

基于 LU 分解的稀疏目标定位算法

赵春晖* 许云龙 黄辉

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院 哈尔滨 150001)

摘要: 针对基于 orth 的稀疏目标定位算法中 orth 预处理会影响原信号的稀疏性的问题, 该文提出一种基于 LU 分解的稀疏目标定位算法。该算法通过网格化感知区域把目标定位问题转化为压缩感知问题, 并利用 LU 分解法对观测字典进行分解得到新的观测字典。该观测字典有效地满足了约束等距性条件, 同时对观测值的预处理过程不影响原信号的稀疏性, 从而有效地保证了算法的重建性能, 提升了算法的定位精度。实验结果表明, 基于 LU 分解的稀疏目标定位算法的性能远优于基于 orth 的稀疏目标定位算法, 目标的定位精度得到了较大地提升。

关键词: 无线传感器网络; 目标定位; 压缩感知; LU 分解

中图分类号: TP393

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)09-2234-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01527

Localization Algorithm of Sparse Targets Based on LU-decomposition

Zhao Chun-hui Xu Yun-long Huang Hui

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: For the localization algorithm of sparse targets based on orth, the orth preprocessing would affect the sparsity of original signals. A novel localization algorithm of sparse targets based on LU-decomposition is proposed. It translates target localization into compressive sensing issue by using gridding method for sensing area, and then utilizes LU-decomposition to obtain a new observation dictionary, which satisfies effectively the restricted isometry property. Moreover, the sparsity of original signal can not be affected during the preprocessing of data observed, which will ensure the reconstruction performance and improve the localization accuracy. The experimental results show that, compared with the localization algorithm of sparse targets based on orth, the localization algorithm proposed have a much better performance, and the target localization accuracy is excellently improved.

Key words: Wireless Sensor Network (WSN); Target localization; Compressed Sensing (CS); LU-decomposition

1 引言

目前, 无线传感器网络 (Wireless Sensor Network, WSN) 已被人们广泛的用于完成各种不同领域 (如战场侦察、环境监测、物联网等) 的数据采集和传输任务。其中, WSN 的目标定位正日渐成为热门研究课题, 亦是 WSN 走向应用的关键技术之一。然而, 大批廉价的传感器使得网络中节点的计算能力、通信能力、能量等均受到了一定的限制, 也给 WSN 带来了很大的压力。近年来兴起的压缩感知 (Compressive Sensing, CS)^[1-3] 理论为 WSN 带来了新的应用机遇, 通过对感知区域的网格化, 能够把有限个数的目标定位问题, 有效地转化为稀疏目标定位问题, 使压缩感知应用于 WSN 目标定位有了一定的理论依据。这样, 在基于压缩感知的 WSN 目标定位算法中, 传感器节点只需对少量的感知数据进行采样, 同时完成采样和压缩, 从而降低

了对感知器节点的能力要求, 使其简单化。又由于信息融合中心的能量不受限, 并且拥有强大的计算能力, 所以一般将信号的重构放在信息融合中心进行。现阶段, 将压缩感知应用于 WSN 目标定位的问题已成为了一个研究热点。

文献[4]提出了一种基于稀疏变换的定位算法, 然而, 该算法的复杂度太高。文献[5]把 WSN 目标定位问题有效地变换为压缩感知问题, 但是该算法要求每个传感节点都有一个定位字典。文献[6]提出了基于贝叶斯压缩感知的目标定位算法, 该算法在压缩感知的基础上, 有效地节约了感知器节点的能量, 但是却容易产生虚假目标。文献[7-9]提出基于 orth 的稀疏目标定位算法, 把 WSN 多目标定位问题转换为 K 个稀疏度为 1 的 N 维向量重构问题。然而, 为了使观测字典满足约束等距性条件 (Restricted Isometry Property, RIP)^[2], 该算法对观测字典进行了一系列的变换, 在变换过程影响了原稀疏度为 1 的信号的稀疏性, 从而降低了压缩感知的重构性能, 最终影响了目标的定位性能。

