

量化状态信息下多智能体 Gossip 算法及分布式优化

王长城* 戚国庆 李银伢 盛安冬
(南京理工大学自动化学院 南京 210094)

摘要: 基于量化状态信息的异步随机 Gossip 算法大多以均匀选择概率的时间模型为基础, 未充分考虑网络拓扑结构对局部信息传递的影响。为此, 该文提出了一种以非均匀选择概率为时间模型的改进算法。首先给出了非均匀选择概率下的多智能体系统时间模型, 在随机性量化策略下给出了一致性误差的收敛性质; 并讨论了量化精度和概率化权重矩阵第 2 大特征值对一致性误差收敛速度的影响, 进而利用投影次梯度给出了选择概率的分布式优化方法。仿真结果表明, 该基于量化状态信息的算法可通过选择概率的分布式优化, 提高一致性误差的收敛速度。

关键词: 多智能体系统; 量化; 分布式一致; 非均匀选择概率; 优化

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2014)01-0128-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00297

Multi-agent Gossip Consensus Algorithm with Quantized Data and Distributed Optimizing

Wang Chang-cheng Qi Guo-qing Li Yin-ya Sheng An-dong
(Automation School, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: As the traditional quantized asynchronous randomized gossip consensus algorithm is based on uniform selection probability time mode, the impact of network topology on local information transfer is not been fully considered. Thus, an improved quantized asynchronous randomized gossip consensus algorithm with non-uniform selection probability is proposed in this paper. Firstly, the asynchronous time model with non-uniform selection probability is proposed. Then the convergence of the algorithm is analyzed with randomized quantized information. The impact of the quantization resolution and the second largest eigenvalue of the probabilistic weighted matrix on convergence rate is also discussed. Furthermore, this paper proposes an optimization algorithm for selection probabilities with projection subgradient method in a distributed manner. The numerical example indicates that, the proposed algorithm improves the convergence rate by optimizing selection probabilities of agents.

Key words: Multi-agent system; Quantization; Distributed consensus; Non-uniform selection probability; Optimizing

1 引言

随着多智能体系统在机器人编队控制^[1]、无人机协调控制^[2]、多传感器状态估计^[3]等领域的广泛应用, 分布式一致问题吸引了众多国内外学者, 成为当前热点研究领域之一^[4,5]。在多智能体系统中, 分布式一致是指各个具有感知、通信和决策能力的智能体在没有协调中心的情况下, 仅通过局部的信息交互最终使其状态达到全局一致。随机分布式一致是多智能体中一个重要的研究分支。在这类问题中, 通信拓扑被建模成随机图, 各智能体之间随机建立通信链路。这种随机拓扑结构可有效避免信道冲突,

降低单个智能体的计算和通信负担。

Gossip 算法^[6-9]是解决随机分布式一致性问题的有效工具。2006年, Boyd等人^[6]分别针对同步通信和异步通信方式对随机 Gossip 一致性问题进行了系统研究, 在概率意义下分析了多智能体一致性误差的收敛性和收敛速度, 并给出了概率矩阵 \mathbf{P} 的优化方法, 建立了解决这类问题的基本理论框架。在异步随机 Gossip (Asynchronous Randomized Gossip, ARG) 算法中, 每一时刻以相同的概率选择各智能体, 随后被选择的智能体根据概率矩阵 \mathbf{P} 从其邻居集中随机选择一个智能体进行信息交互完成状态更新。异步随机 Gossip 算法不要求每个智能体同时进行信息交换, 即放松了对全局信息交互同步的要求, 因而能够更好地适应分布式网络环境。近年来, 学者们从不同角度对 Gossip 算法进行了研究, 主要包括基于 Gossip 的分布式卡尔曼滤波^[10], 有向

