

## 低剂量 CT 的线性 Bregman 迭代重建算法

王丽艳<sup>\*①②</sup> 韦志辉<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094)

<sup>②</sup>(东南大学数学系 南京 211189)

**摘要:** 针对降低 X 线源管电流来减少辐射剂量的实现方案所引起的投影图像低信噪比的情况, 该文提出一种新的低剂量 CT 图像重建模型。总的优化目标函数采用泊松噪声的负对数似然函数作为数据保真项, 采用待重建图像的稀疏性先验信息作为正则项。保真项能够克服加性高斯模型不能有效刻画噪声性质的缺点, 正则化项能够改善测量低信噪比所引起的不稳定性。求解过程中采用线性化 Bregman 迭代格式, 将原目标函数分解为变系数的 2 次优化问题和稀疏性先验去噪问题, 其中的 2 次优化问题中的 2 次项系数采用变系数计算, 能够更好地逼近原始的保真项, 从而加快收敛速度。在低剂量扇形束成像的条件下, 对仿真模型进行了数值试验, 并同传统的滤波反投影算法、极大似然算法和加权 2 范数重建算法进行了比较, 验证了该文算法的有效性。

**关键词:** CT 重建; 低剂量; 稀疏性正则化; 线性 Bregman 迭代

**中图分类号:** TP391; R445.6

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2013)10-2418-07

**DOI:** 10.3724/SP.J.1146.2012.01650

## Linearized Bregman Iterations for Low-dose CT Reconstruction

Wang Li-yan<sup>①②</sup> Wei Zhi-hui<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Computer Science Department, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

<sup>②</sup>(Mathematics Department, Southeast University, Nanjing 211189, China)

**Abstract:** A new low dose CT reconstruction model is proposed under the condition of low signal-to-noise ratio measured data, which are caused by reducing the X-ray source tube current in order to avoid the excessive radiation dose. In the objective function of the model, the logarithm likelihood function under Poisson noise is used as the fidelity functional, and sparse prior of image transform domain coefficients is used as the regularization functional. The fidelity functional is more effective than the additive Gaussian noise model, while the regularization functional can overcome the ill posed problem of image reconstruction especially in the low-dose situation. By using the linearized Bregman iteration, the sum minimization scheme is split into one step of quadratic programming with variable coefficient and the other step of the denoising issue. It can accelerate the convergence speed through the variable coefficient calculation in the quadratic programming to approximate the original fidelity term. Experimental results show that this proposed approach can be successfully applied to low-dose fan-beam CT reconstruction and it outperforms some existing algorithms including filter back projection algorithm, maximum likelihood algorithm and classical weighted  $l_2$  norm reconstruction algorithm.

**Key words:** Computed Tomography (CT) reconstruction; Low-dose; Sparse regularization; Linearized Bergman iteration

### 1 引言

随着 CT 在医学和工业上的广泛应用, 复杂多样的实际应用场景在高精度、低剂量成像方面提出了更高的要求。统计数据表明近十年以来以 CT 为代表

的医疗照射已经成为全民最大的人为电离辐射来源, CT 扫描中的辐射对于人体所造成的潜在危害的研究已经受到越来越广泛的关注<sup>[1]</sup>。因此, 研究新的低剂量 CT 技术是关系到全体社会公众及子孙后代健康的重大课题。

一次 CT 扫描的总曝光剂量等于单个角度下的曝光剂量乘以扫描所需的角度个数。新近发展的压缩感知理论引发了基于稀疏性正则化的应用研究, 文献[2-5]提出新算法在不改变单个角度曝光剂量的

2012-12-28 收到, 2013-07-02 改回

国家自然科学基金(61071146, 61179035)和江苏高校优势学科建设工程资助项目和东南大学重大科研引导基金(3207011102)资助课题

\*通信作者: 王丽艳 wangliyan@seu.edu.cn

前提下, 能够达到与传统的滤波反投影算法相比, 角度个数减少到原有的  $1/5$  且不影响断层图像重建质量。进一步通过降低 X-射线管电流强度(mAs)来降低每个角度下的曝光剂量, 在实际中具有简便易操作, 能够延长 X-射线管的使用寿命, 减少 CT 设备成本等优点, 因而具备良好的应用和推广前景<sup>[6]</sup>。但是, 在降低 X-射线管电流强度带来辐射剂量降低的同时, 会引起投影图像的信噪比降低, 如果采用传统的 CT 重建算法, 成像质量会明显的下降, 从而会影响临床诊断结果<sup>[7]</sup>。因此如何针对 X-射线管电流强度较低的情况, 研究和设计高精度的重建模型和算法成为研究的热点。

