

FrFT-OFDM系统的低复杂度峰均功率比抑制技术研究

赵越 王腾 陶然 时鹏飞 蒋政国

(北京理工大学信息与电子学院 北京 100081)

摘要: 针对基于分数阶Fourier变换的OFDM系统(简称FrFT-OFDM系统)的高峰均功率比(PAPR)问题, 该文提出一种低复杂度的峰均比抑制算法。通过对随机相位序列采用周期延拓至FrFT-OFDM符号长度, 相位因子加权后与子载波调制前的数据相乘的方式, 实现对高峰均比的有效抑制。该算法只需要一次逆离散分数阶Fourier变换(IDFrFT), 所有备选信号直接通过时域chirp圆周移位的加权和得到。仿真结果表明, 当备选信号个数相同时, 该算法与选择映射(SeLecting Mapping, SLM)算法的PAPR抑制性能相当, 比部分传输序列(Partial Transmit Sequence, PTS)算法具有更好的PAPR抑制性能, 同时, 该算法较SLM和PTS算法的运算量降低。

关键词: 正文频分复用; 分数阶Fourier变换; 峰均功率比; 低复杂度

中图分类号: TN914

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)01-0246-04

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00323

Peak to Average Power Ratio Reduction with Low Computational Complexity in FrFT-OFDM System

Zhao Yue Wang Teng Tao Ran Shi Peng-fei Jiang Zheng-guo

(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: This paper proposes a low-complexity Peak to Average Power Ratio (PAPR) reduction method in Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) system based on the Fractional Fourier Transform (FrFT). The method reduces PAPR effectively through periodic extension of random phase sequence to the length of FrFT-OFDM symbol, weighting it with phase factors and multiplying transmitted data vector. Only one Inverse Discrete Fractional Fourier Transform (IDFrFT) operation is performed in the proposed method, and the signal candidates can be calculated in time domain via weighted summation of the chirp circularly shifted FrFT-OFDM symbols. The simulation results show that, in the case that all the methods have 32 candidates, the proposed method has almost the same performance, when compared with the SeLecting Mapping (SLM) and performs even better than the Partial Transmit Sequence (PTS). More importantly, the proposed method has lower computational complexity compared with SLM and PTS.

Key words: Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM); Fractional Fourier Transform (FrFT); Peak to Average Power Ratio (PAPR); Low-complexity

1 引言

由于在时频双弥散信道中, OFDM系统中子载波间的正交性容易受到破坏, 从而形成严重的子载波间干扰。为了克服这一问题, 文献[1]提出了FrFT-OFDM系统, 并得出在快速时变信道中FrFT-OFDM系统比传统OFDM系统具有更好的传输性能; 同时, FrFT的计算复杂度和FFT相近, 容易实现, 所以FrFT-OFDM系统具有很大的应用价值。

然而, 作为多载波传输系统, FrFT-OFDM系

统同样存在高峰均功率比问题, 这一问题直接影响系统的运行成本和效率, 是该技术不可忽视的问题之一。文献[2]对FrFT-OFDM系统的PAPR分布进行了理论推导与仿真验证, 并得出随着子载波个数的增加, FrFT-OFDM系统的PAPR分布和传统OFDM系统的PAPR分布趋于一致, 即对应不同阶次的FrFT-OFDM系统的PAPR分布趋于一致。目前, FrFT-OFDM系统的峰均比抑制算法仅仅是将传统OFDM系统的算法直接应用到该系统中, 传统OFDM系统的峰均比抑制算法有: 限幅法^[3]、选择映射法(SLM)^[4]、部分传输序列法(PTS)^[5]、有效星座扩展法(ACE)^[6,7]、压缩扩展法^[8,9]、子载波预留法^[10]等。文献[11]将传统的SLM法和PTS法分别应用于FrFT-OFDM系统, 系统的峰均比特性有了明显改善, 但是这两种算法存在计算复杂度大的问题。

2013-03-15 收到, 2013-06-13 改回

北京市自然科学基金(4112051)和教育博士点基金优先发展领域(20121101130001)资助课题

*通信作者: 赵越 zyozhm@163.com

虽然文献[12]针对传统 OFDM 系统中 PTS 算法运算量大的问题提出了 CSPS(Cyclically Shifted Phase Sequences)和 OCSPS(Optimised CSPS)算法,但是由于分数阶 Fourier 变换 chirp 周期性^[13]的存在,该算法并不能直接应用到 FrFT-OFDM 系统。