2013-03-12 收到, 2013-10-22 改回

国家自然科学基金(61104186, 61273076)和江苏省自然科学基金(BK2012801)资助课题

*通信作者: 王长城 w308101484@126.com

Gossip 算法^[11]和量化 Gossip^[12]等。

在多智能体系统中，受网络信道通信容量和各智能体数据储存、计算能力的限制，各智能体之间只能处理、传递有限字节的信息量，因此，研究量化状态信息下随机分布式一致性具有更大的现实意义。2009年，Lavaei 等人^[13,14]利用凸优化方法研究了量化状态信息下 ARG 算法的平均收敛时间。随后，Carli 等人^[15]分别研究了确定性量化策略与随机性量化策略下的 ARG 算法，指出随机性量化优于确定性量化；并根据智能体是否能够获得其自身非量化信息，讨论了完全量化、部分量化、信息补偿3种状态更新方式下的收敛性。Yuan 等人^[16]研究了可变加权系数下的量化 ARG 算法，并讨论了算法渐近误差的上界与量化精度、加权系数的关系，并得出加权系数最优取值为1/2。2012年，Cai 等人^[17]研究了通信拓扑为完全有向图时的量化 ARG 算法，并给出了平均收敛时间。上述针对量化 ARG 算法的研究大多基于文献[6]中以均匀选择概率为基础的时间模型，该模型未充分考虑网络拓扑结构对局部信息传递的影响。鉴于此，本文基于非均匀选择概率的时间模型，给出了量化状态信息下异步随机 Gossip 算法；在概率意义下研究了多智能体系统一致性误差的收敛性质，分析了选择概率和量化精度对多智能体收敛速度的影响，并给出了选择概率的分布式优化方法。

2 问题描述

2.1 网络拓扑

记 $G = (V, E)$ 为无向图，其 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 中为节点集，每个节点 i 对应一个智能体，且相应的状态变量为 $x_i(k)$ ， $E \in \{(i, j) : i, j \in V\}$ 为边集。 $d_i \triangleq \sum_j a_{ij}$ ， $N_i \triangleq \{j \in V, a_{ij} \neq 0\}$ 分别为节点 i 的度与邻居集。 $(i, j) \in E$ 表示智能体 i ， j 之间能够建立通信链路。鉴于本文的研究重点，均假设所建立的通信链路是理想的，暂未考虑信道噪声随机干扰、数据丢包等因素的影响。

2.2 量化策略

本文采用随机性量化策略^[15,16]。设 $y \in R$ 的取值范围为 $[-U, U]$ ，量化水平 $l_b = 2^b$ ，其中 b 为比特位数。 $\Delta \triangleq 2U/l_b$ 为量化间隔， Δ 将区间 $[-U, U]$ 平均划分为 $S-1$ 个子区间，所产生的相应量化点集为 q ， $q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ 。其中 $q_1 = -U$ ， $q_s = U$ ， $q_i - q_{i-1} = \Delta$ 。若实数 y 满足 $q_i \leq y < q_{i+1}$ ，则随机性量化策略 $\wp(y)$ 表述如式(1)：

$$\wp(y) : \begin{cases} \Pr\{y = q_i\} = (q_{i+1} - y)/\Delta \\ \Pr\{y = q_{i+1}\} = (y - q_i)/\Delta \end{cases} \quad (1)$$

易知随机性量化策略有如下性质： $E[\wp(y)] = y$ ， $E[(\wp(y) - y)^2] \leq \Delta^2/4$ ，即在随机性量化策略下，量化值 $\wp(y)$ 是 y 的无偏估计，且量化误差取决于其量化水平。

2.3 量化状态信息下异步随机 Gossip 算法

首先给出非均匀选择概率下多智能体系统的异步时钟模型：由 n 个智能体组成的网络拓扑图 G ，各智能体存在一个内部时钟，时钟触发次数 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为速率等于 α_i ($\alpha_i \geq 0$) 的泊松过程。当其时钟触发时，该智能体随机从其邻居集中选择一个智能体发起信息交换，相邻两次触发时间间隔序列是速率为 α_i ，且相互独立同指数分布的随机变量。将所有智能体的时钟合成为一个全局时钟，其触发次数等价为一个速率为 $\sum_i^n \alpha_i$ 的泊松过程。为方便分析，不失一般性，在异步随机 Gossip 算法中规定每一时刻只允许选择一个智能体发起信息交换，在应用中可通过调整时间片，以较高的概率保证每一更新时刻只存在一个信息交互事件^[6-9]。若定义 $\Upsilon_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 表示 k 时刻被选择的智能体，则 Υ_k 为独立同分布的随机变量，且其概率分布函数为

$$\Pr\{\Upsilon_k = i, i = 1, 2, \dots, n\} = \alpha_i / \sum_i^n \alpha_i \triangleq \alpha'_i \quad (2)$$