由于高斯噪声模型仅适用于较高剂量的情况, 针对 X-射线管电流强度较低的成像应用场景, 学者们提出了泊松噪声模型<sup>[8]</sup>及复合泊松噪声模型<sup>[9]</sup>。相比于以滤波反投影(FBP)为代表的解析算法, 极大似然的统计重建方法由于能够更好地适应成像过程中噪声的统计特性, 在低剂量 CT 成像中应用更为广泛。但是如果直接采用冻结法或交替迭代法求解, 该重建方法往往收敛速度慢, 并且多次迭代后会引起噪声的放大。因此后续的研究对统计重建方法进行两类改进。第 1 类是不改变优化目标, 改进求解极大似然的优化方法, 从而改善计算复杂度和收敛速度。如文献[10]采用代理函数来转移优化目标函数, 使得新的优化函数中的各变量可分离, 从而易于计算, 文献[11]采用分块的有序子集(Ordered Subsets, OS)的方法来加速算法的收敛速度。第 2 类改进方法可以统一为贝叶斯最大后验估计方法的框架下, 通过加入适当的待重建图像的先验信息作为正则化项, 来改善由低剂量所引起的重建问题不稳定性。如文献[4,12]将泊松噪声近似为方差依赖于测量信号强度的高斯噪声, 并引入总变差(TV)正则化进行重建, 文献[13]利用正弦图数据在小波变换域下稀疏作为先验信息, 先对正弦图数据修补然后进行重建。

以 TV 半模、变换域下系数的  $l_1$  范数约束最小化为代表的图像稀疏性先验<sup>[14,15]</sup>在压缩感知成像、图像去噪与图像恢复等领域取得了重大的突破, 应用效果与传统方法相比取得了显著的提高。然而上述领域的研究主要集中于高斯噪声(独立于信号的加性噪声)情形, 对于低剂量 CT 成像问题不能够通过简单的平移一般图像去卷积问题中的模型和算法, 需要针对 CT 成像的泊松噪声模型和待重建物体的特点研究重建模型以及相应的算法。本文提出了联合稀疏性先验和泊松似然保真的低剂量 CT 重建模型。首先分析了 CT 成像下的噪声模型, 给出了泊

松噪声的负对数似然函数及相应的导数信息; 以原始测量数据的负对数似然函数作为保真项, 以待重建图像在某种变换域的系数  $l_1$  模作为正则化项, 建立低剂量 CT 的重建模型; 然后采用线性 Bregman 算法进行求解, 并给出了本文算法的收敛性分析; 最后通过数值试验验证本算法的有效性。

## 2 低剂量CT成像的负对数似然函数

假设 X 射线源在给定的时间间隔内发射的光子个数服从参数为  $I$  的 Poisson 分布, 介质的吸收率分布为  $\mathbf{u}$  的情况下, 光子沿着  $L$  的路径穿透概率为  $\exp\left[-\int_L \mathbf{u} ds\right]$ , 因此到达探测器单元的光子数  $g$  服

从参数为  $I \exp\left[-\int_L \mathbf{u} ds\right]$  的 Poisson 分布。设

$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$  为未知的吸收率图像,  $\mathbf{A}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^M$  为投影算子的离散形式,  $a_{i,j}$  表示第  $i$  根光线通过第  $j$  个像素的长度。低剂量 CT 的离散数据退化模型<sup>[8]</sup>为

$$\mathbf{g} \sim P(\mathbf{I}e^{-\mathbf{A}\mathbf{u}}) \quad (1)$$

其中测量到的投影数据  $\mathbf{g}$  的每一个像素  $g_i$  均服从以  $I_i e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_i}$  为均值的泊松分布,  $I_i$  考虑 X 射线源不同时间段的差异以及不同辐射探测器单元的响应因子。假设待重建图像  $\mathbf{u}$  已知且每个投影数据的观测是独立的, 可以得到其似然函数为

$$p(\mathbf{g}|\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^M e^{-y_i} \frac{y_i^{g_i}}{g_i!}, \quad y_i = I_i e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_i} \quad (2)$$

进一步将泊松噪声的负对数似然函数记为:  $F(\mathbf{u}) := -\ln p(\mathbf{g}|\mathbf{u})$ , 代入退化模型式(2)中可得

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M I_i e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_i} + g_i [\mathbf{A}\mathbf{u}]_i + C \quad (3)$$

其中  $C = \sum_{i=1}^M -g_i \ln I_i + \ln(g_i!)$  表示与待重建图像  $\mathbf{u}$  无关的常数项。并且该负对数似然泛函的梯度向量和 2 阶 Hessian 阵为

