

## 基于随机几何理论的中继 OFDM 系统容量分析

付雅茹 朱琦\*

(南京邮电大学江苏省无线通信重点实验室 教育部宽带无线通信  
与传感网技术重点实验室 南京 210003)

**摘要:** 该文将随机几何理论应用于特定的基于译码转发(DF)中继的 OFDM 系统中,通过推导分析建立基于随机几何理论的中继 OFDM 系统容量模型。文中假设用户在环域范围内服从随机均匀分布,同时假设接入域用户之间存在频率复用,通过在考虑接入中继链路对接入基站链路的共道干扰时,以干扰积分上限值替代实际干扰值等理论分析,在中继和基站节点功率受限的情况下,得到完整的系统闭合容量表达式模型。并通过仿真对基于容量模型的系统传输速率值与理论值进行了比较,仿真结果证实了该文所建立的容量模型的合理性。

**关键词:** OFDM; 译码转发中继; 随机均匀分布; 共道干扰

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)10-2354-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2013.00130

## Capacity Analysis in Relay-assisted OFDM Systems Based on the Random Geometry Theory

Fu Ya-ru Zhu Qi

(*Jiangsu Province Key Laboratory of Wireless Communications, Key Laboratory on Wideband  
Wireless Communications and Sensor Network Technology of Ministry of Education,  
Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China*)

**Abstract:** This paper applies the random geometry theory to Decode-and-Forward (DF) relay-enhanced Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) system and derives a new system capacity model finally. There are some assumptions that multiple users distribute uniformly in a ring region around Base Station (BS) and frequency is reused existing among users in access zone. By using the upper bound of interfere integral value to alternate the actual interfere value when considering the co-channel interference, the closed expression of system capacity is obtained under the power constraints of BS and relay nodes. Simulation results show the validity of the system capacity model.

**Key words:** OFDM; Decode-and Forward (DF); Random uniform distribution; Co-channel interference

### 1 引言

无线通信技术在近几十年得到了迅速的发展,从基于模拟信号处理的第 1 代移动通信系统已发展到具有高速传输速率的第 3 代移动通信系统(Third Generation mobile communication system, 3G)并且其市场仍在不断扩大、需求不断提高<sup>[1]</sup>。未来无线网络需要提供更高的传输速率和更广的覆盖范围,单一技术的使用并不能同时满足这些要求,OFDM 技术与中继技术的结合因可以提供更好的用户服务体验,进一步保证蜂窝小区内及边缘用户

的公平性而日益受到人们的关注。从中继节点的功能来分,中继通信可以分为两大类<sup>[2]</sup>,即放大转发(Amplify-and-Forward, AF)中继和解码转发(Decode-and-Forward, DF)中继;AF 方式下,中继节点只对收到的信号进行简单的放大-转发处理;DF 方式下,中继节点要恢复出原始信息,然后再重新编码后发射给相应用户。

对于中继 OFDM 系统资源分配进行的研究由来已久,现有大量的研究成果。文献[3]研究了 AF 和 DF 模式下系统的功率分配问题,在此基础上,文献[4]利用匈牙利算法进行载波的分配并且使用注水定理进行功率的分配以使得系统容量达到最大。文献[5]则采用注水定理以及循环迭代的方法寻求功率分配的最优值。随后人们将研究的重点放在多跳、多中继、多用户的场景中,文献[6]研究了基于译码

2013-01-25 收到, 2013-05-30 改回

国家 973 计划项目(2013CB329005), 国家自然科学基金(61171094), 国家科技重大专项(2011ZX03001-006-02, 2011ZX03005-004-03)和江苏省自然科学基金重点研究专项(BK20111027)资助课题

\*通信作者: 朱琦 zhuqi@njupt.edu.cn

转发中继技术的多用户 OFDM 系统最优的资源分配算法。文献[7]分析了线性多跳中继系统资源分配问题，推导出多跳网络中中继接力公式。尽管现存较多文献针对于中继 OFDM 系统资源分配进行研究，但多数并未考虑因频率复用而产生的干扰问题<sup>[8,9]</sup>；然而实际当中共道干扰则是影响系统性能的最主要原因之一，也是在实际资源分配过程中不可忽略的因素之一。文献[10-15]分别研究了不同场景下中继 OFDM 系统的资源分配问题，但这些研究均在小区内进行全频率复用即假设用户皆分布在接入域，即不存在直接接入基站进行通信的用户，然而实际当中常会出现因信道条件良好而不需要借助中继进行通信的用户。此外，目前为止针对 OFDM 中继系统进行的资源分配方法多为最优化理论、拉格朗日分解理论、对偶分解理论及次梯度迭代理论等。据笔者所知还鲜有文章利用除最优化以外的理论如随机几何理论对 OFDM 中继系统资源优化问题进行分析。本文将随机几何理论应用于特定的 OFDM 中继系统中，在考虑小区内共道干扰的情况下，通过理论分析和推导得到特定环境下系统的容量模型，即完整的闭合容量表达式模型。