不难发现，不同于传统的 Gossip 算法中所采用的时钟模型，本文给出的模型将以不同的概率选择各智能体发起信息交互。

设 $x_i(k) \in R$ 为智能体 i 在 k 时刻的状态量，基于非均匀选择概率的量化 ARG 算法(Non-uniform Quantized Asynchronous Randomized Gossip, NQARG)流程具体描述如下：在每一次更新周期中，智能体 i 以 α'_i 的概率被选择，当智能体 i 被选择时，以概率 p_{ij} 与智能体 j 建立通信链路，并交换量化状态信息进行各自状态更新：

$$\begin{cases} x_i(k+1) = \wp(x_i(k))/2 + \wp(x_j(k))/2 \\ x_j(k+1) = \wp(x_j(k))/2 + \wp(x_i(k))/2 \end{cases} \quad (3)$$

且其余智能体状态量保持不变，即 $\forall l \neq i, j$ ：

$$x_l(k+1) = x_l(k) \quad (4)$$

记 $\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\wp(x_1(k)), \wp(x_2(k)), \dots, \wp(x_n(k)))^T$ ，上述过程可化为如下向量形式：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{W}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (5)$$

$$\Pr(\mathbf{W}(k) = \mathbf{W}^{i,j}) = \alpha'_i p_{ij} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{W}(k)$ 为加权系数，

$$\mathbf{W}^{i,j} = I - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T / 2 \quad (7)$$

$\mathbf{e}_i = [0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0]^T \in R^n$ 为第 i 个元素等于 1 的单位列向量。 $\mathbf{P} \triangleq [p_{ij}] \subset R^{n \times n}$ 定义为通信概率矩阵, 其中 $p_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in E$; $p_{ij} = 0$, $(i, j) \notin E$ 。为便于分析, 在本文中均假设 \mathbf{P} 满足如下条件:

假设 1 $\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$, 其最大特征值为 1, 且其余特征值均严格小于 1。

该假设不失一般性, 若 G 图无向连通且不是二部图时, 总存在 \mathbf{P} 满足上述条件^[6,15]。

3 NQARG 算法收敛性分析

记 $x_{\text{ave}} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i(0)$ 为所有智能体初始状态的平均值, $\mathbf{y}(k) \triangleq \mathbf{x}(k) - \mathbf{1}\mathbf{1}^T \mathbf{x}(k) / n$ 为 k 时刻多智能体系统一致性误差。下面在概率意义下分析 NQARG 算法的收敛性质。

性质 1 对于 NQARG 算法, 若满足假设条件 1, 则 $\mathbf{x}(k)$ 以概率 1 达到一致:

$$\Pr \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\tau} \right\} = 1 \quad (8)$$

其中 $\mathbf{E}[\boldsymbol{\tau}] = \mathbf{1}x_{\text{ave}}$ 。

根据文献[16,18]的证明方法, 易得上述结论。

定理 1 在假设 1 下, 多智能体一致性误差向量 $\mathbf{y}(k)$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\|\mathbf{y}(k)\|_2^2 \right] &\leq \lambda_{n-1}^k(\overline{\mathbf{W}}) \|\mathbf{y}(0)\|_2^2 \\ &+ \frac{\Delta^2 (1 - \lambda_{n-1}^k(\overline{\mathbf{W}}))}{4(1 - \lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}))} (n-2) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{E}[\mathbf{W}(k)] = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \sum_{j=1}^n p_{ij} \mathbf{W}^{ij}$ 。

证明 定义量化误差 $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)$, 由文献[16], 在随机性量化策略下:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\|\mathbf{y}(k+1)\|_2^2 \mid \mathbf{y}(k) \right] &\leq \lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) \|\mathbf{y}(k)\|_2^2 \\ &+ \sum_{i=1}^n \widetilde{\mathbf{W}}'_{ii} \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_i(k)^2] \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{E}[\mathbf{W}^T(k)\mathbf{W}(k)], \quad \widetilde{\mathbf{W}}' = \mathbf{E}[\mathbf{W}^T(k)\mathbf{W}(k) - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n]$$