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{u}) &= \mathbf{A}^T \mathbf{g} - \sum_{i=1}^M I_i e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_i} \mathbf{A}^T \mathbf{e}_i \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} (g_1 - I_1 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_1}) + a_{21} (g_2 - I_2 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_2}) \\ \quad + \cdots + a_{M1} (g_M - I_M e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_M}) \\ a_{12} (g_1 - I_1 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_1}) + a_{22} (g_2 - I_2 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_2}) \\ \quad + \cdots + a_{M2} (g_M - I_M e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_M}) \\ \vdots \\ a_{1N} (g_1 - I_1 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_1}) + a_{2N} (g_2 - I_2 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_2}) \\ \quad + \cdots + a_{MN} (g_M - I_M e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_M}) \end{pmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 F(\mathbf{u}) &= \mathbf{A}^T \left( \sum_{i=1}^M I_i e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \right) \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T \text{diag} \left( I_1 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_1}, I_2 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_2}, \dots, I_M e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_M} \right) \mathbf{A}\end{aligned}\quad (5)$$

### 3 稀疏性先验的低剂量CT重建模型

采用贝叶斯最大后验(Bayesian Maximum A-posteriori, MAP)估计, 综合利用测量数据的噪声模型和理想图像的先验信息进行图像重建, 从而改善问题不适定性。重建图像  $\mathbf{u}$  的最大后验概率估计为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^* &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{p(\mathbf{u} | \mathbf{g})\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{u}} \{-\ln p(\mathbf{g} | \mathbf{u}) - \ln p(\mathbf{u})\}\end{aligned}\quad (6)$$

其中  $p(\mathbf{u})$  为原始图像  $\mathbf{u}$  的先验概率,  $p(\mathbf{g} | \mathbf{u})$  为泊松分布的似然函数。MAP 方法等价于式(7)的正则化模型:

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \{\Phi(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J(\mathbf{u})\}\quad (7)$$

其中  $F(\mathbf{u}) := -\ln p(\mathbf{g} | \mathbf{u})$  为数据保真项,  $J(\mathbf{u}) := -\ln p(\mathbf{u})$  为正则化项。恰当的重建图像先验分布需要针对不同类型的待重建图像进行相应的统计建模, 这里选取新近发展的稀疏性正则化<sup>[12,13]</sup>。稀疏性正则化  $J(\mathbf{u}) = \lambda \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_1$ , 假设待重建图像在某种变换  $D$  下得到的变换系数是稀疏的, 为了求解简单稀疏性度量往往选取  $l_1$  范数, 即假设系数服从 Laplace 分布。总变差正则化  $J(\mathbf{u}) = \lambda \|\mathbf{u}\|_{TV} = \lambda \|\nabla \mathbf{u}\|_1$ , 假设待重建图像的有界变差是有限, 在离散的情况下等价于差分向量模的  $l_1$  范数, 因此可以将总变差正则化视为一种特殊的(即选取变换  $D$  为差分运算)稀疏性正则化。为了具体求解的可行性, 下面仅讨论  $D$  为差分运算(对应于 TV 正则化)和规范正交变换的情况。正则化参数  $\lambda$  起到调整 Laplace 分布的分散程度,  $\lambda$  越大分布越集中, 即假设系数越稀疏。这样的假设在医学成像中有着十分广泛的应用场景, 对于 X 射线吸收率成像而言, 相同的器官内部的吸收率往往都是相近的, 只有在不同器官的边界吸收率才会有较大的变化。

### 4 线性化Bregman迭代算法

由于数据保真项中关于待重建图像  $\mathbf{u}$  的形式复杂, 正则化项中的  $l_1$  范数也是非线性的, 因此直接求解该模型十分困难。首先将保真项进行二次化近似, 为了更好地利用二阶导数信息, 采用改进的 BB(modified Barzilai-Borwein method)方法<sup>[16]</sup>计算二阶变系数, 并采用线性化 Bregman 迭代格式<sup>[17]</sup>进行求解, 最后给出迭代格式的收敛性分析。

$$\begin{aligned}\text{首先选取迭代初值为 } \mathbf{p}^0 = \mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \text{ 迭代格式为} \\ \mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \phi^k(\mathbf{u}) = \tilde{F}^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^k) + D_J^{\mathbf{p}^k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^k) \right\} \\ \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k - \alpha^k (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) - \nabla F(\mathbf{u}^k)\end{aligned}\quad (8)$$

其中  $D_J^{\mathbf{p}^k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^k) = J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^k) - \langle \mathbf{p}^k, \mathbf{u} - \mathbf{u}^k \rangle$  为泛函  $J(\cdot)$  在  $\mathbf{u}^k$  点处与  $\mathbf{u}$  的 Bregman 距离,  $\mathbf{p}^k \in \partial J(\mathbf{u}^k)$ ,  $\tilde{F}^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^k)$  为  $F(\mathbf{u})$  在  $\mathbf{u}^k$  处的一阶泰勒多项式加上二次惩罚项, 即

$$\begin{aligned}\tilde{F}^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^k) &= F(\mathbf{u}^k) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)^T \nabla F(\mathbf{u}^k) \\ &\quad + \frac{\alpha^k}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^k\|_2^2\end{aligned}\quad (9)$$