2012-11-23 收到, 2013-05-11 改回

国家自然科学基金(61077079)资助课题

*通信作者: 赵春晖 zhaochunhui@hrbeu.edu.cn

文中将压缩感知理论应用于 WSN 的多目标定位中,针对观测字典无法满足 RIP 性质的问题,提出了一种新的目标定位算法——基于 LU 分解的稀疏目标定位算法。该算法通过 LU 分解得到新的观测字典满足了 RIP 性质,并在 LU 分解预处理过程中不影响原稀疏信号的稀疏性,从而确保了算法的重构性能,提升了目标的定位精度。

2 系统模型

假设在一个方形的感知区域内,随机地分布着 M 个位置已知的传感器和 K 个位置未知的目标(目标之间相互独立),将这一方形的区域均匀地划分成 N 个网格,系统模型如图 1 所示。这样,就将目标节点的定位问题转化为基于网格的目标定位问题。为了实现对所有目标的定位,传感器节点首先需要在感知区域内周期性地对每个目标的信号进行接收,然后分别将各自接收到的各个目标的信号强度值发送给融合中心,最后,由融合中心利用基于压缩感知的目标定位算法对目标进行定位,确定目标在网格中的具体位置。

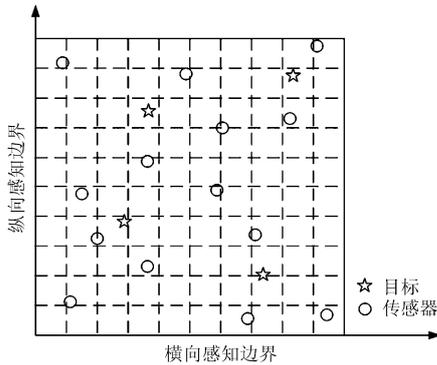


图1 稀疏目标定位模型

由于无线信号强度易受障碍物遮挡、多径传播等环境因素的影响,所以传感器节点接收到的信号强度都会有不同程度的衰减,本文采用 IEEE 802.15.4 标准中的信号衰落模型^[10]如式(1)所示:

$$\text{RSS}(d) = \begin{cases} P_t - 40.2 - 20 \lg d, & d \leq 8 \\ P_t - 58.5 - 33 \lg d, & d > 8 \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\text{RSS}(d)$ 为接收信号强度, d 为信号源所在网格与接收机所在网格的距离, P_t 为信源信号强度。这样第 i 个网格到第 j 个网格的信号接收强度为

$$\text{RSS}(d_{i,j}) = \begin{cases} P_t - 40.2 - 20 \lg d_{i,j}, & d_{i,j} \leq 8 \\ P_t - 58.5 - 33 \lg d_{i,j}, & d_{i,j} > 8 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$ 。第 i 个网格和第 j 个网格中的欧式距离为

$$d_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (3)$$

式中 (x_i, y_i) 为第 i 个网格的坐标, (x_j, y_j) 为第 j 个网格的坐标。

3 orth 定位算法简介

在基于压缩感知的定位模型中,假设第 $k(1 \leq k \leq K)$ 个目标所在网格的序号为 n ,则 K 个目标在网格中的位置可通过 $\mu_{N \times K}$ 矩阵表示如下:

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_k, \dots, \mu_K] \quad (4)$$

式中 μ_k 是一个除了元素 $\mu_k(n)$ 为 1, 其它的元素均为 0 的 $N \times 1$ 的向量。依据压缩感知理论,基于网格的 K 个目标定位问题可以通过式(5)表示:

$$Y = \Phi \Psi \mu + \varepsilon \quad (5)$$

式中 $Y_{M \times K}$ 是观测值, $\Psi_{N \times N}$ 是一个稀疏变换基,可以通过信号传输衰减模型得到 $\Psi_{i,j} = \text{RSS}(d_{i,j})$, 表示的从第 i 个网格到第 j 个网格的信号接收强度, $\Phi_{M \times N}$ 是一个观测矩阵,它的第 $i(1 \leq i \leq M)$ 行元素表示的是第 i 个感知器的位置所在网格的序号,若是在该网格中其为 1, 否则为 0, 即它的每行元素只有一个元素值为 1, 其它全为 0, ε 为高斯白噪声。

