

## 磁共振截断频谱信号重建的奇异谱分析法<sup>1</sup>

骆建华 楼正国\*

(上海交通大学生物医学工程系 上海 200030)

\*(浙江大学生命科学与医学工程系 杭州 310027)

**摘要** 本文提出一种消除磁共振 (MR) 图像截断伪影的新方法。在我们的方法中, 把任何信号频谱表示为由信号奇异点为参量的频谱函数的加权和, 奇异点和加权系数从截断频谱数据中提取, 从而准确恢复 MR 截断频谱的高频分量, 达到 MR 消除截断伪影之目的。实际和模拟结果都表明这种方法效果高于现有方法。

**关键词** 奇异谱函数, 奇异点, 截断频谱, 磁共振成像

**中图分类号** TN-051

### 1 引言

磁共振成像 (MRI) 技术是一种日益令人瞩目的医学图像诊断手段。但其因成像时间长, 信噪比很难提高, 设备昂贵, 严重制约着它的广泛应用。采集信号时间要受到病人的承受能力限制和活性组织运动对信号带来不利影响<sup>[1,2]</sup>。一幅 MR 图像的频谱数据采集时间  $t$  可表示为:  $t = n \times m \times t_0$ , 其中  $n$  是叠加次数,  $t_0$  是单行扫描所需的时间,  $m$  是扫描行数且一般等于图像的像素行数  $M$ 。当  $m < M$  时, 重建  $M$  行像素的图像, 叫截断频谱成像。当今用于临床的 MR 截断频谱成像方法是采集  $m(m < M)$  行低频频谱数据, 其余  $M - m$  行高频频谱数据用零填补, 然后用 Fourier 反变换成像 (例如深圳安科公司生产的 MRI 设备)。这种 MR 截断频谱成像方法叫补零法, 其缺陷是图像中有伪影。

这伪影由于截断频谱欠缺 MR 高频频谱分量所造成的, 所以国际 MR 医学成像界把这这种伪影叫截断伪影。它是截断频谱成像中急需解决的关键问题。解决了 MR 截断频谱成像中的截断伪影问题, 即由 MR 截断频谱重建出与完全频谱重建一样的 MR 图像, 就可在既不增加硬件资源, 又不损失任何图像信息的情况下, 节约扫描时间, 提高磁共振设备输出信号的信噪比, 从而降低设备性能要求, 降低设备成本。所以, 这是目前国际 MR 医学成像界的主要研究热点之一, 是一项有重要学术价值、能产生巨大经济效益和促进社会医疗保健事业发展的难度研究项目。

目前国际 MR 医学成像界解决 MR 截断伪影问题的主要有两类研究方法: (我们尚没检索到国内这方面研究的报道。) 第一类是由采集到的  $m(m < M)$  行低频频谱数据, 外推其它  $M - m$  行高频频谱数据, 从而解决 MR 截断频谱成像中的截断伪影问题。其主要的外推方法有: (1) 用自回归移动平均 (ARMA) 模型线性预测其它  $M - m$  行 MR 高频频谱数据。不幸的是它对 ARMA 模型的阶数很敏感, 要求相邻数据间有较大的相关性; 同时计算量大, 成像时间长。(2) 用 Back propagation 或 Multilayer 神经网络非线性预测其它  $M - m$  行 MR 高频频谱数据。其主要困难是由于 MR 图像频谱数据量很大, 训练神经网络时间太长, 神经网络外推高频数据有误差 (由于用于训练网络数据有限, 网络不能完全成熟)<sup>[3,4]</sup>。第二类是在补零法成像的基础上, 设法除去 MR 图像中的截断伪影。(1) 对图像进行加窗平

<sup>1</sup> 1998-04-03 收到, 1998-11-16 定稿

国家自然科学基金资助 (No.39870211) 和上海交通大学高科技发展基金资助项目

均。遗憾的是这将导致图像分辨率降低,效果差。(2)建立 Markov 随机场,用 Bayes 方法判断截断伪影导致的误差,从而剔除截断伪影。其主要缺点是计算负担重,图像分辨率下降,丢失部分细节<sup>[5]</sup>。(3)基于小波伸缩理论方法减少磁共振成像的截断伪影。与加窗平均类似,这将导致图像分辨率降低,去伪影效果差,但比加窗平均效果好<sup>[6]</sup>。这种方法也可直接用采集到的  $m(m < M)$  行低频频谱数据直接成像,速度快。