由本文加权系数矩阵 $\mathbf{W}(k)$ 的定义易知

$$\mathbf{W}^T(k)\mathbf{W}(k) = \mathbf{W}(k) \quad (11)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{W}^T(k)\mathbf{W}(k)] = \mathbf{E}[\mathbf{W}(k)] = \overline{\mathbf{W}} \quad (12)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{\mathbf{W}}'_{ii} = \text{tr}(\widetilde{\mathbf{W}}') = \text{tr}(\overline{\mathbf{W}} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n) = n-2 \quad (13)$$

由随机性量化策略的性质: $\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_i(k)^2] \leq \Delta^2/4$,

因此,

$$\mathbf{E} \left[\|\mathbf{y}(k+1)\|_2^2 \mid \mathbf{y}(k) \right] \leq \lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) \|\mathbf{y}(k)\|_2^2 + \frac{(n-2)\Delta^2}{4} \quad (14)$$

即

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[\|\mathbf{y}(k)\|_2^2 \right] \\ &\leq \lambda_{n-1}^k(\overline{\mathbf{W}}) \|\mathbf{y}(0)\|_2^2 + \frac{\Delta^2}{4} (n-1) \sum_{l=1}^k \lambda_{n-1}^{l-1}(\overline{\mathbf{W}}) \\ &= \lambda_{n-1}^k(\overline{\mathbf{W}}) \|\mathbf{y}(0)\|_2^2 + \frac{\Delta^2 (1 - \lambda_{n-1}^k(\overline{\mathbf{W}}))}{4(1 - \lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}))} (n-2) \end{aligned} \quad (15)$$

证毕

从式(15)可知, 多智能体系统一致性误差的收敛速度决定于量化精度与概率化权重矩阵 $\overline{\mathbf{W}}$ 第 2 大特征值, 即能通过提高量化精度或减小 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 的取值以提高其收敛速度。在多智能体系统中, 量化精度 Δ 表征了各智能体对数据的储存、计算能力和信道容量。在实际环境下, 由于设计成本、技术等因素的制约, 对量化精度的提高往往是有限的。因此通过减小 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 的取值来提高多智能体一致性收敛速度更具现实意义。下面将在非均匀选择概率下给出 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 的分布式优化方法。

4 选择概率分布式优化

由式(6)可知在非均匀选择概率下, 对于给定的网络拓扑结构, 概率矩阵 \mathbf{P} 与各智能体的选择概率 α'_i 决定了 $\overline{\mathbf{W}}$ 的取值。 \mathbf{P} 与 α'_i 对算法的影响本质上体现在每一周期对通信链路(即拓扑图中边 (i, j))的选择: 在均选择概率下对边 (i, j) 的选择概率为

$$\Pr \{ \text{Select}(i, j) \} = (p_{ij} + p_{ji})/n \quad (16)$$

而在非均匀选择概率下:

$$\Pr \{ \text{Select}(i, j) \} = \alpha'_i p_{ij} + \alpha'_j p_{ji} \quad (17)$$

文献[6]对均匀选择概率下通过优化 \mathbf{P} 提高收敛速度的问题进行了研究, 但均匀选择概率方式没有考虑各智能体在网络拓扑中获取信息资源的差异。通过式(16)与式(17)的比较, 不难发现在非均匀选择概率下可进一步改善 $\Pr \{ \text{Select}(i, j) \}$ 的取值, 即可根据各智能体之间的差异性, 通过选择概率的分配进而优化局部信息的传递。

基于以上分析, 受文献[6]的启发, 下面给出分布式环境下通过优化选择概率 α'_i 改进多智能体一致性收敛速度的方法, 考虑如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad &\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \overline{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{J}_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha'_i = 1 \\ 0 \leq \alpha'_i \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \mathbf{W}^{ij}$ 。

上述优化问题中的约束条件是 α'_i 的线性函数。由于 $\mathbf{1}$ 是矩阵 $\overline{\mathbf{W}}$ 的最大特征值 1 所对应的特征向

量, $\lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}})$ 可表示为

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}}) &= \sup \left\{ \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{W}} \mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 < 1, \mathbf{1}^T \mathbf{u} = 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \mathbf{u}^T \left(\sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{J}_i \right) \mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_2^2 < 1, \mathbf{1}^T \mathbf{u} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$\lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}})$ 是一簇关于 α'_i 的线性函数的上确界, 因此 $\lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}})$ 是关于 α'_i 的凸函数。上述凸优化问题可以采用内点法、次梯度方法求解。但这些传统的凸优化方法需获取所有节点信息进行集中式计算, 难以适用于分布式环境。下面给出该优化问题的分布式求解方法。