由于模型中稀疏变换矩阵和观测矩阵是相关的,因此,由此得到的观测字典无法满足 RIP 性质。为了解决这个问题,文献[7-9]提出了基于 orth 算法的稀疏目标定位算法。该算法首先对信号进行基于 orth 的预处理,然后,再进行信号重建与目标定位。信号预处理过程如式(6)所示:

$$Y' = TY = T(\Phi \Psi \mu + \varepsilon) \quad (6)$$

式中 T 表示一个线性变换算子。令观测字典 $A = \Phi \Psi$, 则有 $T = QA^*$, 其中 $(\cdot)^*$ 表示矩阵的逆变换算子, $Q = \text{orth}(A^T)^T$, $\text{orth}(\cdot)$ 表示的是矩阵列正交变换, $(\cdot)^T$ 表示是矩阵的转置算子。此时,信号观测值 Y' 能够被表示为

$$Y' = TY = Q\mu + \varepsilon' \quad (7)$$

矩阵 Q 是一个正交变换矩阵,能够较好地满足 RIP 性质,从而提高信号的重构性能,最终提升多目标的定位精度。然而,算法在预处理过程中有 $Y' = QA^* A\mu + \varepsilon'$, 令 $\mu' = A^* A\mu$, 则 $Y' = Q\mu' + \varepsilon'$ 。由于观测字典 A 的原子是相关的,因此 $A^* A$ 的非对角线上的元素不为 0。这样, μ' 的稀疏性将会受到影响,最终影响信号的重构性能和目标的定位性能。

基于此,本文提出一种新的预处理方法,该方法通过对观测字典 A 进行 LU 分解,得到新的观测字典,在有效地满足 RIP 性质的同时,不影响原稀疏信号的稀疏性,保证了算法的重构性能和提高了目标的定位精度。

4 基于 LU 分解的稀疏目标定位算法

定理 1 (LU 分解)^[11] 设 $A \in C^{M \times N}$, 则 A 可以唯一地分解为 $A = LU$, 其中 $U \in U_M^{M \times N}$, 且有 $UU^T = I_M$, L 为 $M \times M$ 的正线下三角阵。

因此, 观测字典 A 可以通过进行 LU 分解得到一个 $M \times M$ 的正线下三角阵 L 和一个 $M \times N$ 酉矩阵 U , 如式(8)所示:

$$A = LU \tag{8}$$

其中 U 可以通过对 A 的每一行进行施密特 (Schmidt) 正交化、单位化得到。正交化过程如下:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - \frac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 \\ &\vdots \\ B_M &= A_M - \frac{\langle A_M, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 - \dots - \frac{\langle A_M, B_{M-1} \rangle}{\langle B_{M-1}, B_{M-1} \rangle} B_{M-1} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

式中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示两向量间的内积, A_1, A_2, \dots, A_M 为 A 的行向量, 将其通过 Schmidt 正交化得到 $B_1, B_2, \dots, B_M, B = [B_1^T, B_2^T, \dots, B_M^T]^T$, 且 B_1, B_2, \dots, B_M 为 B 的行向量且相互正交。对矩阵 B 进行行单位化得

$$U = \begin{bmatrix} 1/\|B_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\|B_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\|B_M\| \end{bmatrix} B \tag{10}$$

