

工程采样系统的分数阶傅里叶域分析与改进

鲁溟峰^{*①②} 张峰^① 倪国强^② 陶然^①

^①(北京理工大学信息与电子学院 北京 100081)

^②(北京理工大学光电学院 北京 100081)

摘要: 采样和重构是信号处理的基本问题。已有的分数阶傅里叶域采样理论是对理想的采样系统进行分析的, 工程中的 A/D 和 D/A 转换是基于采样保持电路实现的, 该文在分数阶傅里叶域对采样保持系统进行分析, 提出一个可行的工程采样和重构模型, 该模型仅需在传统采样保持系统上增加两级乘法器就可实现。所得结果进一步完善了分数阶傅里叶域采样定理, 为分数阶傅里叶域采样定理的实用化提供了理论基础。

关键词: 信号处理; 分数阶傅里叶变换; 采样保持系统; 重构

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)09-2094-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01545

Analysis and Improvement of Actual Sampling System in Fractional Fourier Transform Domain

Lu Ming-feng^{①②} Zhang Feng^① Ni Guo-qiang^② Tao Ran^①

^①(School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

^②(School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Sampling and reconstruction is a basic issue in signal processing. The known sampling theory in the FRfractional Fourier Transform (FRFT) domain is based on the analysis of ideal sampling system. The actual Analog-to-Digital conversion is implemented through sample-and-hold circuits. This paper analyzes the actual sample-and-hold system in the FRFT domain, and then makes a feasible sample and reconstruction model. This model can be realized by adding two multipliers to the traditional sample-and-hold system. The result obtained in this paper makes the sampling theorem for the FRFT domain more perfect, and provides the theoretical foundation for practical implementation of sampling theorem in the FRFT domain.

Key words: Signal processing; FRfractional Fourier Transform (FRFT); Sample-and-hold system; Reconstruction

1 引言

采样和重构是信号处理的基本问题, 传统的奈奎斯特采样定理对采样前后的带限信号进行频域分析, 找出二者之间的关系, 从采样后的信号中无失真地重构出原始带限信号。傅里叶变换起到了将信号从时域变换到频域的作用, 但它只能得到信号的整体频谱而无法描述信号的时频局部特性, 这在分析非平稳信号(例如 chirp 信号)时非常不利。为了分析和处理非平稳信号, 人们提出了很多新的信号分析理论: 分数阶傅里叶变换、短时傅里叶变换、Wigner 分布、Gabor 变换等。其中分数阶傅里叶变换作为傅里叶变换的广义形式, 近年来受到了信号处理和通信领域研究学者的关注^[1-9]。

分数阶傅里叶域采样定理也得到了研究^[10-15], 为传统的采样定理做了更为广义的分析, 而且能以低于奈奎斯特采样率处理 chirp 类信号, 然而, 现有的分数阶傅里叶域采样定理针对的是理想均匀冲激串采样, 并不具备工程实用性。实际的 A/D 转换由采样保持电路组成, 输出为零阶保持信号。本文在分数阶傅里叶域对实际采样保持系统进行分析并改进, 给出了从零阶保持信号中恢复原始信号的方法, 为分数阶傅里叶域采样定理的实用化提供了理论基础。

2 理想均匀冲激串采样信号的分数阶傅里叶变换

连续时间分数阶傅里叶变换的定义为^[2]

$$F_{\alpha}[x](u) = X_{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(u, t)x(t)dt \quad (1)$$

其中 α 表示时频平面上绕原点顺时针旋转的角度, $K_{\alpha}(u, t)$ 为核函数, 定义为

2012-11-26 收到, 2013-03-22 改回

国家杰出青年科学基金(60625104)和国家自然科学基金(61201354)

资助课题

*通信作者: 鲁溟峰 lumingfeng@bit.edu.cn

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \exp\left\{j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha\right\}, & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = 2n\pi \pm \pi \end{cases} \quad (2)$$

