

部分均匀环境中存在干扰时机载雷达广义似然比检测

刘维建^{*①②} 谢文冲^② 王永良^②

^①(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

^②(空军预警学院重点实验室 武汉 430019)

摘要: 针对部分均匀环境中存在干扰时的机载雷达检测问题, 该文提出一步广义似然比(1S-GLRT)和两步GLRT(2S-GLRT)检测器。基于上述检测器, 在小训练样本情况下进一步提出了降秩 GLRT(RR-GLRT)和对角加载 GLRT(DL-GLRT)。新检测器均能有效地抑制干扰并实现目标检测, 在小训练样本情况下 RR-GLRT 和 DL-GLRT 比 1S-GLRT 和 2S-GLRT 具有更好的检测性能。1S-GLRT 和 2S-GLRT 均具有恒虚警(CFAR)特性, RR-GLRT 和 DL-GLRT 具有渐近 CFAR 特性。最后通过计算机仿真验证了所提多通道空时自适应检测器的有效性。

关键词: 多通道信号检测; 干扰; 广义似然比; 部分均匀环境; 对角加载; 降秩

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)08-1820-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01492

Generalized Likelihood Ratio Test for Airborne Radar with Jamming in Partially Homogeneous Environments

Liu Wei-jian^{①②} Xie Wen-chong^② Wang Yong-liang^②

^①(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

^②(Key Research Lab, Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

Abstract: The one-Step Generalized Likelihood Ratio Test (1S-GLRT) and two-Step GLRT (2S-GLRT) are proposed for the problem of adaptive detection for airborne radar with jamming in partially homogeneous environments. Basing on these detectors, the Reduced-Rank GLRT (RR-GLRT) and Diagonally Loaded (DL-GLRT) are introduced in the situation of low sample support. All the novel detectors can effectively suppress the jamming and detect the targets. Moreover, if the number of the training data is low, the RR-GLRT and DL-GLRT can achieve higher Probabilities of Detection (PD's) than those of the 1S-GLRT and 2S-GLRT. Both the 1S-GLRT and 2S-GLRT possess the Constant False Alarm Rate (CFAR) property, while the RR-GLRT and DL-GLRT are asymptotically CFAR. The effectivity of the novel multichannel space-time adaptive detectors is verified with computer simulation.

Key words: Multichannel signal detection; Jamming; Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT); Partially homogeneous environments; Diagonal loading; Rank reduction

1 引言

多通道信号检测问题一直是雷达领域研究的一个重点和难点^[1]。在各种假设下, 不同的检测器被不断提出, 包括: Kelly 的广义似然比检测器 (Generalized Likelihood Ratio Test, Kelly's GLRT)^[2], 自适应匹配滤波器 (Adaptive Matched Filter, AMF)^[3, 4], Rao 检测器^[5]和 Wald 检测器^[6]。上述检测器均基于均匀环境。机载雷达所面临的杂波环境往往是非均匀的。部分均匀环境是非均匀的

一种^[7], 文献[8]通过实测数据验证了部分均匀环境的假设适用于机载雷达所面临的实际环境。部分均匀环境, 是指待检测单元的协方差矩阵和训练数据的协方差矩阵具有相同的结构, 但具有不同的功率。在此种情况下, 文献[9]提出了 GLRT, 即: 自适应相干估计器 (Adaptive Coherence Estimator, ACE)。

在实际中除了检测环境的非均匀外, 往往还可能存在干扰^[10]。上述检测器均未考虑部分均匀和干扰同时存在情况。针对该问题, 本文提出了部分均匀环境下存在干扰时适用于机载雷达的一步 GLRT (one-Step GLRT, 1S-GLRT) 和两步 GLRT (two-Step GLRT, 2S-GLRT)。另外, 机载雷达所面临的环境复杂多变, 加之往往系统自由度很大, 很难得

2012-11-16 收到, 2013-03-15 改回

国家杰出青年科学基金(60925005)和国家自然科学基金(61102169)