#### 4.1 二次惩罚项的变系数选取

采用改进的 BB 方法计算二次惩罚项的系数  $\alpha^k$  为

$$\begin{aligned}\alpha^k &= \frac{(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})^T \nabla^2 F(\mathbf{u}^k) (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})}{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2^2} \\ &= \frac{\|\mathbf{W}^k \mathbf{A} (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\|_2^2}{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2^2}\end{aligned}\quad (10)$$

其中  $\mathbf{W}^k = \text{diag}(I_1 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}^k]_1}, I_2 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}^k]_2}, \dots, I_M e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}^k]_M})$ 。可以看出  $\alpha^k$  为二阶 Hessian 阵  $\nabla^2 F(\mathbf{u})$  的 Rayleigh 商, 因此  $\lambda_{\min} \leq \alpha^k \leq \lambda_{\max}$ 。对于泊松噪声情况下, 改进 BB 方法利用了当前迭代点处的二阶导数信息, 能够更好地逼近原始保真项  $F(\mathbf{u})$ 。迭代过程中每一步都要计算相邻两步解的误差  $\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2$  和像的误差  $\|\mathbf{A}(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\|_2$ , 因此二阶惩罚项的变系数  $\alpha^k$  的计算代价仅为每次多乘 1 个对角矩阵。

进一步可估算  $\nabla^2 F(\mathbf{u})$  的最大特征值的上界, 注意到矩阵  $\mathbf{A}$  的元素及待重建图像  $\mathbf{u}$  的含义取值非负, 因此可得

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \sup_{\mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} \sup_{\mathbf{u} \geq 0, \|\mathbf{u}\|_2 \leq 1} \mathbf{x}^T \nabla^2 F(\mathbf{u}^k) \mathbf{x} = \sup_{\mathbf{u} \geq 0, \|\mathbf{u}\|_2 \leq 1} \sup_{\mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \\ &\quad \cdot \text{diag} \left( I_1 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_1}, I_2 e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_2}, \dots, I_M e^{-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_M} \right) \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \|\mathbf{A}^T \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_M) \mathbf{A}\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{A}\|_2^2 \|\text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_M)\|_2 \\ &\leq \max(I_1, I_2, \dots, I_M) \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_{\infty}\end{aligned}\quad (11)$$

#### 4.2 子问题的快速计算

线性 Bregman 算法的思想是将固定点迭代和 Bregman 迭代相结合, 优点是可将保真项求解线性化并采用固定点迭代使得子问题求解变得简单, 同时由于采用了 Bregman 迭代使得迭代过程中对子

问题求解的误差不敏感且收敛速度较快。将迭代格式(8)整理可得：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}^k &= \mathbf{u}^k - \frac{1}{\alpha^k} (\mathbf{p}^k + \nabla F(\mathbf{u}^k)) \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{\alpha^k}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}^k\|_2^2 + J(\mathbf{u}) \\ \mathbf{p}^{k+1} &= \alpha^k (\mathbf{f}^k - \mathbf{u}^{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

下面只需要求解式(12)中的去噪子问题即可。当假设待重建图像经过规范正交变换  $D$  得到的系数是稀疏的，即选取正则化项为  $J(\mathbf{u}) = \lambda \|D\mathbf{u}\|_1$  时，由于正交变换保能量的性质，因此式(12)中去噪子问题的求解转化为对变换域系数进行萎缩运算：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{\alpha^k}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}^k\|_2^2 + \lambda \|D\mathbf{u}\|_1 \\ &\stackrel{\triangleq D\mathbf{u}=\theta}{=} D^{-1} \left( \arg \min_{\theta} \frac{\alpha^k}{2} \|\theta - D^{-1}\mathbf{f}^k\|_2^2 + \lambda \|\theta\|_1 \right) \\ &= D^{-1} \left( S_{\lambda/\alpha^k} (D^{-1}\mathbf{f}^k) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $S_{\tau}(\theta) = [s_{\tau}(\theta_1), s_{\tau}(\theta_2), \dots, s_{\tau}(\theta_N)]^T$  为萎缩算子， $s_{\tau}(a) = \text{sgn}(a) \cdot \max(0, |a| - \tau)$ ， $D^{-1}$  为  $D$  的反变换。

当假设待重建图像梯度场模稀疏时，选取总变差正则化即  $J(\mathbf{u}) = \lambda \|\mathbf{u}\|_{TV}$ ，式(12)中的子问题为经典 TV 去噪，可采用 Chambolle<sup>[18]</sup>对偶空间梯度下降算法，Beck 等人<sup>[19]</sup>快速梯度算法等。