对模拟信号 $x_c(t)$ 进行周期采样，理想模型将采样步骤简化为周期冲激串与输入信号的乘积。

$$x_s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad (3)$$

在分数阶傅里叶域针对理想采样情况进行了分析，可得 $x_s(t)$ 的分数阶傅里叶变换^[15]为

$$F_\alpha[x_s](u) = X_{s\alpha}(u) = \frac{1}{T} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \left[X_{c\alpha}(u) e^{-j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - n \frac{2\pi \sin \alpha}{T}\right) \right] \quad (4)$$

理想采样的时域和分数阶傅里叶域如图 1 所示。

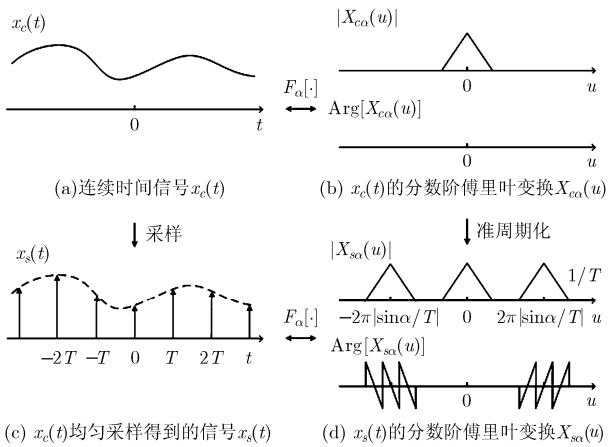


图1 时域采样对分数阶傅里叶域的影响

3 零阶保持信号的分数阶傅里叶变换

实际上，经过工程采样后得到的是零阶保持信号，可表示为^[16]

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)h_0(t-nT) \quad (5)$$

其中 $h_0(t)$ 是零阶保持系统的冲激响应，即

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

采样保持系统可等效为冲激串调制紧跟着零阶保持

系统的线性滤波：

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) = h_0(t) * x_s(t) \quad (7)$$

在傅里叶域已经证明可以从零阶保持信号 $x_0(t)$ 中重构出原始信号 $x_c(t)$ ^[16]，本文考虑在分数阶傅里叶域对零阶保持信号 $x_0(t)$ 进行分析，尝试重构出原始信号 $x_c(t)$ 。如式(7)所示，采样保持系统可以等效为 $x_s(t)$ 和 $h_0(t)$ 的卷积，如果直接对该式进行分数阶傅里叶变换，根据线性卷积的分数阶傅里叶变换性质^[17]，零阶保持信号的分数阶傅里叶变换为

$$X_{0\alpha}(u) = |\sec \alpha| e^{-j\frac{u^2}{2} \tan \alpha} \left[X_{s\alpha}(u) e^{j\frac{u^2}{2} \tan \alpha} * h_0(u \sec \alpha) \right] \quad (8)$$

可见， $X_{0\alpha}(u)$ 不能保持延拓的准周期频谱形状，很难恢复出原始波形 $x_c(t)$ 。

4 修正的采样保持系统及其分数阶傅里叶域描述

由于希望分数阶卷积具有如式(4)所示的卷积形式，从而轻易得到 $X_{c\alpha}(u)$ 的周期或准周期延拓形式，方便信号重构。我们考虑采用另一种分数阶卷积定理^[18]。其定义和性质如下：

$$w(t) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{-j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha} \cdot \left\{ \left[x(t) e^{j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha} \right] * \left[y(t) e^{j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha} \right] \right\} \quad (9)$$

$$W_\alpha(u) = e^{-j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} X_\alpha(u) Y_\alpha(u) \quad (10)$$

对采样保持器的输入和输出分别乘以 $e^{j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha}$ 和 $\sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{-j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha}$ ，如图 2 所示。此时，有

$$\tilde{x}_0(t) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{-j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha} \cdot \left\{ x_s(t) e^{j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha} * h_0(t) \right\} \quad (11)$$