资助课题

*通信作者: 刘维建 liuvjian@163.com

到足够多的独立同分布的训练样本，为此，我们采用降秩技术^[11]和对角加载技术^[12]来设计小训练样本数下的检测器。本文所提出的新检测器能够有效地抑制干扰，并实现目标检测；当训练样本数不足时，降秩检测器和对角加载检测器具有更高的检测概率。另外，本文阐述了各检测器的物理意义，分析了检测器的工作机理。

2 检测模型

假设阵元数为 N_a ，脉冲数为 N_b ，则系统维数为 $N = N_a N_b$ 。假设待检测单元的接收数据为 \mathbf{x} ，并且有 L 个训练样本 $\mathbf{x}_l, l = 1, \dots, L$ 。检测问题可用式(1)所示的二元假设检验表示。

$$\left. \begin{aligned} H_0: \mathbf{x} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{n} \\ H_1: \mathbf{x} &= \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{J}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中，矩阵 \mathbf{H} 和 \mathbf{J} 均列满秩，其维数分别为 $N \times s$ 和 $N \times r$ ，并且增广矩阵 $[\mathbf{H}, \mathbf{J}]$ 也列满秩，即 $s + r \leq N$ 。 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 分别为信号和干扰在各自坐标系下的坐标。 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_c + \mathbf{n}_0$ ， \mathbf{n}_c 为杂波， \mathbf{n}_0 为热噪声。待检测单元数据的杂波加噪声协方差矩阵为 $\mathbf{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \sigma^2 \mathbf{R}$ ，训练样本中数据的协方差矩阵为 $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^H\} = \mathbf{R}$ 。物理量 σ^2 表征了待检测单元协方差矩阵与训练样本协方差矩阵的功率失配，即所谓的部分均匀环境。当 $\sigma^2 = 1$ 时退化为均匀环境。 \mathbf{H} 和 \mathbf{J} 假设已知，但 $\boldsymbol{\phi}$ ， $\boldsymbol{\theta}$ ， σ^2 和 \mathbf{R} 未知。

值得注意的是模型式(1)具有广泛的适用性，当 $s = 1$ 时，矩阵 \mathbf{H} 变为列向量，此时信号导向矢量确知；当 $s = N$ 时，矩阵 \mathbf{H} 变为非奇异方阵，对应于信号导向矢量未知，位于整个空间中。

3 两种新检测器

3.1 1S-GLRT

1S-GLRT 可用下式表示^[1]

$$\frac{\max_{\boldsymbol{\theta}} \max_{\boldsymbol{\phi}} \max_{\sigma^2} \max_{\mathbf{R}} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{\max_{\boldsymbol{\phi}} \max_{\sigma^2} \max_{\mathbf{R}} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{X})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma \quad (2)$$

其中 $f_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ 为待检测单元数据 \mathbf{x} 和训练样本数据 \mathbf{X} 在 H_τ ($\tau = 0, 1$) 下的联合概率密度函数， γ 为满足某虚警概率(Probability of False Alarm, PFA)所需的检测门限。

在 H_τ 下， \mathbf{x} 和 \mathbf{X} 的联合概率密度函数为

$$f_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \frac{\text{etr}(-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}) \cdot \exp(-\mathbf{x}_\tau^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau / \sigma^2)}{\pi^{N(L+1)} \sigma^{2N} |\mathbf{R}|^{L+1}} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} - \tau \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{J}\boldsymbol{\phi}$ 。取式(3)关于 σ^2 的导数并令其为零，得到 σ^2 的最大似然估计(Maximum Likelihood Estimate, MLE)为

$$\hat{\sigma}^2 = \mathbf{x}_\tau^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau / N \quad (4)$$

把式(4)代入式(3)式得

$$f_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \hat{\sigma}^2) = \frac{e^{-N} N^N \pi^{-N(L+1)} \text{etr}(-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S})}{(\mathbf{x}_\tau^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau)^N |\mathbf{R}|^{L+1}} \quad (5)$$