### 4.3 算法流程及算法收敛性分析

设置可容忍的误差上界为  $\text{tol}$ ，当两次迭代解的相对误差足够小，或两次迭代解对应的目标函数值的相对误差足够小，或满足极值优化条件，即  $\frac{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2}{\|\mathbf{u}^k\|_2} \leq \text{tol}$ ，或  $\frac{\|\Phi(\mathbf{u}^k) - \Phi(\mathbf{u}^{k-1})\|_2}{\|\Phi(\mathbf{u}^k)\|_2} \leq \text{tol}$  或  $\|\nabla F(\mathbf{u}^k) - \mathbf{p}^k\|_2 \leq \text{tol}$ ，迭代停止。出于算法收敛性考虑，变系数  $\alpha^k$  的选取还需要进一步满足目标函数单调下降的条件。根据式(12)设置系数  $\alpha^k$  的初值，进一步采用类似文献[20]的方法进行单调化处理，每次将系数  $\alpha^k$  放大  $\eta$  倍 ( $\eta > 1$ ) 直到满足式(14)：

$$\Phi(\mathbf{u}^{k+1}) \leq \Phi(\mathbf{u}^k) - \frac{\delta \alpha^k}{2} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2 \quad (14)$$

其中  $\delta$  为给定的小于 1 的正常数。

综上可得到本文提出的低剂量 CT 的稀疏性正则化模型的变系数线性 Bregman 算法(Variable Coefficient Linearized Bregman Algorithm, VCLBA)流程如表 1 所示。

表 1 变系数线性 Bregman 算法流程

变系数线性 Bregman 算法(VCLBA)

- (1) 初始化:  $\text{tol}, \eta > 1, \delta \in (0, 1), \alpha_{\max} > 0, k = 1, \mathbf{u}^k = \mathbf{p}^k = \mathbf{0}, \alpha^k = 1$
- (2) 主迭代: 外循环
- (3) 内循环
- (4)  $\mathbf{f}^k = \mathbf{u}^k - \frac{1}{\alpha^k} (\mathbf{p}^k + \nabla F(\mathbf{u}^k))$
- (5)  $\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{\alpha^k}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}^k\|_2^2 + J(\mathbf{u})$
- (6) if 式(14) 不满足, 则  $\alpha^k = \delta \alpha^k$
- (7) else 跳出内循环
- (8)  $\mathbf{p}^{k+1} = \alpha^k (\mathbf{f}^k - \mathbf{u}^{k+1})$
- (9) 由式(10)计算  $\alpha^{k+1}$
- (10) until 满足停止条件, 跳出外循环
- (11)  $\frac{\|\Phi(\mathbf{u}^k) - \Phi(\mathbf{u}^{k-1})\|_2}{\|\Phi(\mathbf{u}^k)\|_2} \leq \text{tol}, \frac{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2}{\|\mathbf{u}^k\|_2} \leq \text{tol}$   
或  $\|\nabla F(\mathbf{u}^k) - \mathbf{p}^k\|_2 \leq \text{tol}, k \geq N_{\text{iter}}$
- (12) 输出: 重建图像  $\mathbf{u}^{k+1}$

式(11)中估计出  $\nabla^2 F(\mathbf{u})$  的最大特征值的上界，选取  $L_F = \lambda_{\max} \leq \max(I_1, I_2, \dots, I_M) \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_{\infty}$ ，由此可知  $\nabla F(\mathbf{u})$  在可行集  $\{\mathbf{u} : \mathbf{u} \geq 0\}$  上是 Lipschitz 连续可导，即

$$\|\nabla F(\mathbf{u}) - \nabla F(\tilde{\mathbf{u}})\|_2 \leq L_F \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_2 \quad (15)$$

进一步，与文献[20]中的方法类似可以证明，当正则化项为凸泛函，总的目标函数有下界，则变系数线性 Bregman 算法(VCLBA)收敛到满足极值优化条件的解。

## 5 实验结果与分析

对模拟数据进行仿真实验，来检验算法的有效性。实验中单位选取为像素，选择图像为 128×128，观测区域(Field Of View, FOV)的大小为 500，探测器长度为 800，总的单元个数为 400；假设扇形束成像，探测器和光源围绕旋转中心等角度间隔地旋转，设旋转的角度个数为 100；光源到探测器的距离为 950，旋转中心到探测器的距离为 408。为了易于并行化处理，投影算子  $\mathbf{A}$  的计算采用像素驱动法进行计算。

实验中选用了 Fessler 图像重建工具包<sup>[21]</sup>(Image Reconstruction Toolbox, IRT)中提供的如图 1(a)所示的 zupal 模型，实际成像中系统观测区域为圆形，区域外的数据不必计算，通过图 1(b)中所示的掩模矩阵来实现，图 1(c)中给出了 100 个角度扇形束仿真得到的无噪投影数据，探测器单元接