本文从分析 MR 图像截断伪影形成的数学本质开始,从采集到的  $m(m < M)$  行低频频谱数据抽取能重建高频分量的特征参数(奇异点和奇异谱分析的加权系数),恢复 MR 截断频谱的高频分量,从而达到消除截断伪影,准确重建图像之目的。这个是当前国际 MR 成像领域中是所没有的,先进的,可望在精度和速度方面有重大突破,达到临床应用要求。推动 MRI 在医学临床中的广泛应用,为人类医疗健康事业作出贡献。本文第 2 节介绍奇异谱分析理论;第 3 节介绍 MR 截断频谱的奇异点和加权系数析取;第 4 节介绍准确重建高频信号算法实现及讨论;第 5 节结论。

## 2 奇异谱分析理论

我们知道,在一定条件下,一个函数可表示为三角函数系、小波函数系或幂函数系的线性泛函,即在一定条件下一个函数可用另一函数序列的加权和表示。对于任一离散频谱函数,能否用一个离散函数序列的线性泛函表示?回答是肯定的。为此,我们给出如下定义:

**定义 1** 定义离散函数空间  $\{W_k(i), k, i \text{ 为整数}\}$  为奇异空间,如果它满足以下三个条件:

(1)  $W_k(i)$  是  $W_0(i)$  的平移或膨胀  $k$  生成的;

(2)  $W_k(i)$  只有一个唯一的差分不为零的点  $k$ (奇异点  $k$ );

(3)  $W_k(i)$  的 Fourier 变换  $\hat{W}_k(u) = F[W_k(i)]$  存在。  $F[\bullet]$  为 Fourier 变换算符,并称  $W_k(i)$  为奇异函数,  $\hat{W}_k(u)$  为奇异谱函数,函数集合  $\{W_k(u)|k, u \text{ 为整数}\}$  为奇异谱空间。

**定理 1**(信号奇异分解定理) 奇异空间  $\{W_k(i), k, i \text{ 为整数}\}$  是完备的,即任何离散信号可表示空间  $\{W_k(i)\}$  中的线性泛函。

**证明** 设  $f(j)$  为任一离散函数,其中  $j = 0, 1, \dots, N-1$ 。如果  $\forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , 能够找到  $N$  个系数  $a_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ , 使得下式成立:

$$f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w_k(j), \quad j \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (1)$$

考虑到定义 1 中的条件 (2) 便可以找到满足 (1) 式的各加权系数为

$$a_k = \begin{cases} f(k), & k = 0; \\ f(k) - f(k-1), & k = 1, 2, \dots, N-1; \end{cases} \quad (2)$$

即任何离散信号可表示空间  $\{W_k(i)\}$  中的线性泛函。

**定理 2**(信号奇异谱分析定理) 任何一个离散函数  $f(j)$  的频谱函数  $F(u)$  都可以表示为奇异谱空间  $\{\hat{W}_k(u)|k, u \text{ 为整数}\}$  中的线性泛函。

**证明** 对 (1) 式两边同时进行 Fourier 变换,并记  $w_k(j)$  的 Fourier 变换为  $\hat{W}_k(u)$ , 则得

$$F(u) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \hat{W}_k(u), \quad u \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (3)$$

即频谱函数  $F(u)$  可以表示为奇异谱空间  $\{\hat{W}_k(u)|k=0,1,\dots,N-1\}$  中的线性泛函。

**推论** 若信号中仅有  $Q$  个奇异点 (在  $a_k, k=0,1,\dots,N-1$  中仅有  $Q$  个不为 0), 则信号的谱函数  $F(u)$  可由  $\{\hat{W}_k(u)|k=0,1,\dots,N-1\}$  中对应的  $Q$  个奇异谱函数的线性泛函表示, 即

$$F(u) = \sum_{i=1}^Q a_{bi} \hat{W}_{bi}(u), \quad a_{bi} \neq 0; \quad (4)$$

其中  $\hat{W}_{bi}(u)$  是以  $bi$  位置为奇异点的奇异谱函数,  $a_{bi}$  是  $\hat{W}_{bi}(u)$  的权系数。所以, 任何信号的频谱可以由信号的奇异点及其权系数唯一确定。