考虑到 $\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\sum_{i=1}^n \alpha'_i = 1$ 则

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^n \alpha'_i \sum_{j=1}^n p_{ij} (\mathbf{W}^{ij} - \mathbf{I}) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{J}'_i \quad (20)$$

其中 $\mathbf{J}'_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} (\mathbf{W}^{ij} - \mathbf{I})$ 。

记 \mathbf{v} 是 $\lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}})$ 所对应的特征向量, 易知 $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ 为 $\lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}})$ 的一个次梯度为

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}}) &\geq \lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}}) + \mathbf{v}^T (\bar{\mathbf{W}}' - \bar{\mathbf{W}}) \mathbf{v} \\ &= \lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}}) + \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{v}^T \mathbf{J}'_i \mathbf{v} \right) (\alpha''_i - \alpha'_i) \\ &= \lambda_{n-1}(\bar{\mathbf{W}}) + \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\alpha}'' - \boldsymbol{\alpha}') \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= \left[\mathbf{v}^T \mathbf{J}'_1 \mathbf{v} \quad \mathbf{v}^T \mathbf{J}'_2 \mathbf{v} \quad \cdots \quad \mathbf{v}^T \mathbf{J}'_n \mathbf{v} \right] \\ \bar{\mathbf{W}}' &= \sum_{i=1}^n \alpha''_i \mathbf{J}_i, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \left[\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \cdots \quad \alpha'_n \right]^T \end{aligned}$$

因此, $\boldsymbol{\kappa}$ 为选择概率 $\boldsymbol{\alpha}'$ 所对应的一个次梯度, 其中智能体 i 所对应的分量为

$$\kappa_i = -\frac{1}{2} \sum_{s \in N_i} p_{is} (v_i - v_s)^2 \quad (22)$$

不难发现, 若智能体 i 可获取特征向量 \mathbf{v} 中所对应的分量 v_i 与其邻居节点所对应的分量 $v_{s, s \in N_i}$, 即可以分布式方式进行优化。根据文献[18]和文献[19]的研究结果, 可利用图 1 所示流程计算 \mathbf{v} 。

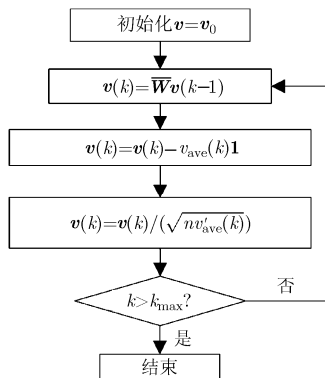


图1 特征向量分布式计算流程

图 1 中, $v_{\text{ave}}(k)$ 为各分量均值, $v'_{\text{ave}}(k)$ 为各分量平方均值。综上分析, 可得到分布式环境下各智能体选择概率优化算法, 如表 1 所示。

表 1 选择概率分布式优化算法

选择概率分布式优化算法

输入: 初始化选择概率 α'_i , 最大迭代次数 m_{max}

输出: 最优选择概率 $\boldsymbol{\alpha}'$

令迭代次数 $m = 1$

while $m < m_{\text{max}}$ do

(1) 根据图 1 计算特征向量 \mathbf{v} , 智能体 i 利用 \mathbf{v} 中对应的分量 v_i

与邻节点对应的分量 $v_{s, s \in N_i}$ 计算次梯度:

$$\kappa_i = -\frac{1}{2} \sum_{s \in N_i} p_{is} (v_i - v_s)^2$$

(2) 利用次梯度 κ_i 对选择概率 α'_i 更新:

$$\alpha'_i = \alpha'_i - \mu_m \kappa_i$$

(3) $m = m + 1$, 计算 α'_i 到可行域 $\{\boldsymbol{\alpha}' \in \Theta \mid \boldsymbol{\alpha}' \geq 0, \mathbf{1}^T \boldsymbol{\alpha}' = 1\}$