式中 $\|\cdot\|$ 表示向量的模值。对矩阵 U 进行列单位化, 即可得到新的观测字典 Φ 如式(11):

$$U = \Phi \begin{bmatrix} \|U_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|U_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|U_N\| \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 U_1, U_2, \dots, U_N 为矩阵 U 的列向量。由于 U 的行向量正交, 且 Φ 是通过单位化 U 的列向量得到。由上面分析可知: Φ 是一个部分正交矩阵^[12,13], 即为压缩感知理论中常用的观测字典之一。部分正交矩阵是由一个 $N \times N$ 正交阵中选取 M 行并进行列单位化得到, 显然, 从中选取的 M 个行向量之间亦相互正交。因此, Φ 是完全满足 RIP 性质的。

由于 $UU^T = I_M$, 结合式(8)可得

$$L = AU^T \tag{12}$$

因此, 对观测值 Y 进行下面的变换可得到新的观测值 Y' :

$$Y' = (L)^*Y = (L)^*A\mu = (L)^*LU\mu = U\mu$$

$$= \Phi \begin{bmatrix} \|U_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|U_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|U_N\| \end{bmatrix} \mu = \Phi\mu' \tag{13}$$

通过式(13)可以看出 μ' 能被表示为

$$\mu' = \begin{bmatrix} \|U_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|U_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|U_N\| \end{bmatrix} \mu \tag{14}$$

由于 μ 是稀疏的, 且 μ' 是通过 μ 左乘一个对角矩阵得到, 因此 μ' 也是稀疏的, 且 μ' 与 μ 的稀疏度相同, 又 Φ 是完全满足 RIP 性质的, 因此, 依据压缩感知理论, μ' 能被准确地重构出来。这样, 可得 μ 为

$$\mu = \begin{bmatrix} 1/\|U_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\|U_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\|U_N\| \end{bmatrix} \mu' \tag{15}$$

在基于网格的目标定位模型中, 由于目标常常不是在网格的中心位置, 因此 μ 是一个近似的稀疏信号。为了减小定位误差, 本文将对重建出来的信号的列向量 μ_k 进行归一化, 作为每个网格对第 k 个目标估计位置的权值 $\omega_k(n)$:

$$\omega_k(n) = \mu_k(n) / \sum_{n=1}^N \mu_k(n) \tag{16}$$

式中 $\omega_k(n)$ 为第 n 个网格对第 k 个目标坐标估计的权值大小。最后, 利用加权质心算法^[14-16] 求解出第 k 个目标的位置:

$$(x_k, y_k) = \sum_{n=1}^N \omega_k(n)(x_n, y_n) \tag{17}$$

其中 (x_k, y_k) 表示第 $k(1 \leq k \leq K)$ 个目标的估计位置, (x_n, y_n) 表示第 $n(1 \leq n \leq N)$ 个网格的位置。

通过以上分析, 可得基于 LU 分解的稀疏目标定位算法的框图如图 2 所示, 它主要分为以下 3 个步骤:

- (1) 对信号进行预处理, 得到新的观测字典和观测值;
- (2) 基于新的观测字典和观测值, 使用压缩感知重建算法, 重构出稀疏信号 μ ;
- (3) 利用稀疏信号 μ , 对质心算法进行加权, 得到目标的估计位置。

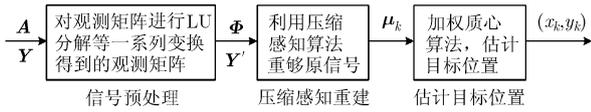


图2 基于LU分解的稀疏目标定位算法的框图

5 实验结果和分析

对文中所提出的基于LU分解的稀疏目标定位算法(本文算法)和基于orth算法的稀疏目标定位算法(对比算法)在Matlab中进行了仿真实验对比,所采用的压缩感知重构算法为BP算法。感知区域设为50m×50m的方形区域,传感器随机分布在感知区域内,并把感知区域划分为20×20的网格。实验中,原观测字典和传感器接收到的目标信号强度均采用文献[10]中IEEE 802.15.4标准的信号衰落模型模拟生成,其中,目标信号发射功率 $P_t = -40$ dBm,噪声为高斯白噪声。