令 $h_0(t) = \tilde{h}_0(t) e^{j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha}$ ，利用分数阶卷积性质，有

$$\tilde{X}_0(u) = e^{-j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} X_{s\alpha}(u) \tilde{H}_{0\alpha}(u) \quad (12)$$

令

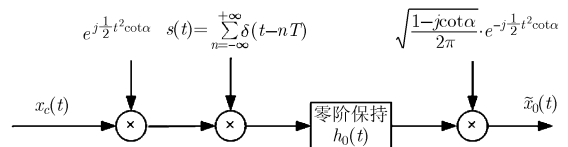


图2 经过修正的采样保持系统

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{0\alpha}(u) &= e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \widetilde{H}_{0\alpha}(u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[h_0(t) e^{-j\frac{1}{2}(t^2+u^2)\cot\alpha} \right] \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{1}{2}(t^2+u^2)\cot\alpha - jut\csc\alpha} dt \\ &= \sqrt{1-j\cot\alpha} H_{0,\pi/2}(u\csc\alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

得到

$$\widetilde{X}_0(u) = \sqrt{1-j\cot\alpha} X_{s\alpha}(u) H_{0,\pi/2}(u\csc\alpha) \quad (14)$$

其中 $H_{0,\pi/2}(u)$ 为矩形信号 $h_0(t)$ 的傅里叶变换, 为 sinc 函数, 所以 $H_{0,\pi/2}(u\csc\alpha)$ 也具有压缩的 sinc 形状, 即

$$H_{0,\pi/2}(u\csc\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T \operatorname{sinc}\left(\frac{T\csc\alpha}{2}u\right) e^{-j\frac{T\csc\alpha}{2}u} \quad (15)$$

则

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_0(u) &= T \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{-j\frac{T\csc\alpha}{2}u} \\ &\quad \cdot X_{s\alpha}(u) \operatorname{sinc}\left(\frac{T\csc\alpha}{2}u\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{-j\frac{T\csc\alpha}{2}u} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \left[X_{c\alpha}(u) e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - n\frac{2\pi\sin\alpha}{T}\right) \right] \\ &\quad \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{T\csc\alpha}{2}u\right) \\ &= \sqrt{\frac{|\csc\alpha|}{2\pi}} e^{j\left[\frac{k\pi-\pi/2+\alpha-T\csc\alpha u}{2}\right]j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \left[X_{c\alpha}(u) e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - n\frac{2\pi\sin\alpha}{T}\right) \right] \\ &\quad \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{T\csc\alpha}{2}u\right) \end{aligned} \quad (16)$$

经过修正的采样保持系统中各部分信号的分数阶傅里叶变换域频谱如图 3, 图 4 所示。

由上面的推导可以看出, 在分数阶傅里叶变换域, 修正的采样保持系统中的输出信号在分数阶傅里叶变换域是原输入信号的周期复制版本, 复制周期是 $2\pi|\sin\alpha/T|$, 只是幅度谱复制时受到 sinc 函数的调制。

5 分数阶傅里叶域带通信号采样定理

如果 $x_c(t)$ 为定义在分数阶傅里叶域上的带通信号, 即

$$X_{c\alpha}(u) = 0, \quad \Omega_l < |u| < \Omega_h \quad (17)$$

其中 $\Omega_w = \Omega_h - \Omega_l$ 为带通信号 $x_c(t)$ 的在分数阶傅里叶域下的带宽, 信号的分数阶傅里叶变换域频谱如图 5(a)所示。

对 $x_c(t)$ 进行理想均匀冲激串采样, 为了避免采样后的信号 $x_s(t)$ 在分数阶傅里叶域上出现混叠, 如图 5(b)所示, 需满足分数阶傅里叶域带通信号的采样定理^[15]:

$$\begin{cases} \frac{2\Omega_h|\csc\alpha|}{N} \leq \Omega_s \leq \frac{2\Omega_l|\csc\alpha|}{N-1}, & N \neq 1 \\ \Omega_s \geq 2\Omega_h|\csc\alpha|, & N = 1 \end{cases} \quad (18)$$