的投影:

$$P_{\Theta}[\boldsymbol{\alpha}'] = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|\boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}\|$$

return 最优选择概率 $\boldsymbol{\alpha}'$

以上给出了各智能体选择概率的优化方法, 在算法初始化阶段可以将初值设置为 $\alpha'_i = 1/n$, 保证其属于可行域集合。步骤(2)中, μ_m 为更新步长, 以不可加但递减为选择原则: $\mu_m \geq 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = 0, \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \rightarrow \infty$ 。步骤(3)中, 由于其可行域是充分简单的集合, 可利用图 2 所示的二分搜索方法计算 $\boldsymbol{\alpha}'$ 到可行域的投影, 由于 $\sum_{i=1}^n \alpha'_i, \sum_{i=1}^n \max(\alpha'_i - \theta, 0)$ 可先利用分布式一致性算法求出均值, 进而计算其总和。即每一步均可仅利用本节点和邻居节点信息进行计算, 因此可适应分布式环境。同时, 本节旨在给出选择概率分布式优化算法的理论成果,

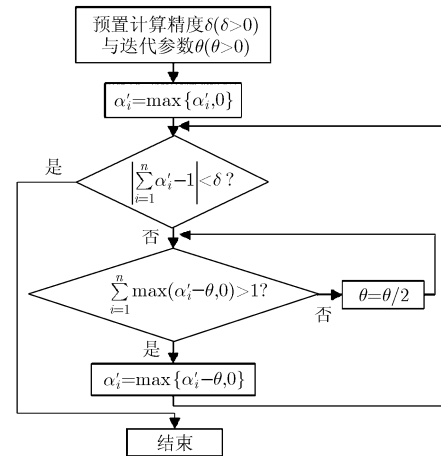


图2 投影计算流程

且该优化过程不同于前文所述的 Gossip 算法, 即不需要实时执行, 只需在网络初始化阶段进行, 因此暂未考虑数据量化误差的影响。

5 仿真分析

考虑在 25×25 的矩形区域内随机散布的 10 个智能体, 并以 10 为各节点的最大通信半径构造无向连通网络, 如图 3 所示。各智能体的初始状态在区间 $[-100, 100]$ 中随机取值。

(1) 量化精度对智能体系统一致性收敛速度的影响。不失一般性, 令 $\alpha'_i = 1/n$, 并以如下方式给出概率矩阵 \mathbf{P} 中的元素: $p_{ij} = 1/d_i, (i, j) \in E$; $p_{ij} = 0, (i, j) \notin E$ 。

利用蒙特卡洛仿真实验比较不同量化比特位数下的一致性误差 $\|\mathbf{y}(k)\|_2$, 如图 4 所示。表 2 给出了不同量化一致性误差达到给定精度 $\|\mathbf{y}(k)\|_2 \leq 0.015$ 时所需的迭代次数。经比较不难发现, 在初始阶段, 由于量化误差在一致性误差中所占比重较小, 收敛速度主要取决于特征值 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$, 使不同量化比特位数下收敛速度相近; 随着一致性误差的减小, 当迭代次数达到 400 左右时, 收敛速度主要取决于量化误差, 当量化水平越高, 收敛速度越快。

(2) 选择概率对收敛速度的影响。下面利用文中给出的方法对选择概率进行分布式优化。令初始化选择概率 $\alpha'_i = 1/10$, 此时概率化权重矩阵 $\overline{\mathbf{W}}$ 的初始值 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) = 0.9888$ 。根据次梯度优化算法中更新步长的选取原则, 令 $\mu_m = 1/\sqrt{m}$ 。经优化算法确定的选择概率取值如表 3 所示, 此时 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) = 0.9803$ 。图 5 给出了第 2 大特征值 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 随优化算法迭代次数 m 的变化曲线。图 6 为量化比特

位数等于 10 时, 均匀选择概率和优化选择概率下一致性误差曲线的比较。

从表 3 可以发现, 优化算法可根据网络拓扑中各节点获取信息的差异对智能体分配相应的选择概率, 从而减小 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 的取值。从图 6 不难看出, 由于通过选择概率重新分配对 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 的优化, 在初始阶段就可提高一致性误差的收敛速度。