对式(5)取对数，然后求其关于 \mathbf{R} 的导数，并令其为零，得到

$$(L+1)\mathbf{R} = \mathbf{S} + N \cdot \mathbf{x}_\tau \mathbf{x}_\tau^H / \mathbf{x}_\tau^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau \quad (6)$$

对式(6)左乘 \mathbf{R}^{-1} ，右乘 $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau$ ，得到

$$(L+1)\mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau + N \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau \quad (7)$$

对式(7)左乘 $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}$ ，得到

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_\tau = (L - N + 1)^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_\tau \quad (8)$$

把式(8)代入式(6)得到 \mathbf{R} 的 MLE 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L+1} \left[\mathbf{S} + \frac{N \cdot \mathbf{x}_\tau \mathbf{x}_\tau^H}{(L - N + 1) \mathbf{x}_\tau^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_\tau} \right] \quad (9)$$

由式(9)得

$$\mathbf{R}^{-1} = (L+1) \left[\mathbf{S}^{-1} - \frac{N \cdot \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_\tau \mathbf{x}_\tau^H \mathbf{S}^{-1}}{(L+1) \mathbf{x}_\tau^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_\tau} \right] \quad (10)$$

把式(9)和式(10)代入式(5)，并利用公式

$$|\mathbf{A} + \mathbf{a}\mathbf{b}^H| = |\mathbf{A}| (1 + \mathbf{b}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}) \quad (11)$$

得到

$$f_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \hat{\sigma}^2, \hat{\mathbf{R}}) = \frac{c}{(\mathbf{x}_\tau^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_\tau)^N |\hat{\mathbf{R}}|^{L+1}} \quad (12)$$

其中 $c = LN^{N+1}(L - N + 1)^{L-N+1}(L+1)^{(N-1)(L+1)} / (e\pi^{L+1})^N$ 。

把式(12)看作 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 的函数，在 H_1 下，最大化式(12)，等价于最小化式(13)：

$$g(\boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{x} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi})^H \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}) \quad (13)$$

其中 $\mathbf{B} = [\mathbf{H}, \mathbf{J}]$ ， $\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\theta}^H, \boldsymbol{\phi}^H]^H$ 。

取式(13)关于 $\boldsymbol{\varphi}$ 的导数并令其为零，得到 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 MLE 为

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\mathbf{B}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} \quad (14)$$

把式(14)代入式(12)，经过化简后得到

$$\max_{\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \propto [\mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}]^{-1} \quad (15)$$

采用相似的方法，可得到

$$\max_{\mathbf{R}, \boldsymbol{\phi}} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \propto [\mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}]^{-1} \quad (16)$$

用式(15)除以式(16)，得到 1S-GLRT 为

$$t_{1S-GLRT} = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}} \quad (17)$$

3.2 2S-GLRT

2S-GLRT 的设计流程如下：先假设协方差矩阵 \mathbf{R} 已知，据此得到 GLRT，然后把该结果中的 \mathbf{R} 用

采样协方差矩阵代替^[3,4]。

根据上一小节的结论, 可把式(5)看作 θ 和 ϕ 的函数。在 H_1 下, 最大化式(5), 等价于最小化式(18):

$$h(\varphi) = (\mathbf{x} - \mathbf{B}\varphi)^H \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{B}\varphi) \quad (18)$$

其中 $\mathbf{B} = [\mathbf{H}, \mathbf{J}]$, $\varphi = [\theta^H, \phi^H]^H$ 。

取式(18)关于 φ 的导数并令其为零, 得到 φ 的 MLE 为

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{B}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (19)$$

把式(19)代入式(5), 经过化简后得到

$$\begin{aligned} & \max_{\theta, \phi} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \\ & \propto [\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}]^{-1} \quad (20) \end{aligned}$$

采用相似的方法, 可以得到

$$\begin{aligned} & \max_{\phi} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \\ & \propto [\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}]^{-1} \quad (21) \end{aligned}$$