其中 N 满足 $1 \leq N \leq \operatorname{int}[\Omega_h/\Omega_w]$, $\Omega_s = 2\pi/T$ 为采样率。

如图 5(b)所示, 假设在 $[-\Omega_l, \Omega_l]$ 之间最多存在 $N_{\max} - 1$ 对频谱, 且互不混叠, 需要满足^[19]:

$$(N_{\max} - 1) \cdot 2\Omega_w \leq 2\Omega_l \quad (19)$$

则, 带通信号上截止频率可表示为带宽的整数部分和小数部分:

$$\Omega_h = N_{\max}\Omega_w + K\Omega_w \quad (20)$$

其中 $N_{\max} = \operatorname{int}[\Omega_h/\Omega_w]$, $0 \leq K < 1$ 。

当采样率取最小值 $\Omega_{ws\min}$, 可得

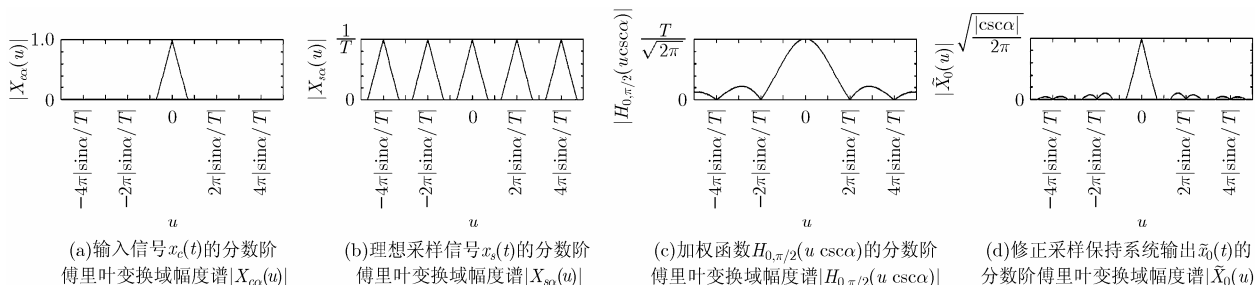


图 3 修正的采样保持系统的分数阶傅里叶变换域幅度谱

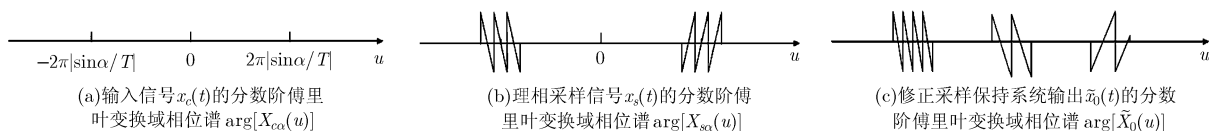


图 4 修正的采样保持系统的分数阶傅里叶变换域相位谱

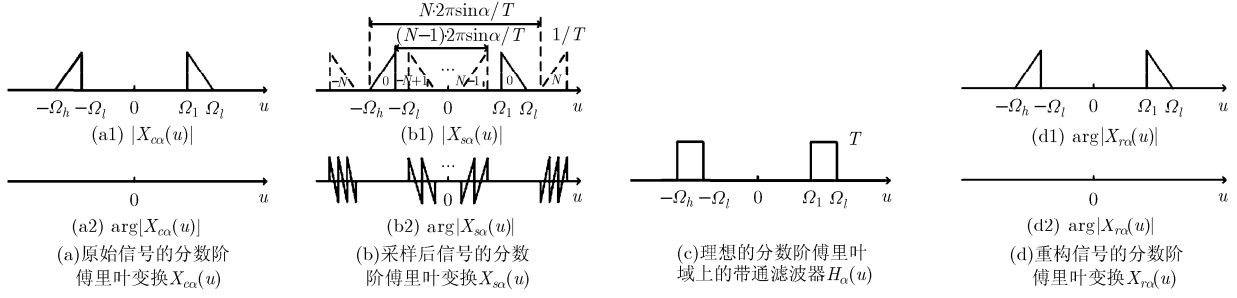


图 5 重构的信号

$$\Omega_s \min = 2\Omega_w |\csc \alpha| \left[1 + \frac{K}{N_{\max}} \right] \quad (21)$$