基于以上问题,本文对 CSPS 和 OCSPS 算法进行了改进,提出一种适用于 FrFT-OFDM 系统的低复杂度的峰均比抑制算法,该算法基于分数阶随机相位序列和分数阶圆周卷积定理,有效降低了算法运算复杂度。

2 FrFT-OFDM 系统模型

FrFT-OFDM 系统模型如图 1 所示。FrFT-OFDM 系统用 chirp 基代替正弦基作为子载波基信号,系统利用 IDFrFT 和 DFrFT 进行子载波的调制和解调,子载波调制信号表示为(这里将幅度进行了归一化)^[14]

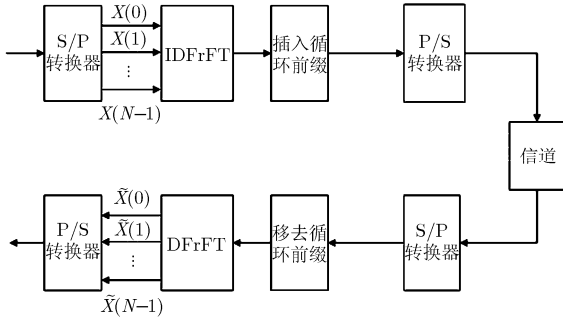


图 1 FrFT-OFDM 系统原理图

$$s(n) = e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot k^2 \cdot \Delta \mu^2} \cdot e^{\frac{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot k}{N}} \cdot X(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

其中 p 为分数阶 Fourier 变换的阶次, $\alpha = p \cdot \pi / 2$, N 表示子载波个数, $X(k)$ 表示第 k 个子载波上传输的数据, Δt 为连续信号的采样间隔, $\Delta \mu$ 表示分数阶 Fourier 域的采样间隔, 且 $\Delta \mu = \frac{2\pi |\sin \alpha|}{N \Delta t}$ 。

3 低复杂度的峰均功率比抑制算法

设 FrFT-OFDM 符号长度为 N , 未经子载波调制的数据为 $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]$, \mathbf{X} 经过子载波调制后为 $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]$ 。

3.1 设计分数阶随机相位序列

$\mathbf{R} = [R(0), R(1), \dots, R(L-1)]$ 是长为 L 的随机相位序列, 其中 $R(k) = e^{j\theta_k}$, $k = 0, \dots, L-1$, θ_k 均匀分布在 $[0, 2\pi]$ 上。 N 为 L 的整数倍, 即 $N/L = M$ 。将 \mathbf{R} 序列周期延拓至长为 N 的随机相位序列 $\mathbf{Q} = [Q(0), Q(1), \dots, Q(N-1)]$, 即

$$Q(m) = R((m))_L, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

其中 $((m))_L$ 表示 m 模 L 。然后用相位因子 $e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta \mu^2}$ 分别加权 \mathbf{Q} 序列中的每个元素得到 $\mathbf{B} = [B(0), B(1), \dots, B(N-1)]$, \mathbf{B} 即所要设计的分数阶随机相位序列

$$B(m) = Q(m) \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta \mu^2}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

\mathbf{B} 的逆离散分数阶 Fourier 变换 $\mathbf{b} = [b(0), b(1), \dots, b(N-1)]$ 为

$$b(n) = \text{IDFrFT}\{\mathbf{B}(m)\} = \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{N}} e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} B(m) e^{\frac{j \cdot 2\pi \cdot m \cdot n}{N}} e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta \mu^2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

将式(2)和式(3)代入到式(4)中, 得到

$$b(n) = N \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{N}} e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \cdot \sum_{i=0}^{L-1} r(i) \delta(n - iM), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

其中 $r(i)$ 为 $R(k)$ 的逆离散傅里叶变换(IDFT), 即 $r(i) = \text{IDFT}\{R(k)\}$ 。从式(5)可以看出长为 N 的序列 \mathbf{B} 经过逆离散分数阶 Fourier 变换后得到的 \mathbf{b} 序列与 $r(i)$ 有关, 且只有 L 个非零点。

3.2 低复杂度峰均比抑制算法

如同 SLM 算法^[4]的基本原理, 用 S 个备选随机相位序列 $\mathbf{B}^{(l)}$ 按元素乘以数据 \mathbf{X} , 得到 S 个备选信号 $\mathbf{X}^{(l)}$ 。

$$\mathbf{X}^{(l)} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}^{(l)} = [X(0) \cdot B^{(l)}(0), X(1) \cdot B^{(l)}(1), \dots, X(N-1) \cdot B^{(l)}(N-1)], \quad l = 1, 2, \dots, S \quad (6)$$