用式(20)除以式(21), 得到假设 \mathbf{R} 已知时的 GLRT, 称为中间状态的 GLRT:

$$t_{\text{GLRT}_R} = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}} \quad (22)$$

易知, 基于训练样本数据的 \mathbf{R} 的 MLE 为 \mathbf{S}/L , 其中 $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H$ 。把 \mathbf{R} 代入式(22), 得到最终的 2S-GLRT。容易验证, 其表达式与式(17)相同, 即 2S-GLRT 与 1S-GLRT 相同。

4 降秩及对角加载检测器

4.1 降秩 GLRT(RR-GLRT)

对机载雷达而言, 其协方差矩阵 \mathbf{R} 的特征值通常由少数杂波对应的大特征值和相对小得多的噪声特征值组成。假设杂波特征值的个数为 n_c , 令 \mathbf{R} 的特征分解为

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_c \mathbf{\Lambda}_{cn} \mathbf{Q}_c^H + \sigma^2 \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^H \quad (23)$$

其中 \mathbf{Q}_c 为对应于杂波子空间的 $N \times n_c$ 维半酉矩阵, \mathbf{Q}_n 为对应于噪声子空间的 $N \times (N - n_c)$ 维半酉矩阵, 即: $\mathbf{Q}_c^H \mathbf{Q}_c = \mathbf{I}_{n_c}$, $\mathbf{Q}_n^H \mathbf{Q}_n = \mathbf{I}_{N-n_c}$, $\mathbf{Q}_n^H \mathbf{Q}_c = \mathbf{0}_{(N-n_c) \times n_c}$ 。 $\mathbf{\Lambda}_{cn}$ 为 $n_c \times n_c$ 维对角矩阵, 其对角元素为杂波加噪声的特征值, σ^2 为噪声特征值。

取式(23)的逆得: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Q}_c \mathbf{\Lambda}_{cn}^{-1} \mathbf{Q}_c^H + \sigma^{-2} \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^H$ 。通常, 杂噪比(Clutter-to-Noise Ratio, CNR)很大, 可达到 30 dB 以上^[13]。因此, 我们得到式(24)的近似:

$$\mathbf{R}^{-1} \approx \sigma^{-2} \mathbf{P}_n \quad (24)$$

其中 $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^H$ 为噪声子空间的正交投影矩阵。

同理, 用式(25)近似采样协方差矩阵的逆:

$$\mathbf{S}^{-1} \approx \sigma_e^{-2} \mathbf{P}_e \quad (25)$$

其中 $\mathbf{P}_e = \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e^H$, \mathbf{U}_e 为 \mathbf{S} 的 $(N - n_c)$ 个小特征值对应的半酉矩阵, σ_e^2 为 \mathbf{S} 的 $(N - n_c)$ 个小特征值的均值。

把式(25)代入式(17), 得到降秩 GLRT (Reduced-Rank GLRT, RR-GLRT)检测器:

$$t_{\text{RR-GLRT}} = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{P}_e \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{P}_e \mathbf{J} (\mathbf{J}^H \mathbf{P}_e \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^H \mathbf{P}_e \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{P}_e \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{P}_e \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{P}_e \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{P}_e \mathbf{x}} \quad (26)$$

值得指出的是, σ_e^2 的选择对式(26)没有影响, 即: RR-GLRT 仅需要噪声子空间的信息, 而不需要噪声特征值的信息, 这是降秩方法往往比常规方法具有更好的性能的主要原因之一。

另外, 需要强调的是, 当 $r + s > N - n_c$ 时, 矩阵 $\mathbf{B}^H \mathbf{P}_e \mathbf{B}$ 不可逆, 此时, $\mathbf{B}^H \mathbf{P}_e \mathbf{B}$ 的逆可以用其任意形式的广义逆来代替。这是由于式(26)分母中第 2 项中的矩阵 $\mathbf{P}_{P_e B} \triangleq \mathbf{P}_e \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{P}_e \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{P}_e$ 为 $\mathbf{P}_e \mathbf{B}$ 的正交投影, 因此, 由正交投影矩阵的性质知, $\mathbf{B}^H \mathbf{P}_e \mathbf{B}$ 逆的选取对其投影矩阵 $\mathbf{P}_{P_e B}$ 没有影响。