5.1 多目标定位性能的对比

如图3所示是在信噪比SNR为20 dB,传感器个数 $M=8$ 时,对 $K=5$ 个目标进行定位的定位示意图。其中圆圈表示目标的位置,右三角和左三角分别表示对比算法和本文算法的目标估计位置。从图中可以看出:对于全部的5个目标,对比算法估计出的目标中只有2个目标所在网格与目标实际所在网格相同,而本文算法定位出的所有的5个目标位置和目标的实际位置均在同一个网格。据此,相比于对比算法,本文算法的定位性能更为优越。由于对比算法虽然使观测字典满足了RIP性质,但其在对信号进行orth预处理过程中,影响了原信号的稀疏性,从而影响了算法的性能。而本文算法既保证了观测字典满足RIP性质,又不影响原信号的稀疏性。因此,本文算法有更为优越的定位性能。

在其它条件不变的情况下,把目标个数增加到20个,得到图4所示的目标定位示意图。由图4可以发现,本文算法对大部分目标的重构误差都很小,

而对比算法对于有些目标的定位误差非常大。因此,本文算法的定位性能依然远优于对比算法,且本文算法对于目标个数的适应性更强。

5.2 测量次数对定位性能的影响

图5描述的是在信噪比SNR为20 dB,目标个数 $K=5$ 时,目标的平均定位误差随传感器个数 M 变化的曲线。由图可知,两种算法的定位误差均随着 M 的增加而减少,但是本文算法的平均定位误差要远低于对比算法。本文算法在传感器个数 $M \geq 6$ 时,估计出的目标位置与实际位置就已非常接近,此时的目标定位误差都接近于0.5 m。然而,对比算法必须在传感器个数 $M \geq 12$ 时,才有目标估计位置接近于实际位置,但其定位误差仍大于1 m。即在同样的定位性能要求下,相比于对比算法,本文算法需要的传感器更少,也就是说,本文算法在目标定位过程中需要传输的信息总量更少,计算量也更少,能量消耗也 smaller。

5.3 噪声对定位性能的影响

图6是在传感器个数 $M=8$,目标个数 $K=5$ 时,目标的平均定位误差随信噪比SNR变化的定位性能图。由图6可以看到,两种算法的定位误差均随着信噪比的增加而减少,但是本文算法的平均定位误差依然要远低于对比算法。由图6还可以发现:即使在信噪比等于0时,本文算法的平均定位误差也只有2.3 m左右,而对比算法即使在信噪比大于20 dB时,平均定位误差仍然大于3 m。因此,本文算法在较为恶劣的感知环境中,仍然能保持较好的定位性能,亦即本文算法具有更强的抗噪性、鲁棒性。

6 结论

本文把WSN多目标定位问题转换为了 K 个稀疏度为1的 N 维向量重构问题,并针对观测字典不满足RIP性质的问题,提出了一种新的目标定位算法——基于LU分解的稀疏目标定位算法。该算法