令 $\tilde{\mathbf{X}}^{(l)}(m) = \mathbf{X}^{(l)}(m) \cdot e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \cdot \Delta \mu^2}$ 作为该算法的备选信号, 根据分数阶圆周卷积定理^[15], $\tilde{\mathbf{X}}^{(l)}$ 的 N 点 IDFrFT 为

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(l)} = \text{IDFrFT}\{\tilde{\mathbf{X}}^{(l)}\} = \mathbf{x} \otimes_p \mathbf{b}^{(l)} \quad (7)$$

由于 $\mathbf{b}^{(l)} = [b^{(l)}(0), b^{(l)}(1), \dots, b^{(l)}(N-1)]$ 的表达式为

$$b^{(l)}(n) = N \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{N}} e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2} \cdot \sum_{i=0}^{L-1} r^{(l)}(i) \delta(n - iM), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

其中 $r^{(l)}(i) = \text{IDFT}\{\mathbf{R}^{(l)}(k)\}$ 。将式(8)代入到式(7)中得到

$$\tilde{x}^{(l)}(n) = \sum_{i=0}^{L-1} r^{(l)}(i) \cdot x((n - iM))_{P,N} \cdot R_N(n) \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot [-2iM \cdot n + (iM)^2] \Delta t^2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

其中 $R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 表示取主值区间的

值, $x((n-iM))_{P,N} R_N(n)$ 表示按式(10)所示 chirp 周期性规律^[13], 将 x 进行 chirp 周期延拓得到 $x((n))_{P,N}$, 然后对 $x((n))_{P,N}$ 进行移位后取主值区间。

$$x(n-N)e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha(n-N)^2\Delta t^2} = x(n)e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha n^2\Delta t^2} \quad (10)$$

令 $\eta(n, i) = e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha[-2iMn+(iM)^2]\Delta t^2}$, 则 $\eta(n, 0) = 1$,

式(9)可进一步表示为

$$\tilde{x}^{(l)}(n) = \sum_{i=0}^{L-1} r^{(l)}(i) \cdot x((n-iM))_{P,N} R_N(n) \cdot \eta(n, i), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

该算法的原理如图 2 所示。从式(11)可以看出, 该算法只需要一次 IDFrFT, 经过子载波调制后的 FrFT-OFDM 时域备选信号可以直接在时域通过对 x 信号 chirp 圆周移位的加权和得到, 而不用并行进行多个 IDFrFT 处理。选择 PAPR 最小的备选信号 $\tilde{x}^{(l)}(n)$ 作为发射信号, 同时将使备选信号最小的加权因子 $r_{\text{opt}}(i)$ 作为边带信息发送给接收端。

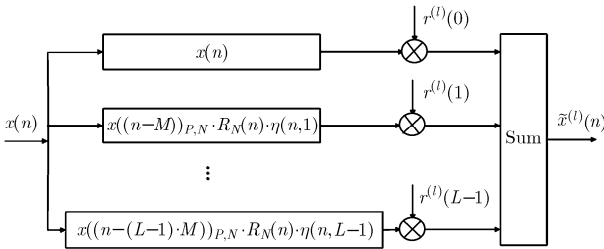


图2 算法原理图

$$r_{\text{opt}}(i) = \arg \min_{\{r^{(l)}(i), \dots, r^{(S)}(i)\}} \text{PAPR}\{\tilde{x}^{(l)}(n)\} \quad (12)$$

根据上面的描述, 现对算法的步骤总结如下:

(1)通过一个 N 点的 IDFrFT, 计算子载波调制后的时域 FrFT-OFDM 符号 $x(n)$;

(2)按照 chirp 周期性规律对 $x(n)$ 进行阶次为 p 的时域 chirp 周期延拓得到 $x((n))_{P,N}$;

(3)对 chirp 周期延拓后的 $x((n))_{P,N}$ 进行移位后取主值区间, 得到 $x((n-iM))_{P,N} R_N(n)$;

(4)将 $x((n-iM))_{P,N} R_N(n)$ 与 $\eta(n, i)$ 相乘, 得到 $\varphi(n, i)$;

$$\varphi(n, i) = x((n-iM))_{P,N} R_N(n) \cdot \eta(n, i), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (13)$$