文章余下部分的安排如下，第 2 节介绍了本文研究的系统模型；第 3 节给出了利用随机几何理论推导闭合容量模型的详细过程；第 4 节介绍了性能仿真及分析；最后是结束语。

## 2 系统模型分析

考虑基于 OFDM 的两跳蜂窝中继系统。系统的频率资源被划分为  $N$  个相互正交的子载波，在每个小区内，中继与其服务的多个用户进行通信，用户根据其所处地理位置和通信链路质量选择接入方式：直接与基站进行通信，或者通过中继的帮助进行两跳传输，系统的下行传输在时间上划分为两个传输域：接入域(access zone)和中继域(relay zone)，如图 1 所示，接入域内的资源可以分配给基站到用户(BS-US)和中继到用户(RS-US)链路的传输，中继域内的资源可以分配给基站到中继(BS-RS)链路的传输。为了提升系统容量，设定小区内的 BS-US 及 RS-US 链路存在频率复用，但对于同一小区内的不同 RS，其 RS-US 链路之间的资源保持正交。在同一时刻，基站或者中继为其服务的单个用户最多只能提供一个子载波。假设所有节点均为单天线，且一个节点在某一时刻只能处于“收”或者“发”的状态即不能同时处于“收”和“发”的状态；假设小区基站可以获得该小区内所有的信道状态信息(Channel State Information, CSI)，中继可获得其

服务用户的 CSI。

这样小区内的干扰就来自于同一小区内不同接入链路之间的干扰，即为 BS-US 和 RS-US 链路之间因频率复用而带来的干扰，系统下行帧结构<sup>[15]</sup>示意图如图 1 所示。

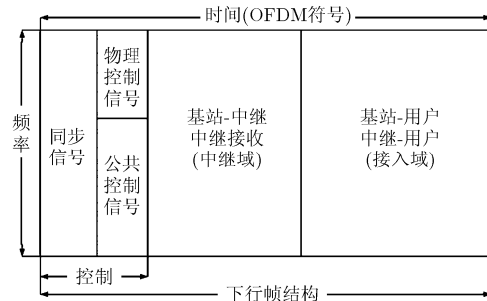


图 1 系统下行帧结构示意图

在上述无线通信系统中结合系统帧结构，考虑根据不同链路的质量自适应选择基站和中继接入链路的资源复用方式。小区的半径假设为  $R$  (m)，基站(BS)布置在小区中心， $M$  个中继均匀地分布在以基站为中心的距离基站  $r$  (m) 的圆环上，中继均采用译码转发模式，小区内用户服从密度为  $\lambda$  的随机均匀分布，假设每个小区共有  $K$  个用户， $K = \lambda\pi \cdot (R^2 - r^2)$ 。本文假设中继数目  $M = 3$ ，则基于译码转发中继的 OFDM 两跳蜂窝系统模型如图 2 所示。

## 3 基于随机几何的系统容量模型

本节将在第 2 节所述的基于译码转发中继的 OFDM 系统模型基础之上，给出利用随机几何理论进行系统容量分析的详细过程，并最终推导出基于随机几何理论的闭合容量表达式模型。假设  $K$  个用户在半径从  $r$  到  $R$  的环域内服从参数为  $\lambda$  的随机均