收的电子个数平均为 249.97，最大的光子个数为 632，图 1 (d)中给出伴有泊松噪声的投影数据。

对图1(d)有噪声的投影图像分别采用直接FBP算法，ML\_Convex算法<sup>[10]</sup>，PWSL\_TV算法<sup>[4]</sup>和本文的变系数线性Bregman算法(VCLBA)进行重建。ML\_Convex算法采用代理函数的方法，构造凸函数来迭代求解极大似然函数；PWSL\_TV算法将泊松噪声近似为高斯噪声，噪声的方差依赖测量信号的强度，通过加权二范数实现数据的保真，并结合TV正则化进行重建。当变换D为规范正交阵时，本文的变系数线性Bregman算法(VCLBA)第5行的计算采用式(13)进行求解，这里称为 VCLBA\_ l<sub>1</sub>算法，实验中 D 采用 Daubechies2 小波变换，具体通过 Rice

Wavelet Toolbox 软件包<sup>[22]</sup>实现；当变换 D 为离散差分算子(TV 正则化)时，采用 Chambolle<sup>[18]</sup>对偶空间梯度下降算法进行求解，这里称为 VCLBA\_TV 算法；实验终止条件是选取两次迭代解对应目标函数值的相对误差小于 0.1。图 2 给出了上述各算法的重建结果。从重建的视觉效果来看，图 2(a)中的 FBP 算法效果最差；PWSL\_TV 算法相比于 ML\_Convex 算法较好，重建图像中显示出原始图像的吸收率高区域，但是两种算法都存在较多的颗粒状伪影，不利于诊断；本文的 VCLBA\_TV 算法和 VCLBA\_ l<sub>1</sub>算法视觉效果最好，能够清楚地看出原始图像中吸收率高的区域。