(5)用 $r^{(l)}(i)$ 对 $\varphi(n, i)$ 加权后叠加, 得到 FrFT-OFDM 时域备选信号 $\tilde{x}^{(l)}(n)$ 为

$$\tilde{x}^{(l)}(n) = \sum_{i=0}^{L-1} r^{(l)}(i) \cdot \varphi(n, i), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad l = 1, 2, \dots, S \quad (14)$$

(6)选择 PAPR 最小的备选信号 $\tilde{x}^{(l)}(n)$ 作为发射信号。

在接收端只要将 $r_{\text{opt}}(i)$ 经过离散 Fourier 变换 (DFT) 得到 $R_{\text{opt}}(k)$, 根据式(2)和式(3)得到 B , 从而很容易将发送信号恢复出来。

3.3 运算复杂度对比分析

本文采用 Pei 采样型^[16]的 DFrFT 算法, 该算法执行一个 N 点的 IDFrFT 运算需要 $2N + \frac{N}{2} \log_2 N$ 次复乘运算。表 1 总结了 SLM 算法, PTS 算法和本文算法的运算复杂度。

表1 SLM, PTS 和本文算法的运算复杂度

算法	主要计算量及产生的备选信号个数	复乘次数
SLM	M_1 次 N 点的 IDFrFT, 产生 M_1 个备选信号	$M_1 \left(2N + \frac{N}{2} \log_2 N \right) + M_1 N$
PTS	K 次 N 点的 IDFrFT, 产生 M_2 个备选信号	$K \left(2N + \frac{N}{2} \log_2 N \right) + NKM_2$
本文算法	1 次 N 点的 IDFrFT, 产生 S 个备选信号	$(2+L)N + \frac{N}{2} \log_2 N + NLS$

表 2 给出了 3 种算法在具体参数下的主要计算量和复乘次数。此时 3 种算法的加权因子都限制在 $\{1, -1, j, -j\}$ 。

表2 具体参数下 3 种算法的运算复杂度

算法及对应参数值	主要计算量及产生的备选信号个数	复乘次数
SLM	32 次 256 点的 IDFrFT 运算, 产生 32 个备选信号	49152
$M_1 = 32$		
PTS	4 次 256 点的 IDFrFT 运算, 产生 32 个备选信号	6144
$M_2 = 32, K = 4$		
本文算法	1 次 256 点的 IDFrFT 运算, 产生 32 个备选信号	2560
$S = 32, L = 4$		

4 仿真实证

通过 Matlab 软件对该算法的 PAPR 抑制性能进行了仿真实证, 同时与 SLM 算法和 PTS 算法的 PAPR 抑制性能进行了对比。仿真中阶次 p 取 0.5, 子载波个数 N 取 256, 发送数据采用 QPSK 调制, 3 种算法的加权因子都限制在 $\{1, -1, j, -j\}$, 算法对应参数值如表 2 所示。图 3 给出了 PAPR 互补累计分布函数 (Complementary Cumulative Distribution Function, CCDF) 的仿真结果。CCDF 定义为信号 PAPR 值大于某门限 PAPR0 的概率, $\text{CCDF}(\text{PAPR0}) = \text{Pr}(\text{PAPR} > \text{PAPR0})$ 。

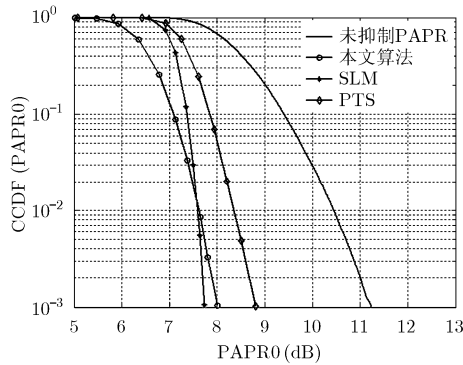


图 3 $S = M_1 = M_2 = 32$ 时 3 种算法的 PAPR 抑制效果

仿真结果分析: 从图 3 可以看出在备选信号个数都为 32 的情况下, PAPR 值大于 7 dB 时, 所提算法的 PAPR 抑制效果与 SLM 算法接近, 但是通过表 2 可以得到所提算法的运算量仅为 SLM 算法的 5.21%; 在备选信号个数都为 32 的情况下, 所提算法比 PTS 算法有更好的 PAPR 抑制效果, 在 $CCDF = 10^{-2}$ 时, 该算法比 PTS 算法有 0.7 dB 的增益, 且通过表 2 可以得到此时所提算法的运算量为 PTS 算法的 41.67%。