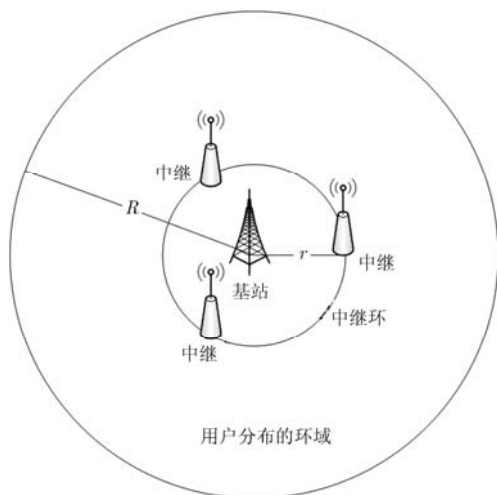


图 2 基于译码转发中继的 OFDM 两跳蜂窝系统模型示意图

均匀分布,  $R_{\text{BS}}$  表示接入 BS 用户的总传输速率,  $R_{\text{RS}}$  表示接入 RS 用户的总传输速率。本文针对系统下行链路进行研究, 同时假设基站和中继各自功率受限即

$$\sum_{n=1}^N p_k^s(n) \leq P_s \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^N p_{m,\hat{k}}^r(n) \leq P_r \quad (2)$$

其中  $P_s$  和  $P_r$  分别表示基站和中继的发射功率限制,  $p_k^s(n)$  表示基站在其接入链路服务于用户  $k$  的子载波  $n$  上的发射功率,  $p_{m,\hat{k}}^r(n)$  表示中继  $m$  在其接入链路第  $n$  个子载波上的发射功率, 且该子载波服务于用户  $\hat{k}$ , 则系统的总传输速率  $C$  可表示为接入域和中继域速率之和即:  $C = R_{\text{BS}} + R_{\text{RS}}$ , 其中  $R_{\text{BS}}$  为接入基站用户的总传输速率, 可表示为

$$R_{\text{BS}} = \beta \sum_{n=1}^N \log_2 \left\{ 1 + \frac{p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2}{N_0 + I_r(n)} \right\} \quad (3)$$

其中  $N_0$  为噪声功率, 并假设为高斯白噪声且在各子载波上取值相同;  $|h_k^s(n)|^2$  表示基站在其接入链路第  $n$  个子载波上的信道增益。由于接入链路之间存在频率共用, 所以干扰  $I_r(n)$  表示子载波  $n$  上 RS-US 链路对 BS-US 链路的干扰; 此外, 由于用户在中继环和小区半径之间的环形区域服从密度为  $\lambda$  的随机均匀分布, 利用随机几何的知识可以得到第  $k$  个用户与基站的距离  $r_k$  所服从的概率密度函数为

$$f(r_k) = \begin{cases} \frac{2r_k}{R^2 + r_k^2}, & r \leq r_k \leq R \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

令共道干扰  $I_r(n)$  的最终表现形式为  $\widehat{I_r(n)}$  则

$$\widehat{I_r(n)} = p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2 D_k^{-\alpha} \quad (5)$$

其中  $p_{m,\hat{k}}^r(n)$  表示中继  $m$  在其接入链路第  $n$  个子载波上的发射功率, 且该子载波服务于用户  $\hat{k}$ ,  $|h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2$  为其对应的信道增益。  $D_k$  表示中继  $m$  到用户  $k$  的距离, 即  $d_{m,k}^r(n)$ , 由于用户  $k$  与基站之间距离的概率密度函数为  $f(r_k)$ , 而中继与用户之间的距离的概率密度函数并不服从函数  $f(r_k)$ , 但我们可以用干扰的平均值来代替其实际值, 即假设载波  $n$  上 RS-US 链路对 BS-US 链路的干扰为中继  $m$  从中继环半径  $r$  到  $r + d_{m,k}^r(n)$  这段距离干扰的平均值(实际上通过下文的下限分析可以看出此种假设的合理性), 系统干扰模型如图 3 所示。其中 BS-US 链路, RS-US 链路及干扰链路在图 3 中分别给出, 根据随机几何理论可求得  $\widehat{I_r(n)}$  的均值为

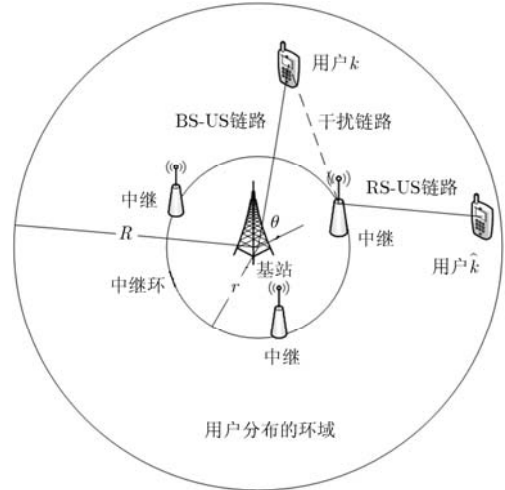


图 3 系统干扰模型示意图

$$\begin{aligned} E[\widehat{I_r(n)}] &= \int_0^{2\pi} \int_r^{r+d_{m,k}^r(n)} p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2 r_k^{-\alpha} f(r_k) f(\theta_k) d r_k d \theta_k \\ &= 2 \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2-r^2)} \left\{ [r + d_{m,k}^r(n)]^{2-\alpha} - r^{2-\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