(3) 选择概率优化与通信概率矩阵优化方法的比较。考虑图 3 所示的网络拓扑, 根据文献[6]的方法对通信概率矩阵 \mathbf{P} 进行优化, 矩阵 \mathbf{P} 中非零元素如下:

$$\left. \begin{aligned} p_{1,3} &= p_{2,3} = p_{8,3} = 0.4772 \\ p_{1,9} &= p_{2,9} = p_{8,9} = 0.5228 \\ p_{3,6} &= 0.5346 \\ p_{3,9} &= 0.4654 \\ p_{4,9} &= p_{5,6} = p_{6,3} = p_{7,9} = p_{10,7} = 1 \\ p_{9,3} &= 0.5848 \\ p_{9,7} &= 0.4152 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

此时 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) = 0.9811$ 。利用本文的方法继续对选择概率进行优化, 可得各智能体最优选择概率取值如表 4 所示, 此时 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}}) = 0.9774$ 。图 7 为第 2 大特征值 $\lambda_{n-1}(\overline{\mathbf{W}})$ 随优化算法迭代次数 m 的变化曲线。

表 2 不同量化比特位数下的收敛速度

比特位数	10	12	14	16	18
迭代次数 k	782	681	643	626	622

表 3 各智能体最优选择概率

智能体	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率	0	0	0.2121	0.0120	0	0.2615	0.2142	0	0.3002	0

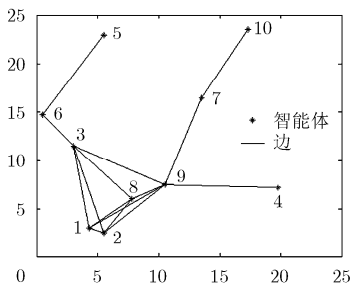


图 3 随机生成的网络拓扑图

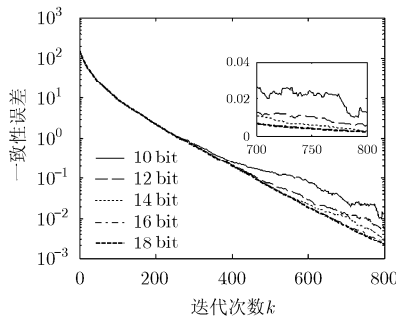


图 4 不同量化比特位数下一致性误差比较

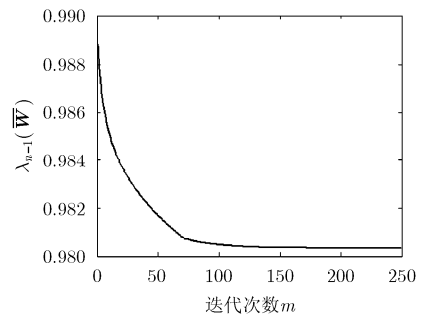


图 5 特征值优化

表 4 各智能体最优选择概率

智能体	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率	0.0470	0.0460	0.1783	0.0670	0.1151	0.0894	0.0950	0.0462	0.2035	0.1125

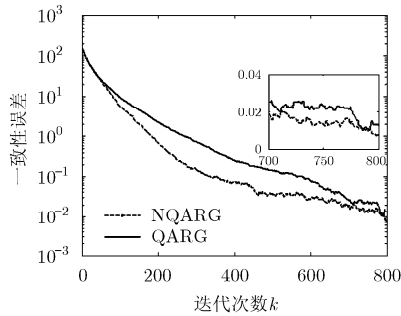


图 6 一致性误差比较

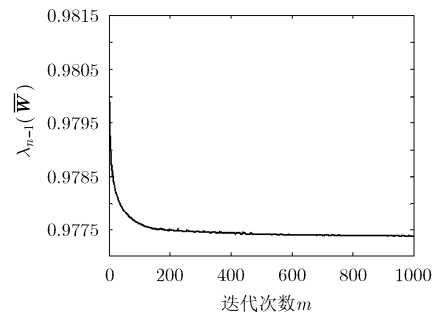


图 7 特征值优化

表 5 给出了不同优化方法下的结果对比。不难发现，通信概率优化方法对算法收敛速度的改进有限，其原因在于没有充分考虑各智能体在网络中获取信息的差异。而本文方法基于非均匀选择概率时间模型，可进一步对选择概率进行优化，从而改善收敛速度。同时，单一的优化通信概率矩阵或优化选择概率对收敛速度的提高均存在局限性，将两者结合可获得更好的结果。

表 5 特征值优化结果对比

$\lambda_{n-1}(\bar{W})$ 初值	文献[6]方法	本文方法	文献[6]与本文方法联合
0.9888	0.9811	0.9803	0.9774