### 3 奇异谱分析高频信号重建技术实现

按照信号奇异谱分析理论, 获得信号的奇异点及其奇异谱分析加权系数就等价于获取信号的频谱数据。如果能从截断频谱中析取信号的奇异点及奇异谱分析加权系数, 那么就能由截断频谱重建高频频谱分量。我们的思路是先选用恰当的正交小波函数, 对已有的截断频谱求小波变换系数; 再通过调整尺度参数, 测定小波系数 (变换值) 的极点, 即信号的奇异点<sup>[7,8]</sup>; 最后奇异谱分析定理确定信号的奇异谱分析加权系数。

#### 3.1 测定奇异点

设在实直线  $IR$  上的平方可测函数的空间记为  $L^2(IR)$ ,  $\psi \in L^2(IR)$  是二进正交小波, 则  $f \in L^2(IR)$  的小波系数  $c_{j,k}$  为

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx,$$

其中  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ 。类似于 Fourier 级数的 Parseval 恒等式, 在  $L^2(IR)$  中, 函数与它们的 Fourier 变换之间关系的 Parseval 恒等式用

$$\langle f(x), \psi(x) \rangle = (1/2\pi) \langle \hat{f}(\omega), \hat{\psi}(\omega) \rangle, \quad f, \psi \in L^2(IR);$$

其中  $\hat{f}(\omega)$  和  $\hat{\psi}_{j,k}(\omega)$  分别是  $f(\omega)$  和  $\psi_{j,k}(x)$  的 Fourier 变换, 则小波系数  $c_{j,k}$  可由下式求出:

$$c_{j,k} = (1/2\pi) \langle \hat{f}(\omega), \hat{\psi}_{j,k}(\omega) \rangle,$$

对于  $N$  维离散信号情况, 容易证明: 小波系数  $c_{j,k}$  可以写成

$$c_{j,k} = \frac{1}{N} \sum_{u=-N/2}^{N/2} \hat{f}(u) \overline{\hat{\psi}_{j,k}(u)}, \quad (5)$$

因此, 我们可以通过信号的频谱求出信号的小波系数。我们取  $\hat{\psi}_{j,k}(u)$  为正交二进  $B$  小波 (简称  $B$  小波) 的 Fourier 变换。它是由  $B$ -样条函数经过正交化, 得正交尺度函数, 再由正交尺度构成正交二进小波<sup>[7]</sup>。

由于信号能量大部分集结在低频部分, 所以由一定数量频谱数据的低频分量求出的小波系数可以用来确定图像信号的奇异点, 比如, 用小于二分之一截止频率的低频分量。当信号在某点出现奇异点时, 则该点将是小波变换系数的模的极值, 且这模的极值将随着尺度的

增加而增加。若是噪声引起的小波变换系数的模极值，将随着尺度的增加而减小。据此就可确定奇异点，且受噪声影响少。

### 3.2 加权系数确定

设信号  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}^T$  的截断频谱为  $F = \{F(0), F(1), \dots, F(n-1)\}^T$ ，其中  $n < N$ 。由信号的截断频谱测得的奇异点为  $b_i, i = 1, 2, \dots, Q$ 。由奇异谱分析定理知信号  $x$  的 Fourier 系数为

$$F(u) = \sum_{i=1}^Q y_{bi} \hat{W}_{bi}(u), \quad u \in \{0, 1, \dots, N-1\};$$