根据式(21)可画出最小采样频率 $\Omega_s \min$ 与带通信号上截止频率 Ω_h 的关系曲线如图 6 所示^[20]。

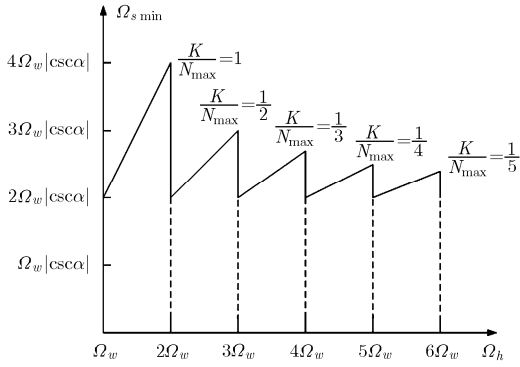


图 6 带通信号最小采样率 $\Omega_s \min$ 和上截止频率 Ω_h 的关系曲线

可以看出，对于分数阶傅里叶域窄带高频信号 ($\Omega_h \gg \Omega_w$)，其最小采样频率近似等于 $2\Omega_w |\csc \alpha|$ 。

采样率 Ω_s 满足带通采样定理时，很明显，设计一个分数阶傅里叶域理想带通滤波器对采样信号 $x_s(t)$ 进行滤波就可恢复出原始信号 $x_c(t)$ ，其数学表述为^[15]

$$\begin{aligned} x_r(t) &= F_{-\alpha} [X_{sa}(u) \cdot H_{\alpha}(u)](t) \\ &= e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{(nT)^2}{2}\cot\alpha} x(nT) \\ &\quad \cdot \frac{T \left[\sin[\Omega_h(t-nT)\csc\alpha] - \sin[\Omega_l(t-nT)\csc\alpha] \right]}{\pi(t-nT)} \end{aligned} \quad (22)$$

该式为分数阶傅里叶域带通信号的重构公式。

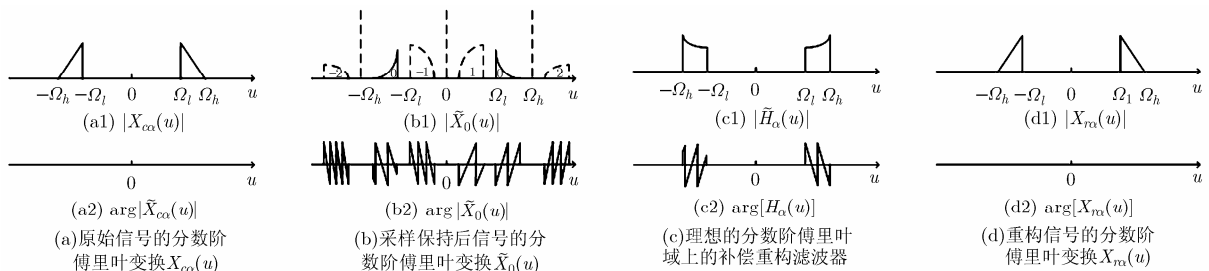


图 7 采样保持系统的信号重构

6 基于分数阶傅里叶变换的采样保持系统的信号重构

分数阶傅里叶域带通信号采样定理讨论了对带通信号 $x_c(t)$ 进行理想采样后的重构方式，现在讨论对带通信号 $x_c(t)$ 经过修正的采样保持系统所输出的零阶保持信号 $\tilde{x}_0(t)$ 中恢复出原始信号 $x_c(t)$ 的方法。