由于只有在  $r \leq r_k \leq R$  时  $f(r_k)$  才不为零, 即  $r + d_{r,m,k}(n) \leq R$ , 因此

$$\begin{aligned} E[\widehat{I_r(n)}] &= 2 \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2-r^2)} \left\{ [r + d_{m,k}^r(n)]^{2-\alpha} - r^{2-\alpha} \right\} \\ &\leq 2 \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2-r^2)} [R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}] \end{aligned} \quad (7)$$

所以可得

$$R_{\text{BS}} \geq \beta$$

$$\sum_{n=1}^N \log_2 \left\{ 1 + \frac{p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2}{N_0 + 2 \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2-r^2)} [R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}]} \right\} \quad (8)$$

其中  $\alpha$  为大尺度衰落因子, 一般取值为 4,  $\beta$  为每一帧当中接入域资源所占用的比例, 一般在系统初始化时给出。同理可得

$$R_{\text{RS}} = \min \left[ (1-\beta) R_{\text{BR}}, \sum_{n=1}^N \beta \log_2 \left\{ 1 + \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{N_0 + I_s(n)} \right\} \right] \quad (9)$$

$R_{\text{BR}}$  为 RS 回程链路的传输速率, 即基站到中继的总传输速率。  $I_s(n)$  表示接入基站的第  $n$  条链路对

接入中继的第  $n$  条链路带来的干扰，假设 RS 回程链路容量足以支持其接入链路的传输，即

$$(1 - \beta) R_{\text{BR}} \geq \sum_{n=1}^N \beta \log_2 \left( 1 + \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{N_0 + I_s(n)} \right) \quad (10)$$

因此接入中继的用户总速率  $R_{\text{RS}}$  可等价

$$R_{\text{RS}} = \sum_{n=1}^N \beta \log_2 \left\{ 1 + \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{N_0 + I_s(n)} \right\} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} I_s(n) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2 r_k^{-\alpha} f(r_k) f(\theta_k) d_{r_k} d_{\theta_k} \\ &= \frac{2p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2 - r^2)} r_k^{2-\alpha} \Big|_0^R \\ &= \frac{2p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2 - r^2)} (R^{2-\alpha} - 1) \end{aligned} \quad (12)$$

即接入中继的用户总传输速率为

$$R_{\text{RS}} = \sum_{n=1}^N \beta \log_2 \left\{ 1 + \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{N_0 + \frac{2p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2 - r^2)} (R^{2-\alpha} - 1)} \right\} \quad (13)$$

所以可得到系统容量的闭合表达式为

$$\begin{aligned} C &= \beta \sum_{n=1}^N \log_2 \left\{ 1 + p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2 / \left( N_0 + \frac{2p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2 - r^2)} \left\{ [r + d_{m,k}^r(n)]^{2-\alpha} - r^{2-\alpha} \right\} \right) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{p_{m,\hat{k}}^r(n) |h_{m,\hat{k}}^r(n)|^2}{N_0 + \frac{2p_k^s(n) |h_k^s(n)|^2}{(2-\alpha)(R^2 - r^2)} (R^{2-\alpha} - 1)} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4 仿真结果及分析

为了验证基于随机几何理论所推导出的系统容量模型的准确性，我们考虑单个基于译码转发中继的 OFDM 系统下行链路的仿真分析。系统模型如本文第 2 节所述，假设小区半径  $R$  为 1000 m，中继半径  $r$  为 500 m，3 个中继均匀的分布在中继圆上如图 2 所示，用户在中继环域内服从密度为  $\lambda = 4.2 \times 10^{-5}$  的随机均匀分布。仿真中假设系统的整个频带被划分为  $N = 128$  个子频带，且基站和中继端总发射功率分别受限。系统的接入域资源占用比例  $\beta$  可取不