其中  $y_{bi}$  为待定权系数。据此，对于截断频谱  $F = \{F(0), F(1), \dots, F(n-1)\}^T$  有矩阵形式方程：

$$\hat{W} \cdot y = F, \quad (6)$$

其中  $y = \{y_{b1}, y_{b2}, \dots, y_{bQ}\}^T$  为  $Q$  维权向量，

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{b1}(0) & \hat{W}_{b2}(0) & \cdots & \hat{W}_{bQ}(0) \\ \hat{W}_{b1}(1) & \hat{W}_{b2}(1) & \cdots & \hat{W}_{bQ}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{W}_{b1}(n-1) & \hat{W}_{b2}(n-1) & \cdots & \hat{W}_{bQ}(n-1) \end{bmatrix}.$$

显然，在奇异点测定正确的前提下，方程组 (6) 式是相容的，并且当  $n > Q$  时，可以证明  $\hat{W}$  的秩为  $Q$ ，按线性方程组解的性质可得唯一解，高频频谱得到准确恢复。当  $n < Q$  时，可以证明  $\hat{W}$  的秩为  $n$ ，按线性方程组解的性质可得唯一伪逆解，高频频谱得到最佳恢复。

### 3.3 高频重建算法

第一，直接从原始截断频谱数据（低频分量）得到信号的尺度伸缩的各近似小波变换系数，检测奇异点。第二，建立诸奇异点对应的奇异谱函数的线性泛函，并按原始截断频谱数据确定其中的加权系数。第三，通过奇异谱分析算出高频分量。第四，用 Fourier 变换方法重建信号。

## 4 实现和讨论

我们把用奇异谱分析，从 MR 低频频谱分量恢复高频分量，再重建图像的缺损 MR 数据成像方法叫做奇异谱分析成像方法。这种重建算法的测试是在一台 586/133 的微机上进行的。为了充分认识奇异谱分析成像方法的效果，我们用对有噪声的、无噪声的，实际的和模拟的四种截断频谱数据进行了算法试验，并把重建的图像和补零法重建的图像进行如下比较。

### 4.1 计算机模拟截断频谱数据成像的图像比较

图 1 是计算机模拟磁共振频谱数据成像的图像（第 1~ 第 64 行）的三维显示图，高度代表图像灰度。图像尺寸  $128 \times 128$ ，相应照片附在其下方。图 1(b), 1(c) 截断频谱数据为图 1(a) 的频谱低频 64 列。图 1(e), 1(f) 截断频谱数据为图 1(d) 信号的频谱低频 64 列。