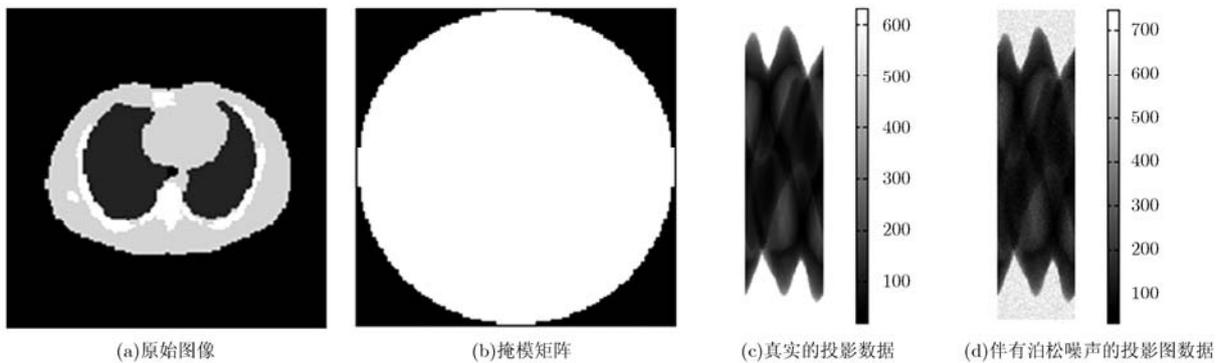


图1 模拟实验图

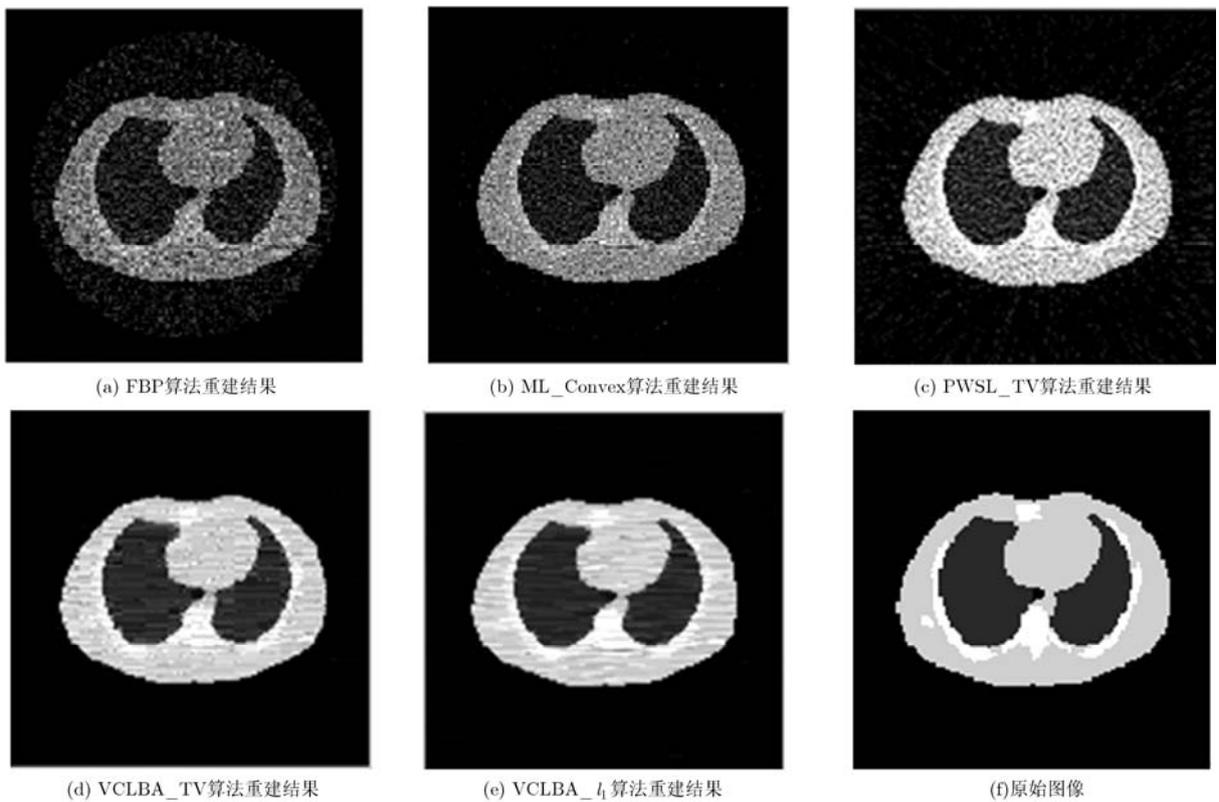


图 2 重建算法的结果对比

进一步采用定量评价指标相对均方误差(RMS)及峰值信噪比(PSNR)对各种方法进行比较,定义如下:

$$RMS = \frac{\|u - u^*\|_2}{\|u^*\|_2} \times 100 \quad (16)$$

$$PSNR = 10 \lg \max(u^*)^2 / \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(u_{ij}^* - u_{ij})^2}{m \cdot n} \quad (17)$$

其中  $u^*$  为原始图像,  $u$  为迭代解。表 2 中列出两种剂量下的各种算法重建结果与真实图像之间的定量评价指标。性能指标由差到好依次为: FBP 算法, PWSL\_TV 算法, ML\_Convex 算法, VCLBA\_l1 算法, VCLBA\_TV 算法, 从中可以看出本文提出算法的有效性。

图 3 给出了各种算法的误差演化对比图。图 3(a) 给出了各种算法的迭代解相对于原始图像的相对均方误差随着迭代次数变化的曲线图, 可以看出 VCLBA\_l1 和 VCLBA\_TV 算法迭代 30 次左右已经达到迭代终止条件, 而 PWSL\_TV 算法、ML\_Convex 算法迭代到 150 次左右才趋于稳定。图 3(b) 给出了各种算法的迭代解的相对均方误差随

着 CPU 计算时间变化的曲线, 可以看出本文提出的两种算法计算速度明显快于另外两个算法。

### 6 总结与展望

在贝叶斯最大后验准则下, 采用泊松似然函数的负对数函数作为保真项, 图像在某种变换下具备稀疏性作为正则化项, 建立了低剂量 CT 的重建模型。与最大似然算法及将泊松噪声近似为加权高斯的算法相比, 本文提出的模型能够兼顾低剂量下的 CT 成像的噪声性质, 及通过稀疏性正则化较好地刻画待重建图像的先验性。针对模型直接求解十分困难, 采用了变系数的线性 Bregman 求解算法, 能够兼顾原模型的有效性和计算复杂度。实验结果表明, 由于选用泊松似然函数的负对数函数作为保真项, 能够较好地适应泊松噪声的统计特性, 同时变换域下系数的稀疏性能够有效匹配图像中的重要局部几何结构, 从而改善重建图像的质量, 并且只需较少次数的迭代即可取得较好的重建结果, 具有快的收敛速度。进一步研究发展的方向可考虑选用更符合实际情况的复合泊松模型作为噪声模型, 稀疏变换可扩展到新近发展的具有快速正反变换的稀疏框架(如小波变换、脊波变换等)及稀疏字典。

表 2 各算法的重建图像定量指标比较

平均光子个数	性能指标	FBP	ML-Convex	PWSL_TV	VCLBA_l1	VCLBA_TV
249.97	RMS	33.38	21.59	24.73	12.67	<b>10.68</b>
	PSNR	17.73	21.52	20.34	26.15	<b>27.63</b>
2499.93	RMS	14.19	8.17	11.78	6.12	<b>6.02</b>
	PSNR	25.15	29.96	26.78	32.46	<b>32.62</b>