5 结束语

本文针对 FrFT-OFDM 系统的高峰均功率比问题, 提出了一种低计算复杂度的峰均比抑制算法。该算法通过利用分数阶随机相位序列的特点及分数阶 Fourier 变换的圆周卷积定理, 使得该算法只需要一次 N 点的 IDFrFT, 所有的备选信号可以在时域通过简单计算得到, 避免了并行进行 IDFrFT。通过对算法仿真得到: 当备选信号个数相同时, 该算法与 SLM 算法的 PAPR 抑制性能相当, 比 PTS 算法具有更好的 PAPR 抑制性能, 同时, 该算法比 SLM 和 PTS 算法的运算量降低。然而, 所提算法如同 SLM 算法、PTS 算法一样, 并不能把系统的峰均比降低到某个范围内, 只是减小了高 PAPR 出现的概率, 相信随着科学技术的发展进步, 峰均比抑制技术能够得到更好地完善。

参 考 文 献

- [1] Massimiliano M. A Multi-carrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, 49(6): 1011-1020.
- [2] Ju Y, Barkat B, and Attallah S. Analysis of peak-to-average power ratio of a multicarrier system based on the fractional Fourier transform[C]. 2004 9th IEEE Singapore International Conference on Communication System, Singapore, 2004: 165-168.
- [3] Wang Yong-chao and Luo Zhi-quan. Optimized iterative clipping and filtering for PAPR reduction of OFDM signals[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, 59(1): 33-37.
- [4] Jeon Hyun-bae, No Jong-seon, and Shin Dong-joon. A

low-complexity SLM scheme using additive mapping sequences for PAPR reduction of OFDM signals[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2011, 57(4): 866-875.

- [5] Ku Sheng-ju and Wang Chin-liang. A new side-information free PTS scheme for PAPR reduction in OFDM systems[C]. 2012 IEEE 8th International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications, Barcelona, 2012: 108-112.
- [6] Niranjana M and Srikanth S. Adaptive active constellation extension for PAPR reduction in OFDM systems[C]. IEEE International Conference on Recent Trends in Information Technology, Chennai, Tamil Nadu, 2011: 1186-1189.
- [7] Jeon Hyun-bae, No Jong-seon, and Shin Dong-joon. A new PAPR reduction scheme using efficient peak cancellation for OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2012, 58(4): 619-628.
- [8] Wang Y, Wang L-H, Ge J-H, et al. An efficient nonlinear companding transform for reducing PAPR of OFDM signals[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2012, 58(4): 677-684.
- [9] Wang Dong, Zou Nian-yu, Cui Gao-feng, et al. Companding scheme for peak-to-average power ratio reduction in optical orthogonal frequency division multiplexing systems[J]. *Optical Review*, 2012, 19(6): 371-375.
- [10] Park Kang-woo and Park In-cheol. Low-complexity tone reservation for PAPR reduction in OFDM communication systems[J]. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems*, 2012, 20(10): 1919-1923.
- [11] Xie Dan, Yang Shou-yi, Qi Lin, et al. PAPR reduction of FRFT-based MB-OFDM ultra wide band signals[C]. WiCOM'08, 4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, Dalian, 2008: 1-4.
- [12] Lu G, Wu P, and Aronsson D. Peak-to-average power ratio reduction in OFDM using cyclically shifted phase sequences[J]. *IET Communications*, 2007, 1(6): 1146-1151.
- [13] Tomaso E, Peter K, and Gianfranco C. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(12): 3419-3423.
- [14] Chen En-qing, Tao Ran, and Meng Xiang-yi. The OFDM system based on the fractional Fourier transform[C]. 2006 International Conference on Innovative Computing, Information and Control, Beijing, 2006: 14-17.
- [15] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 185-198.
- [16] Pei S C and Din J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(5): 1338-1353.

赵 越: 女, 1987 年生, 硕士生, 研究方向为 OFDM 系统 PAPR 抑制、信道估计及均衡等关键技术的研究。

王 腾: 男, 1988 年生, 博士生, 研究方向为通信信号处理理论、扩频通信抗干扰、宽带与超宽带信道估计及均衡等关键技术的研究。

陶 然: 男, 1964 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为分数阶傅里叶变换的理论与应用、雷达系统与技术、通信系统。