同的值，一般在 0.6 到 0.7 之间，在网络初始化阶段，每个用户根据其接收功率大小确定接入中继或者是基站。假设系统大尺度衰落因子  $\alpha = 4$ ，同时把小尺度衰落建模成有  $P = 6$  个等距抽头的有限冲激响应滤波器，如： $h(t) = \sum_{p=0}^{P-1} \alpha(p) \delta(t - pT/N)$ ，式中  $\alpha(p)$  为第  $p$  径的复幅度， $T$  为 OFDMA 符号的间隔；假设每一径的复幅度  $\alpha(p)$  服从瑞利衰落，即  $\alpha(p) \sim CN(0, 1/P)$ 。

图 4，图 5 分别为不同发射功率(dBm)限制情况下，随机几何模型系统容量与实际理论容量对比图。图 4 中每一帧接入域资源占总资源的 70%，图 5 中接入域系数  $\beta = 0.6$ 。从两张图中可以清晰地看出，随着发射功率的增加，系统平均传输速率都在增加。当基站和中继端的发射功率限制值较小时由随机几何容量模型得到的系统传输速率与实际值误差在 1% 以下，而随着发射功率的增加，两者之间的差距逐渐增大达到 5% 左右，误差的出现可以从第 2 节推导的过程中得到解释，即当发射功率增加时，系统的共道干扰也在增加，由于随机几何模型容量公式一直使用的是干扰的上限值所以得到的容量值相比于实际值要小，此外随着发射功率的增加，等价之后的干扰上限对容量的影响程度不断增加，导致实际容量高于随机模型容量 5% 左右。本文推导出的闭合容量表达式是容量下限形式，故随机几何模型容量一直低于实际容量，本文推导出的闭合容量表达式是容量下限形式，故随机几何模型容量一直低于实际容量，从图中也可以看出这点。此外，当接入域资源比例增加时可在一定程度上提高系统容量。

图 6 为用户分布参数对系统平均传输速率影响的分析图，其横坐标表示不同的系统随机均匀分布参数，纵坐标表示用户的平均传输速率，可以看出随着随机均匀分布参数的增加系统容量在一定程度上也在增加，在此仿真中我们假设基站和中继端的发射功率相同且均为 30 dBm，图 6、图 7 的接入域资源占用比例取值均为 70%。图 7 为不同中继端发射功率对系统平均传输速率的影响，基站端发射功率为 35 dBm；可以看出随着中继端发射功率的增加，系统容量呈增加趋势，但仿真值与理论值之间的差距也在扩大，其原因在于本文在考虑接入中继链路对接入基站链路的共道干扰时，以干扰积分上限值替代实际干扰值，所以当中继端功率增大时这种替代所带来的误差也在增大。从图 6 及图 7 中很容易看出，当用户分布参数不断变化或者中继端发射功率不断变化时，用本文推导的容量模型所得系统容量总能达到实际值的 94% 以上，进一步验证了本文所提模型的可行性。

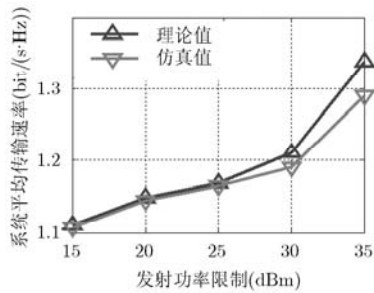
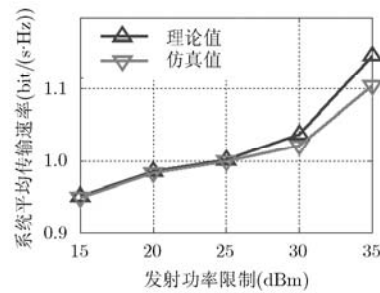
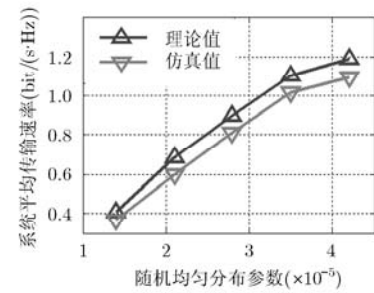
图 4 闭合模型系统容量对比图 ( $\beta = 0.7$ )图 5 闭合模型系统容量对比图 ( $\beta = 0.6$ )