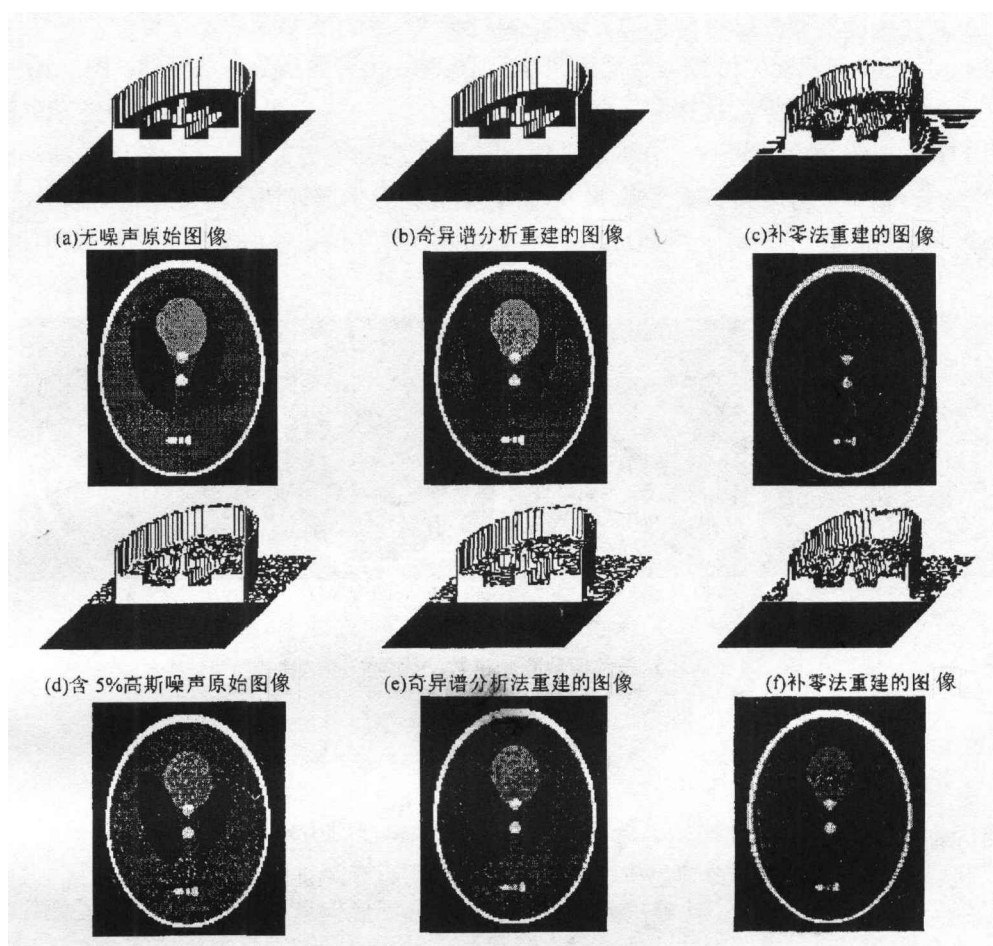


图 1 计算机模拟截断频谱数据成像的图像比较

对模拟无噪声截断频谱数据成像情况, 由图 1(a), 1(b), 1(c) 比较得, 奇异谱成像法能完全消除截断伪影, 由表 1 知奇异谱成像法的保真指标比补零法高出四个数量级。对含 5% 高斯噪声成像情况, 由图 1(d), 1(e), 1(f) 比较得, 奇异谱成像法能消除截断伪影, 由表 2 知奇异谱成像法的保真指标比补零法高出两个数量级。由表 1、表 2 比较可见算法对噪声敏感, 这是因为由于噪声的引入使得奇异点数量  $Q$  急剧上升, 频谱数据量  $n$  小于奇异点数量  $Q$  或 (6) 式成为不相容, 使 (6) 式只能得一伪逆解。

表 1 无噪声时的算法重建误差、重建时间比较表<sup>[9]</sup>

算法	归一化均方误差	归一化绝对误差	相对成像时间
补零法	0.2398782	0.4909024	1
奇异谱分析成像法	0.0000163	0.0000317	2.5

表 2 含 5% 高斯噪声时的算法重建误差、重建时间比较表

算法	归一化均方误差	归一化绝对误差	相对成像时间
补零法	0.3033662	0.5854027	1
奇异谱分析成像法	0.0090634	0.0058211	2.5

#### 4.2 实际磁共振截断频谱数据成像的图像比较

图 2(a), 2(b) 的截断频谱数据为低频 80 列, 图 2(a) 为奇异谱分析法重建, 图 2(b) 为补零法重建。截断频谱数据直接来源于深圳安科公司 (95 年的)。图 2(c), 2(d) 截断频谱数据为低频 128 列。图 2(c) 为奇异谱分析法重建, 图 2(d) 为补零法重建。截断频谱数据从深圳安科公司的一幅 256 列频谱数据上截下。实际截断频谱数据成像情况, 图 2(b) 和 2(d) 中有较多伪影。由图 2(a) 和 2(b)、图 2(c) 和 2(d) 比较得, 奇异谱成像法能完全消除截断伪影。

