一种已经成熟的模型, 有很多成熟的算法, 本文中采用了常规的 BP 算法. 当然, 还可以采用改进的算法以提高性能.

3.5 模型训练过程

第 1 步 初始化: 令 $i = 1$; 选定左端点 $\text{left} =$ 起点和右端点 $\text{right} = \text{left} + \text{step}$;

第 2 步 训练第 i 组映射中神经网络的参数, 使得网络的输出误差小于指定值;

第 3 步 判断映射是否收缩;

第 4 步 如果映射收缩, 记录当前参数, $i = i + 1$, $\text{left} = \text{right}$, $\text{right} = \text{right} + \text{step}$;

否则, $\text{right} = \text{right} + \text{step}$;

第 5 步 如果 right 未超出终点, 转第 2 步; 否则, 结束.

4 实验结果和结论

本文针对某湖底回波进行了实验, 利用湖底回波作为指定信号训练神经网络, 对训练好的模型, 输入任意信号, 迭代得到的吸引子如图 1 所示, 其中两条曲线分别代表湖底回波和吸引子. 可以看出, 二者非常接近. 二者间的误差是由训练神经网络时指定的训练误差决定的. 迭代生成吸引子的速度是很快的, 在 P166 微机上, 瞬间即可完成.

实验结果说明, 利用基于神经网络的非线性 IFS 产生吸引子, 对指定信号具有良好的逼近能力, 且收缩条件的计算和判断非常简单. 在训练神经网络时, 指定较小的训练误差可以得到更为精确的逼近, 从理论上, 可以以任意精度逼近指定信号.

利用基于神经网络的非线性 IFS 有可能实现低失真、大压缩比的信号编码和压缩, 以及实时解压缩, 其应用有待深入研究.

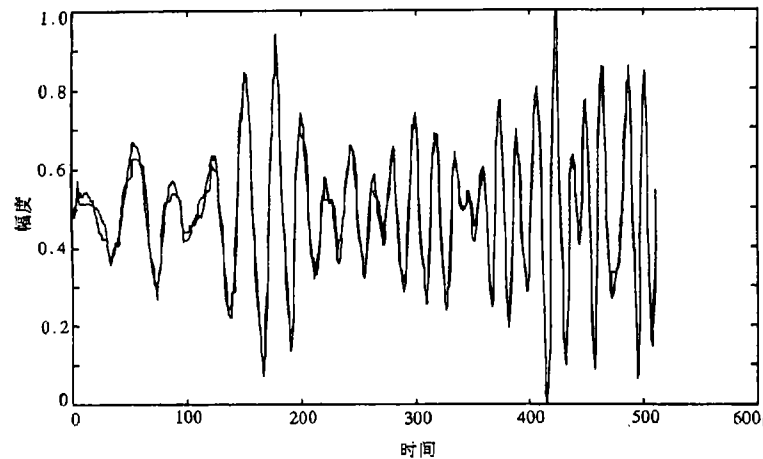


图 1

参 考 文 献

- [1] Barnsley M F, Demko S. Iterated function system and the global construction of fractals. Proc. Roy. Soc. London, 1985, A-399(1817): 243-275.
- [2] Mazel D S, Hayes M H. Using iterated function system to model discrete sequences. IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(7): 1724-1734.
- [3] 赵 耀, 袁保宗. 一种基于新仿射变换的分形序列图像编码方法. 电子学报, 1997, 25(7): 28-31.
- [4] 谢和平, 薛秀谦. 分形应用中的数学基础与方法. 北京: 科学出版社, 1997, 27-40, 99-106, 170-175.
- [5] Hecht-Nielsen R. Theory of the backpropagation neural network. IJCNN, San Diego: 1989, 1, 593-605.
- [6] 罗发龙, 李衍达. 神经网络信号处理. 北京: 电子工业出版社, 1993, 7-7.

USING ITERATED FUNCTION SYSTEM BASED ON NEURAL NETWORK TO MODEL TIME SEQUENCES

Yang Su Li Zhishun

(Institute of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract A new method to resolve fractal inverse problem based on neural network was presented in this paper which can be employed to model a time sequences. The precondition to assure the model was also provided. A piece of echo from a lake was taken to test the algorithm. The result is satisfying.

Key words Fractal, Fractal inverse problem, Neural network, Nonlinear

杨 夙: 男, 1971 年生, 博士生, 研究方向为信号及信息处理, 主要研究内容为混沌、分形理论在信号处理中的应用、目标识别技术。

李志舜: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事水下信号与信息处理方面的教学和研究工作, 主要研究内容包括信号检测、估值与自适应信号处理、水下电子对抗技术与自动目标识别、DSP 芯片及其应用。