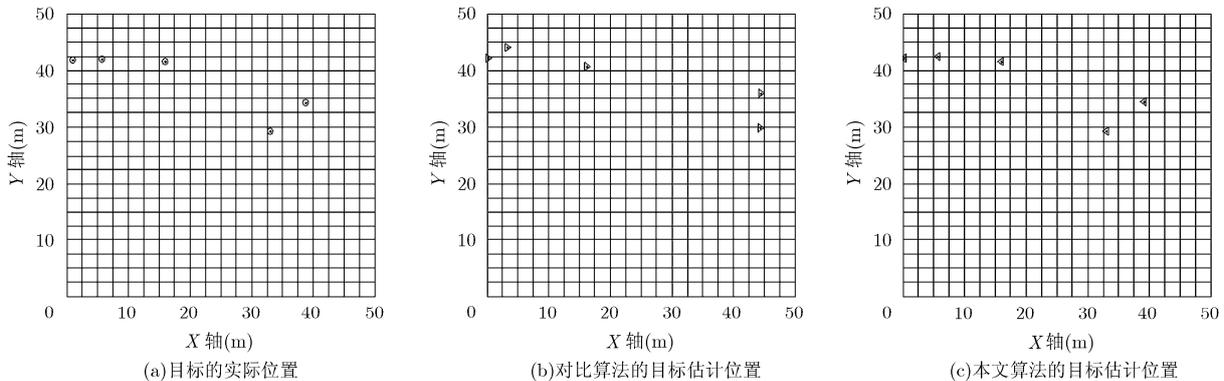


图3 目标定位图($K=5$)

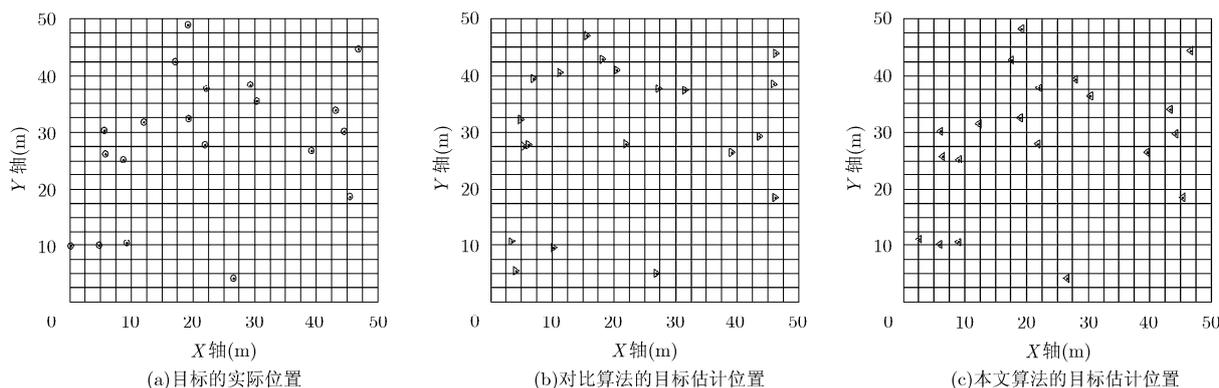
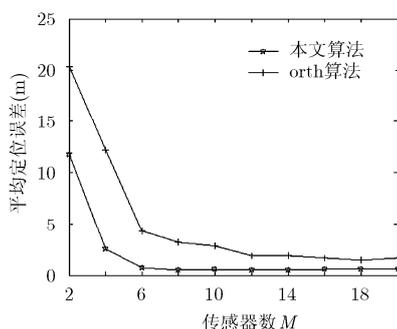
图 4 目标定位图($K=20$)

图 5 定位性能与传感器个数关系图

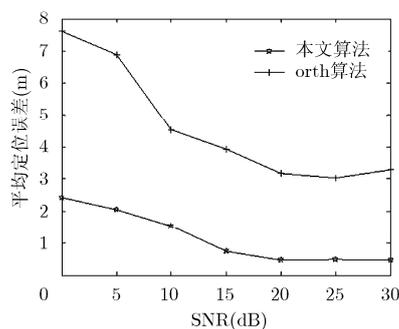


图 6 定位性能与信噪比关系图

通过 LU 分解得到新的观测字典, 完全地满足了 RIP 性质。不同于基于 orth 算法的稀疏目标定位算法, 文中算法的信号预处理过程不会影响原信号的稀疏性, 从而确保了压缩感知重建算法的性能, 提高了多目标定位算法的性能。实验结果表明, 基于 LU 分解的稀疏目标定位算法的定位精度远优于基于 orth 算法的稀疏目标定位算法, 且本文算法具有更好的抗噪性、适应性。此外, 在对信号的预处理过程中, 算法的计算量主要体现在矩阵的逆运算中, 基于 LU 分解的稀疏目标定位算法逆运算矩阵为 $L_{M \times M}$, 而基于 orth 算法的稀疏目标定位算法进行逆运算的矩阵为 $A_{M \times N}$, 由于 $M \ll N$, 因此基于 LU 分解的稀疏目标定位算法的计算量要远小于基于 orth 算法的稀疏目标定位算法, 即基于 LU 分解的稀疏目标定位算法的预处理过程比基于 orth 算法的稀疏目标定位算法的更简单。