4.2 对角加载 GLRT(DL-GLRT)

对角加载的加载量的选取通常高于热噪声的特征值而远小于杂波特征值。因此对角加载不会对杂波造成影响, 但加载量使得原本分散的采样协方差矩阵的小特征值的散布被“压缩”, 从而减少了所需训练样本数。对角加载采样协方差矩阵为

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{S} + \sigma_L^2 \mathbf{I}_N \quad (27)$$

其中 σ_L^2 为加载量。

用式(27)中的 \mathbf{S}_d 代替式(17)中的 \mathbf{S} 得到对角加载 GLRT (Diagonally Loaded GLRT, DL-GLRT)。

$$t_{\text{DL-GLRT}} = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{x}} \quad (28)$$

5 检测器的物理意义及恒虚警特性研究

5.1 GLRT 的 3 种等价形式及物理意义分析

由于 1S-GLRT 和 2S-GLRT 具有相同的表达式, 为叙述方便, 下面统一记作 GLRT。

令 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{H}$, 其中 $\mathbf{S}^{1/2}$ 为 \mathbf{S} 的平方根矩阵, $\mathbf{S}^{-1/2}$ 为 $\mathbf{S}^{1/2}$ 的逆, 则式(17)可以写为

$$t_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{[\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{J}}]}^{\perp} \tilde{\mathbf{x}} \quad (29)$$

其中 \mathbf{P}_B 表示矩阵 \mathbf{B} 对应的正交投影矩阵, \mathbf{P}_B^{\perp} 为 \mathbf{P}_B 的正交补, 即 $\mathbf{P}_B^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_B$ 。

根据矩阵理论, 得到^[14]

$$\mathbf{P}_{[A, B]}^{\perp} = \mathbf{P}_A^{\perp} - \mathbf{P}_{P_A B} \quad (30)$$

式(29)可进一步写为

$$t_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}} / \left(\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{P_J^\perp \tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{x}} \right) \quad (31)$$

式(31)的分子和分母同除以 $\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}}$ ，得到等价的 GLRT 为

$$\tilde{t}_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{P_J^\perp \tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}} \quad (32)$$

其中 $\tilde{t}_{\text{GLRT}} = (t_{\text{GLRT}} - 1) / t_{\text{GLRT}}$ ， $t_{\text{GLRT}} = 1 / (1 - \tilde{t}_{\text{GLRT}})$ 。由于 $\text{span}\{\tilde{\mathbf{H}}\} \subseteq \text{span}\{\tilde{\mathbf{J}}\}$ ，所以 $\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{P_J^\perp \tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}}$ ，因此， $t_{\text{GLRT}} \geq 1$ ，进而得到 $0 \leq \tilde{t}_{\text{GLRT}} \leq 1$ 。

另外，式(29)减去 1，并利用式(30)，得到另一种等价的 GLRT 形式。

$$\tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{P_J^\perp \tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{[\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{J}}]}^\perp \tilde{\mathbf{x}} \quad (33)$$

且

$$\tilde{t}_{\text{GLRT}} = \tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}} / t_{\text{GLRT}} \quad (34)$$

5.2 RR-GLRT 的 3 种等价形式及物理意义分析

式(26)可进一步表示为

$$t_{\text{RR-GLRT}} = \mathbf{x}^H \mathbf{P}_0 \mathbf{x} / \mathbf{x}^H \mathbf{P}_1 \mathbf{x} \quad (35)$$

其中 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_e - \mathbf{P}_{P_J}$ ， $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_e - \mathbf{P}_{P_B}$ 。容易验证 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{P}_1 均为正交投影矩阵。