图 6 不同随机均匀分布参数下的系统平均传输速率对比图

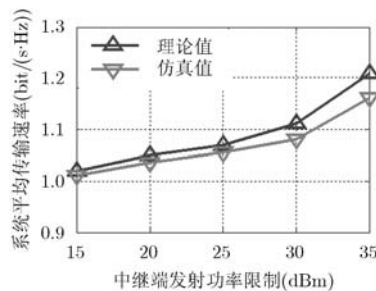


图 7 不同中继端发射功率下的系统平均传输速率对比图

## 5 结束语

本文将随机几何理论应用于特定的基于中继的 OFDM 系统中,通过理论分析和推导得到用户随机均匀分布环境下的系统容量模型,即完整的闭合容量表达式模型,该容量模型通过对共道干扰的分析及上限处理从而得到容量的下限值,仿真分析进一步证明了该容量模型的准确性和实用性。在之后的研究工作中,可以利用得到的闭合模型表达式反过来对系统资源进行重新规划和分配,以求达到资源的最大利用率。本文在传统资源分配的相关研究之上,给出一种新的资源分配的思路,并进行初步的尝试和分析,对于该思路的进一步实现和验证将在随后的研究工作中进一步推进和深化。

## 参考文献

- [1] Fan B, Wu W, and Zheng K. Proportional fair-based joint subcarrier and power allocation in relay-enhanced orthogonal frequency division multiplexing systems[J]. *IET Communications*, 2010, 4(10): 1143-1152.
- [2] Hu J and Chen X. Performance analysis of amplify-and-forward non-fixed relays cooperative network with relay selection[J]. *Journal of Computational Information Systems*, 2010, 6(9): 2901-2908.
- [3] Qi Z, Zhang J, and Shao C. Power allocation for regenerative relay channel with Rayleigh fading[C]. *IEEE Conference on Vehicular Technol*, Milan, May 2004: 1167-1171.
- [4] Yu G, Zhang Z, and Chen Y. Power allocation for non-regenerative OFDM relaying channels[C]. *IEEE International Conference on Wireless Communications Networking and Mobile Computing*, Istanbul, Sept. 2005: 185-188.
- [5] Hammerström I and Wittneben A. On the optimal power allocation for nonregenerative OFDM relay links[C]. *IEEE*

*International Conference on Communications*, Istanbul, June 2006: 4463-4468.

- [6] Zhou N, Zhu X, and Huang Y. Optimal resource allocation for orthogonal frequency division multiplexing-based multi-destination relay systems[J]. *IET Communications*, 2011, 5(14): 2075-2081.
- [7] Zhang X, Jiao W, and Tao M. End-to-end resource allocation in OFDM based linear multi-hop networks[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(10): 3034-3044.
- [8] Fu Y and Zhu Q. Subcarrier and power allocation in OFDM-based relaying system[J]. *Journal of Computational Information Systems*, 2012, 7(21): 5013-5020.
- [9] Weng L and Murch R. Cooperation strategies and resource allocations in multiuser OFDMA systems[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, 58(6): 2331-2342.
- [10] Mahboobi B and Ardebilipour M. Interference aware resource allocation in orthogonal frequency-division multiple access-based relay networks[J]. *IET Communications*, 2012, 6(11): 1364-1373.
- [11] Hajiaghayi M and Dong M. Jointly optimal channel and power assignment for dual-hop multi-channel multi-user relaying[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2012, 30(9): 1806-1814.
- [12] Yong L and Wen C. Adaptive resource allocation for improved DF aided downlink multi-user OFDM systems[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2012, 1(6): 557-560.
- [13] Yao H, Qian Z, and Zhi N. Resource allocation in multi-cell OFDMA-based relay networks[C]. *IEEE International Conference on Computer Communications*, San Diego, March 2010: 1-9.
- [14] Ng W K and Schober R. Resource allocation and scheduling in multi-cell OFDMA systems with decode-and-forward relaying[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2011, 10(7): 2246-2258.
- [15] 陈煜, 方旭明. 基于能效的解码转发中继 OFDM 链路自适应功率分配方案研究[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(2): 285-290. Chen Yu and Fang Xu-ming. Energy efficient adaptive power allocation in OFDM-based decode-and-forward relay link[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(2): 285-290.

付雅茹: 女, 1990 年生, 硕士生, 研究方向为基于中继技术的 OFDM 系统资源分配。

朱琦: 女, 1965 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为下一代移动通信技术、宽带无线接入技术、OFDM 技术、信道和信源编码技术和无线资源动态分配技术等。