参考文献

- [1] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Candès E and Plan Y. A probabilistic and RIP less theory of compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(11): 7235-7254.
- [3] 金坚, 谷源涛, 梅顺良. 压缩采样技术及其应用[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(2): 470-475.
- [4] Jin Jian, Gu Yuan-tao, and Mei Shun-liang. An introduction to compressive sampling and its applications[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(2): 470-475.
- [5] Malioutov D, Cetin M, and Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010-3022.
- [6] Cevher V, Duarte M F, and Baraniuk R G. Distributed target localization via spatial sparsity[C]. Proceedings of the European Signal Processing Conference, Lausanne, Switzerland, Aug. 25-29, 2008: 25-29.
- [7] 赵春晖, 许云龙. 能量约束贝叶斯压缩感知检测算法[J]. *通信学报*, 2012, 33(10): 1-6.
- [8] Zhao Chun-hui and Xu Yun-long. Energy constraint Bayesian compressive sensing detection algorithm[J]. *Journal on Communications*, 2012, 33(10): 1-6.
- [9] Chen Feng, Valaee S, and Tan Zhen-hui. Multiple target localization using compressive sensing[C]. IEEE Global Communications Conference, Honolulu, HI, USA, Nov. 30-Dec. 4, 2009: 1-6.
- [10] Chen Feng, Wain Sy Anthea Au, Valaee S, et al. Received signal strength based indoor positioning using compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2012, 11(12): 1983-1993.

- [9] Wain Sy Anthea Au, Chen Feng, Valace S, *et al.* Indoor tracking and navigation using received signal strength and compressive sensing on a mobile device[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2012, DOI: 10.1109/TMC.2012.175.
- [10] IEEE standard online resource provided by IEEE 802.15 WPAN[S]. <http://www.ieee802.org/15/pub/TG4.html>, 2009.
- [11] 卜长江, 罗跃生. 矩阵论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2008: 83-85.
Bu Chang-jiang and Luo Yue-sheng. Matrix Theory[M]. Harbin: Harbin Engineering University Press, 2008: 83-85.
- [12] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. [博士学位], 北京交通大学, 2010: 5-15.
Li Xiao-bo. Research on Measurement Matrix Based on Compressed Sensing[D]. [Ph.D. dissertation], Beijing Jiaotong University, 2010: 5-15.
- [13] Candès E and Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies?[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [14] Bulusu N, Heidemann J, and Estrin D. GPS-less low cost outdoor localization for very small devices[J]. *IEEE Personal Communications Magazine*, 2000, 7(5): 28-34.
- [15] Wang Jun, Urriza P, Han Yu-xing, *et al.* Weighted centroid localization algorithm: theoretical analysis and distributed implementation[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2011, 10(10): 3403-3413.
- [16] 杨新宇, 孔庆茹, 戴湘军. 一种改进的加权质心定位算法[J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(8): 1-4.
Yang Xin-yu, Kong Qing-ru, and Dai Xiang-jun. An improved weighted centroid location algorithm[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2010, 44(8): 1-4.
- 赵春晖: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为数字信号和图像处理、通信信号处理、感知网络.
- 许云龙: 男, 1988年生, 博士生, 研究方向为压缩感知、无线传感器网络.
- 黄辉: 女, 1985年生, 博士生, 研究方向为认知无线电、网络安全定位.