式(35)可表示为

$$t_{\text{RR-GLRT}} = \mathbf{x}^H \mathbf{P}_0 \mathbf{x} / (\mathbf{x}^H \mathbf{P}_0 \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{P}_2 \mathbf{x}) \quad (36)$$

其中 $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{P_B} - \mathbf{P}_{P_J}$ 。根据式(30)得到： $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{P_0 \mathbf{H}}$ 。对式(36)分子分母同除以 $\mathbf{x}^H \mathbf{P}_0 \mathbf{x}$ ，得到等价的 RR-GLRT。

$$\tilde{t}_{\text{RR-GLRT}} = \mathbf{x}^H \mathbf{P}_{P_0 \mathbf{H}} \mathbf{x} / \mathbf{x}^H \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \quad (37)$$

另外，对式(35)减 1，化简得到等价的 RR-GLRT。

$$\tilde{\tilde{t}}_{\text{RR-GLRT}} = \mathbf{x}^H \mathbf{P}_{P_0 \mathbf{H}} \mathbf{x} / \mathbf{x}^H \mathbf{P}_1 \mathbf{x} \quad (38)$$

5.3 DL-GLRT 的 3 种等价形式及物理意义分析

式(28)与式(17)具有相同的形式，因此，根据式(29)，式(32)和式(33)可以类似地得到 DL-GLRT 的 3 种等价形式：

$$t_{\text{DL-GLRT}} = \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \hat{\mathbf{x}} / \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{J}}]}^\perp \hat{\mathbf{x}} \quad (39)$$

$$\tilde{t}_{\text{DL-GLRT}} = \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{P_J^\perp \hat{\mathbf{H}}} \hat{\mathbf{x}} / \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_J^\perp \hat{\mathbf{x}} \quad (40)$$

$$\tilde{\tilde{t}}_{\text{DL-GLRT}} = \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{P_J^\perp \hat{\mathbf{H}}} \hat{\mathbf{x}} / \hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{J}}]}^\perp \hat{\mathbf{x}} \quad (41)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_d^{-1/2} \mathbf{x}$ ， $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{S}_d^{-1/2} \mathbf{J}$ ， $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{S}_d^{-1/2} \mathbf{H}$ 。

至此，对每种检测器我们都给出了 3 种等价的形式。图 1 给出了 3 种检测器对应的全空间的正交投影划分。

为使文章不太过冗长，下面仅对 GLRT 进行详细分析，RR-GLRT 和 DL-GLRT 可类似地得到相应结论。对照图 1(a)看出，检测器 t_{GLRT} 等价于预白

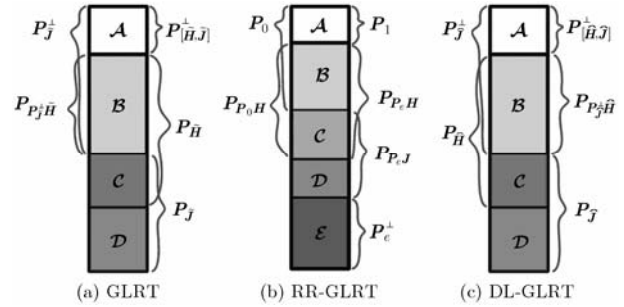


图 1 全空间的投影划分

化后的待检测数据 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在子空间 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 中的能量与 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在子空间 \mathcal{A} 中的能量之比； \tilde{t}_{GLRT} 等价于 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在子空间 \mathcal{B} 中的能量与 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在子空间 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 中的能量之比； $\tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}}$ 等价于 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在子空间 \mathcal{B} 中的能量与 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在子空间 \mathcal{A} 中的能量之比。三者均为能量之比的形式。由于 $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ ， $\mathcal{B} \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ ， $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{A}$ ， $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{B}$ ，因此，从子空间的划分可以得出 $t_{\text{GLRT}} \geq 1$ ， $0 \leq \tilde{t}_{\text{GLRT}} \leq 1$ ， $0 \leq \tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}} \leq +\infty$ 。