由图 3 可见，在分数阶傅里叶域，零阶保持信号 $\tilde{x}_0(t)$ 的频谱 $\tilde{X}_0(u)$ 与理想采样信号 $x_s(t)$ 的频谱 $X_{sa}(u)$ 在位置分布完全相同，因此式(21)所述的分数阶傅里叶域带通采样定理仍然适用。

由式(16)可知， $\tilde{X}_0(u)$ 受到 $\sqrt{1-j\cot\alpha}$ 和 $H_{0,\pi/2}(u \csc \alpha)$ 的影响而区别于 $X_{sa}(u)$ ，其中 $\sqrt{1-j\cot\alpha}$ 产生固定幅度增减和相位偏移效果，而 $H_{0,\pi/2}(u \csc \alpha)$ 则产生 sinc 形状幅度影响和渐变的相位偏移，如图 7(b)所示。

为了消除幅度和相位影响，从 $\tilde{X}_0(u)$ 中得到原始信号频谱 $X_{sa}(u)$ ，需要设计一个有补偿作用的重构滤波器来取代原有的理想带通滤波器 $H_{\alpha}(u)$ ，如图 7(c)所示。

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\alpha}(u) &= \begin{cases} T \cdot \left[\sqrt{1-j\cot\alpha} \cdot H_{0,\pi/2}(u \csc \alpha) \right]^{-1} & \Omega_l \leq |u| \leq \Omega_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{\text{sinc}\left(\frac{T \csc \alpha}{2} u\right) \sqrt{\csc \alpha}} e^{-j\left[\frac{k\pi-\pi/2+\alpha-T \csc \alpha u}{2}\right]} & \Omega_l \leq |u| \leq \Omega_h \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

利用该滤波器与零阶保持信号的频谱 $\tilde{X}_0(u)$ 相乘, 可得到原始信号的分数阶傅里叶变换 $X_{ca}(u)$, 对其进行分数阶傅里叶逆变换, 得到原始信号 $x_c(t)$ 。至此, 经过修正的采样保持系统所输出的零阶保持信号 $\tilde{x}_0(t)$ 中恢复出原始信号 $x_c(t)$ 的重构手段得证。

7 仿真分析

本节通过仿真分数阶傅里叶域带限信号在采样、保持过程中的频谱变换规律和重构效果, 仿真参数: $\alpha = (0.9/2)\pi$, 采样率 $f_s = 20$ Hz, 信号时间长度为 $[-10$ s, 10 s]。

为方便观测频谱形状变化, 设计一个分数阶傅里叶域带限信号, 其时域的幅度和相位如图 8(a), 8(b)所示, 其分数阶傅里叶域 $X_{ca}(u)$ 如图 8(c), 8(d)

所示, 幅频响应在带内($2\Omega_w = [-7.9015, 7.9015] \times 2\pi$) 平坦, 相频响应始终为 0。图 8(e), 8(f)为经过理想均匀采样时域信号 $x_s(t)$ 的幅度和相位, 其分数阶傅里叶域 $X_{sa}(u)$ 如图 8(g), 8(h)所示, 幅度谱出现了周期延拓现象($\Omega_s = 2\pi f_s |\sin \alpha| = 19.7538 \times 2\pi$), 相位谱则没有周期性。将 $x_c(t)$ 送入经过修正的采样保持系统(如图 2 所示)后, 得到采样量化信号 $\tilde{x}_0(t)$ 如图 8(i), 8(j)所示, 其分数阶傅里叶域 $\tilde{X}_0(u)$ 的分数阶傅里叶域如图 8(k), 8(l)所示, 幅度谱周期延拓和理想采样一致, 但出现了 sinc 包络衰减。图 8(m), 8(n)为具有补偿 sinc 衰减的重构滤波器 $\tilde{H}_\alpha(u)$, 对 $\tilde{X}_0(u)$ 进行滤波可恢复出带限信号 $X_{ca}(u)$ 如图 8(o), 8(p)所示。