6 结束语

本文基于量化状态信息，提出了一种非均匀选择概率下的异步随机 Gossip 算法，分析了算法的收敛性质，在分布式环境下给出了选择概率的优化方法。结果表明，多智能体一致性收敛速度取决于概率化权重矩阵的第 2 大特征值和量化水平；在初始阶段，误差收敛速度主要依赖于权重矩阵的第 2 大特征值，随着误差的减小，量化水平对其影响占主导地位。其次，可通过对选择概率的分布式优化提高收敛速度，且优化结果优于传统的通信概率矩阵优化方法。同时，本文为突出重点假设所建立的通信链路是理想的，实际网络系统中存在的信道随机干扰、数据丢包等现象仍是值得进一步探讨的问题。

参考文献

[1] Do K D. Formation control of multiple elliptical agents with limited sensing ranges[J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1330-1338.

[2] Manathara J G and Ghose D. Rendezvous of multiple UAVs with collision avoidance using consensus[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2012, 25(4): 480-489.

[3] 王长城, 戚国庆, 李银伢, 等. 传感器网络分布式一致性滤波算法[J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(12): 1645-1650.
Wang Chang-cheng, Qi Guo-qing, Li Yin-ya, et al. Consensus-based distributed filtering algorithm in sensor networks[J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(12): 1645-1650.

[4] Zhou Z, Fang H, and Hong Y. Distributed estimation for moving target based on state-consensus strategy[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(8): 2096-2101.

[5] 朱旭, 闫建国, 屈耀红. 不同延迟下离散多智能体系统的一致性[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(6): 1516-1520.
Zhu Xu, Yan Jian-guo, and Qu Yao-hong. Consensus for the discrete-time multi-agent system with diverse delays[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(6): 1516-1520.

[6] Boyd S, Ghosh A, Prabhakar B, et al. Randomized gossip algorithms[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(6): 2508-2530.

[7] Dimakis A G, Sarwate A D, and Wainwright M J. Geographic gossip: efficient averaging for sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(3): 1205-1216.

[8] Tuncer C A, Mehmet E Y, Anand D S, et al. Broadcast gossip algorithms for consensus[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(7): 2748-2761.

[9] Ustebay D, Oreshkin B N, Coates M J, et al. Greedy gossip with eavesdropping[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(7): 3765-3776.

[10] Kar S and Moura J M F. Gossip and distributed Kalman filtering: weak consensus under weak detectability[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1766-1784.

[11] Cai K and Ishii H. Average consensus on general strongly

- connected digraphs[J]. *Automatica*, 2012, 48(11): 2750–2761.
- [12] Lavaei J and Murray R M. Quantized consensus by means of gossip algorithm[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 19–32.
- [13] Lavaei J and Murray R M. On quantized consensus by means of gossip algorithm part I: convergence proof[C]. Proceedings of the American Control Conference, St. Louis, MO, 2009: 394–401.
- [14] Lavaei J and Murray R M. On quantized consensus by means of gossip algorithm Part II: convergence time[C]. Proceedings of the American Control Conference, St. Louis, MO, 2009: 2958–2965.
- [15] Carli R, Fagnani F, Frasca P, *et al.* Gossip consensus algorithms with quantized communication[J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 70–80.
- [16] Yuan D M, Xu S Y, Zhao H Y, *et al.* Distributed average consensus via gossip algorithm with real-valued and quantized data for $0 < q < 1$ [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(9): 536–542.
- [17] Cai K and Ishii H. Convergence time analysis of quantized gossip consensus on digraphs[J]. *Automatica*, 2012, 48(9): 2344–2351.
- [18] Xiao L and Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging[C]. Proceedings of 2003 Conference on Decision and Control, Hawaii, 2003: 4997–5002.
- [19] Kempe D and McSherry F. A decentralized algorithm for spectral analysis[C]. Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Chicago, 2003: 561–568.
- 王长城: 男, 1985 年生, 博士生, 研究方向为多源信息融合、分布式状态估计.
- 戚国庆: 男, 1977 年生, 副研究员, 研究领域为随机状态估计与信息融合.
- 李银伢: 男, 1976 年生, 副教授, 研究领域为目标跟踪、火力与指挥控制.
- 盛安冬: 男, 1964 年生, 研究员, 研究领域为多源信息融合理论及应用.