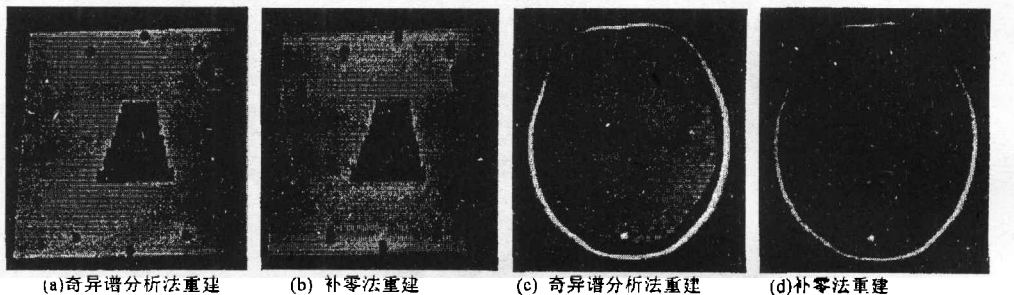


图 2 实际磁共振截断频谱数据成像的图像比较

## 5 结 论

奇异谱成像法重建的图像比补零法重建的图像更好是因为补零法对未采集的频谱直接用零代替, 尽管高频部分图像信息少、能量小, 但毕竟还有少量图像信息隐含其中, 尤其高频信息损失严重。毫无疑问, 补零法完全放弃了这部分图像信息。而奇异谱分析成像却不一样, 它根据截断频谱对应图像的边缘特性, 对那些未采集的频谱数据进行恢复。这就补救了部分本属丢失的图像信息和能量, 很大程度上挽回了由于频谱不足带来的对图像质量的影响。尤其在奇异点个数较少的情况下, 重建图像的误差仅由计算工具精度决定, 即理论上讲高频分量可以准确恢复。截断频谱数据的补零法图像重建是以图像质量 (如伪影, 图像变粗糙) 为代价换取成像时间缩短。奇异谱分析成像, 不论含噪声的还是无噪声的、对实际的还是对计算机模拟的 MR 截断频谱数据的实验结果, 都表明了奇异谱分析成像是一种高精度的高频信号重建方法, 保证能消除重建的图像的截断伪影, 图像的质量大大优于用传统方法重建的图像。

## 参 考 文 献

- [1] Stack D D, *et al.* Magnetic resonance and compute tomography of the normal and diseased pancreas: A compare active study. *Radiology*, 1984, 70(6): 153-162.
- [2] Jones J P, *et al.* Principles of Magnetic Resonance. In *Magnetic Resonance Annual*, 1985, Ed. by Y. K. Herbert, Raven Press, Switzerland: 1985, 71-111.
- [3] Hui Y, Smith M R. MRI reconstruction from truncated sata using a complex domain back propagation neural network. *IEEE Pacific RIM Conference on Communications, Computers, and Signal Processing-Proceedings*, IEEE, Piscataway, NJ, U.S.A: 1995, 95CH35765, 513-516.
- [4] Yan Hong, Mao Jintong. Data truncation artifact reduction in MR imaging using a multilayer neural network. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 1993, MI-12(I): 73-77.
- [5] Sebastiani G, Barone P. Truncation artifact reduction in magnetic resonance imaging by Markov random field methods. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 1995, MI-14(3): 434-441.

- [6] Kok C W , Hui Y, Nguyen T Q. MRI truncation artifact reduction via wavelet shrinkage. IEE SPIE—The International Society for Optical Engineering, 1997, 3078: 301–311.
- [7] 崔锦泰著, 程正兴译. 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1995, 297–333.
- [8] Mallat S G, Wen Liang Hwang. Singularity detection and processing with wavelet. IEEE Trans. on Information Theory, 1992, IT-38(2): 617–643.
- [9] 骆建华, 吕维雪. 模糊多准则图像重建技术. 计算机学报, 1996, 19(8): 609–615.

## SIGNAL RECONSTRUCTION FROM MR TRUNCATED DATA USING SINGULARITY SPECTRUM ANALYSIS

Luo Jianhua    Lou Zhengguo\*

*(Department of Biology Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)*

*\*(Department of Life Science and Medical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)*

**Abstract** A new method of truncation MR artifact reduction is proposed in this paper. In the method, any digital signal spectrum can be expressed as the weighted sum of spectrum functions related to the signal singularity locations. The singularity locations and weight coefficients can be extracted from MR truncation spectrum data. Thus we can gain the high spectrum using the sum and reduce the truncation artifact in MR image. Experiment and simulation results show that this method gives much better reconstructed image than available methods.

**Key words** Singularity spectrum function, Singularity points, Truncated spectrum, MRI

骆建华: 男, 1958 年生, 副教授, 从事医学图像重建的研究工作.

楼正国: 男, 1947 年生, 副教授, 从事医学图像重建的研究工作.