8 结论

本文在分数阶傅里叶域对工程采样模型进行了

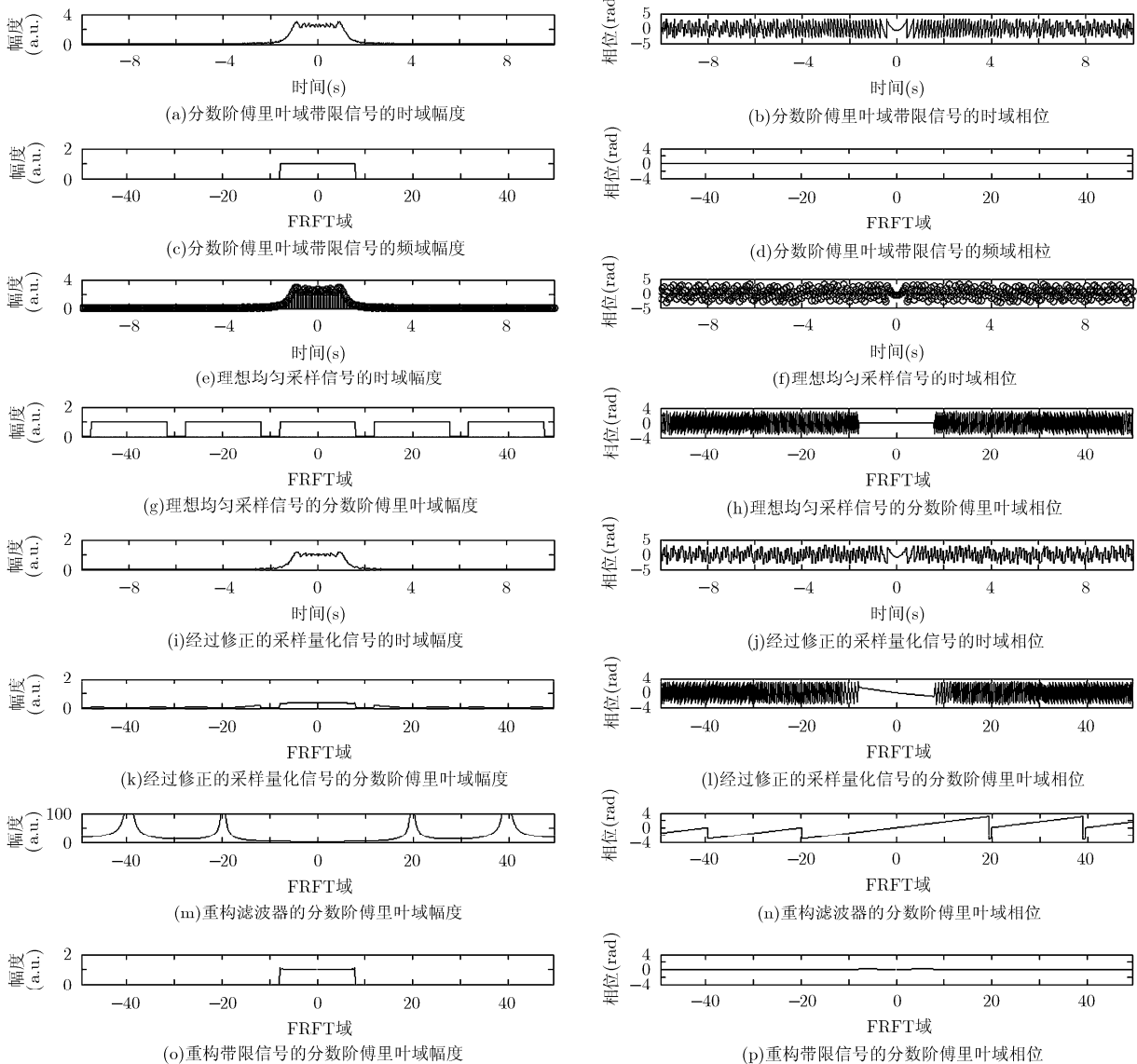


图 8 分数阶傅里叶域带限信号在采样、保持过程中的频谱变换规律和重构效果

分析,得到了分数阶傅里叶域采样保持系统的特点,并根据分数阶傅里叶变换的性质,构建了可以重构的分数阶傅里叶域采样和保持系统,实现了分数阶傅里叶域带限信号的采样保持和重构。以上结论为采样保持系统的傅里叶域分析提供了更为广义的分析手段,进一步完善了分数阶傅里叶域采样理论,为分数阶傅里叶域采样定理的实用化解决了一个关键问题。分数阶傅里叶域采样和重构系统能够以低于奈奎斯特采样率的速率采样和重构 chirp 信号,具有非常好的实用价值。