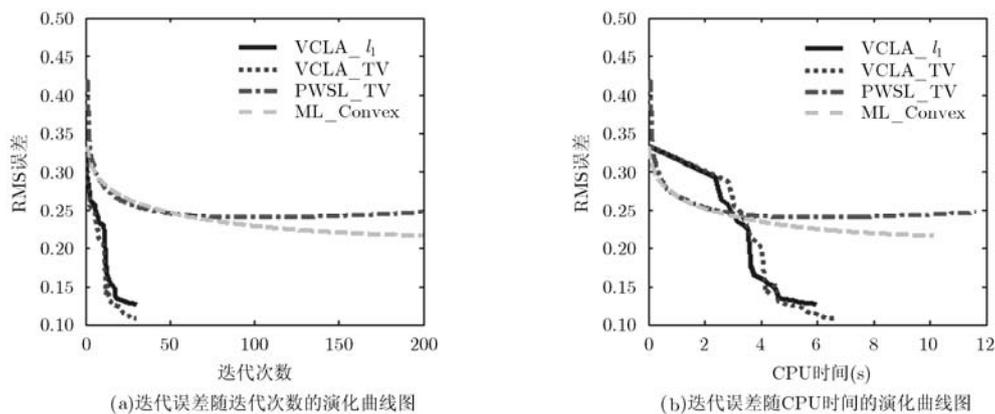


图 3 不同算法误差演化对比

### 参考文献

[1] Linton O W and Mettler F A. National conference on dose reduction in CT with an emphasis on pediatric patients[J]. *American Journal of Roentgenology*, 2003, 181(2): 321-329.

[2] Sidky E Y, Kao C M, and Pan Xiao-chan. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT[J]. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2006, 14(2): 119-139.

- [3] Yu Heng-yong and Wang Ge. Compressed sensing based interior tomography[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2009, 54(9): 2791-2805.
- [4] 王丽艳, 韦志辉, 罗守华. 总变差正则化断层图像重建的解耦 Bregman 迭代算法[J]. *中国图象图形学报*, 2011, 16(3): 357-363.  
Wang Li-yan, Wei Zhi-hui, and Luo Shou-hua. An uncouple Bregman iteration for tomography reconstruction using total variation regularization[J]. *Journal of Image and Graphic*, 2011, 16(3): 357-363.
- [5] Aybat N S and Iyengar G. A first-order augmented Lagrangian method for compressed sensing[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, 22(2): 429-459.
- [6] Gies M, Kalender W A, Wolf H, et al.. Dose reduction in CT by anatomically adapted tube current modulation I: simulation studies[J]. *Medical Physics*, 1999, 26(11): 2235-2247.
- [7] 张元科. 低剂量 X 射线 CT 断层成像的噪声抑制研究[D]. [博士学位论文], 西安电子科技大学, 2011.  
Zhang Yuan-ke. Noise reduction for low-dose X-ray computed tomography[D]. [Ph. D. dissertation], Xidian University, 2011.
- [8] Macovski A. *Medical Imaging Systems*[M]. New Jersey: Prentice-Hall Engle-wood Cliffs, 1983, Ch. 6.
- [9] Whiting B R. Signal statistics in X-ray computed tomography[C]. *Proceedings of the SPIE Medical Imaging*, 2002, 4682: 53-60.
- [10] Erdogan H and Fessler J A. Monotonic algorithms for transmission tomography[J]. *IEEE Transactions on Medical Image*, 1999, 18(9): 801-814.
- [11] Feng B, Fessler J A, and Pretorius P H. Evaluation of the ordered-subset transmission (OSTR) algorithm for transmission imaging on SPRCT systems using axially overlapping cone-beams[J]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2006, 53(3): 1227-1229.
- [12] Ming Yan and Luminita A V. Expectation maximization and total variation based model for computed tomography reconstruction from undersampled data[C]. *Proceedings of the SPIE Physics of Medical Imaging*, 2011, 7961: 79612X-1-79612X-8.
- [13] Dong Bin, Li Jia, and Shen Zuo-wei. X-ray CT image reconstruction via wavelet frame based regularization and Radon domain inpainting[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2013, 54(2): 333-349.
- [14] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [15] Candès E, Romberg J, and Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [16] Barzilai J and Borwein J M. Two-point step size gradient methods[J]. *IMA Journal Numerical Analysis*, 1988, 8(1): 141-148.
- [17] Osher Stanley, Mao Yu, Dong Bin, et al.. Fast linearized bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising[R]. University of California at Los Angeles, 2009.
- [18] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 89-97.
- [19] Beck A and Teboulle M. A fast iterative shrinkage threshold algorithm for linear inverse problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Science*, 2009, 2(1): 183-202.
- [20] Harmany Z T, Marcia R F, and Willett R M. This is SPIRAL-TAP: Sparse Poisson Intensity Reconstruction ALgorithms—Theory and Practice[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(3): 1084-1096.
- [21] Fessler J A, et al.. Image reconstruction toolbox[OL]. <http://www.eecs.umich.edu/~fessler/code,2012>.
- [22] Rice University. Rice wavelet toolbox[OL]. <http://dsp.rice.edu/software/rice-wavelet-toolbox,2012>.
- 王丽艳: 女, 1978 年生, 讲师, 主要从事医学图像处理、CT 理论和重建算法研究方面的研究工作。
- 韦志辉: 男, 1963 年生, 教授, 主要从事小波分析、模式识别和图像处理方面的研究工作。