参考文献

- [1] Ozaktas H M, Zalevsky Z, and Kutay M A. The Fractional Fourier Transform with Application in Optics and Signal Processing[M]. New York: John Wiley & Sons, 2001: 117-183.
- [2] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(11): 3084-3091.
- [3] Mustard D. The fractional Fourier transform and the Wigner distribution[J]. *The Journal of the Australian Mathematical Society, Series B*, 1996, 38(2): 209-219.
- [4] Tao Ran, Meng Xiang-yi, and Wang Yue. Transform order division multiplexing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 598-609.
- [5] Harput S, Evans T, Bubba N, et al. Diagnostic ultrasound tooth imaging using fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2011, 58(10): 2096-2106.
- [6] Wang Qi, Pepin M, Beach R J, et al. SAR-based vibration estimation using the discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2012, 50(10): 4145-4156.
- [7] Sha Xue-jun, Qiu Xin, and Mei Lin. Hybrid carrier CDMA communication system based on weighted-type fractional Fourier transform[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(4): 432-435.
- [8] White P R and Locke J. Performance of methods based on the Fractional Fourier transform for the detection of linear frequency modulated signals[J]. *IET Signal Processing*, 2012, 6(5): 478-483.
- [9] Tao R, Deng B, and Wang Y. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing[J]. *SCIENCE CHINA, Series F: Information Sciences*, 2006, 49(1): 1-25.
- [10] Xia Xiang-gen. On bandlimited signals with fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 3(1): 72-74.
- [11] Erseghe T, Kraniuskas P, and Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(12): 3419-3423.
- [12] Shi Jun, Liu Xiao-ping, Sha Xue-jun, et al. Sampling and reconstruction of signals in function spaces associated with the linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6041-6047.
- [13] Wei De-yun, Ran Qi-wen, and Li Yuan-min. Generalized sampling expansion for bandlimited signals associated with the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(6): 595-598.
- [14] Bhandari A and Zayed A I. Shift-invariant and sampling spaces associated with the fractional Fourier transform domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1627-1637.
- [15] Tao Ran, Deng Bing, Zhang Wei-qiang, et al. Sampling and sampling rate conversion of band limited signals in the fractional Fourier transform domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(1): 158-171.
- [16] Oppenheim A V and Schaffer R W. Discrete-Time Signal Processing[M]. Third Edition, New Jersey: Pearson Education, 2010: 153-237.
- [17] Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1997, 4(1): 15-17.
- [18] Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1998, 5(4): 100-103.
- [19] 李林, 张尔扬, 路军. 信号的直接采样理论[J]. *国防科技大学学报*, 2002, 24(1): 54-58.
Li Lin, Zhang Er-yang, and Lu Jun. Direct sampling theory of signal[J]. *National University of Defense Technology*, 2002, 24(1): 54-58.
- [20] 罗伟雄, 韩力, 原东昌, 等. 通信原理与电路[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1999: 193-194.
Luo Wei-xiong, Han Li, Yuan Dong-chang, et al. *Communication Principle and Circuit*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1999: 193-194.

鲁滨峰: 男, 1978年生, 工程师, 研究方向为电子测量和信号复原。

张峰: 男, 1981年生, 讲师, 研究方向为非平稳信号处理、分数阶 Fourier 变换理论及其应用、数字水印等。

倪国强: 男, 1946年生, 教授, 研究方向为实时图像处理与融合系统设计。