另外，根据式(32)，可以把 \tilde{t}_{GLRT} 表示为

$$\tilde{t}_{\text{GLRT}} = \frac{(\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}})^H \left[\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{H}})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{P}_J^\perp \right] \mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}}}{(\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}})^H (\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}})} \quad (42)$$

这即为广义余弦平方的推广形式，即： \tilde{t}_{GLRT} 等价于 $\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}}$ 与 $\text{span}\{\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{H}}\}$ 夹角余弦的平方；可类似地得到， $\tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}}$ 为 $\mathbf{P}_J^\perp \tilde{\mathbf{x}}$ 与 $\text{span}\{\mathbf{P}_{[\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{J}}]}^\perp\}$ 夹角余切的平方。

基于上述分析可以得出如下结论：式(29)为广义余割平方形式；式(32)为广义余弦平方形式；式(33)为广义余切平方形式。

值得指出的是，当不存在干扰时，即 $\text{span}\{\tilde{\mathbf{J}}\} = \emptyset$ ， $\mathbf{P}_J^\perp = \mathbf{I}$ ，式(32)变为

$$\tilde{t}_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \tilde{\mathbf{x}} \quad (43)$$

式(43)在文献[9]中被称为多阶非相干 CFAR 自适应子空间检测器，在文献[15]中被称为自适应子空间检测器。当矩阵 \mathbf{H} 的秩为 1 时，即 $\mathbf{H} = \mathbf{s}$ ，式(43)变为

$$\tilde{t}_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_s \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \tilde{\mathbf{x}} \quad (44)$$

式(44)即为 ACE。

另外，当不存在干扰时，式(33)变为

$$\tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}}^\perp \tilde{\mathbf{x}} \quad (45)$$

当矩阵 \mathbf{H} 的秩为 1 时，即 $\mathbf{H} = \mathbf{s}$ ，式(45)变为

$$\tilde{\tilde{t}}_{\text{GLRT}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_s \tilde{\mathbf{x}} / \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_s^\perp \tilde{\mathbf{x}} \quad (46)$$

可以验证，式(46)所示的检测器与 ACE 等价。

5.4 CFAR 特性研究

GLRT 具有严格的 CFAR 特性，下面对其进行证明。

令 $t = \tilde{x}^H \tilde{x}$ ，则 t 可以写为

$$t = \mathbf{x}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{x}$$

$$= \bar{\mathbf{x}}^H \bar{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \tag{47}$$

易知，在 H_0 下， $\bar{\mathbf{x}}$ 服从均值为 0，自由度为 N ，协方差矩阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}_N$ 的高斯分布； $\bar{\mathbf{S}}$ 服从均值为 0，自由度为 N ，协方差矩阵为 \mathbf{I}_N 的威沙特(Wishart)分布。因此， t 的统计分布均与协方差矩阵 \mathbf{R} 无关，但与 σ^2 有关。根据等式

$$t = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}}^\perp \tilde{\mathbf{x}} \tag{48}$$

得出：在 H_0 下， $\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}}^\perp \tilde{\mathbf{x}}$ 的统计分布与 \mathbf{R} 无关；同理，在 H_0 下， $\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}} \tilde{\mathbf{x}}$ 的统计分布与 \mathbf{R} 无关；二者均与 σ^2 有关。但上述两统计量之比却与 σ^2 无关，因此得出， t_{GLRT} 具有 CFAR 特性。

RR-GLRT 和 DL-GLRT 不具有严格的 CFAR 特性，但采用文献[16,17]中的方法，可以证明二者具有渐近 CFAR 特性。

6 计算机仿真

本文采用标准的蒙特卡洛仿真来评估检测器的检测概率(Probability of Detection, PD)。检测门限和PD分别通过 $100/P_{fa}$ 和 10^4 次蒙特卡洛实验得到。在每次仿真中矩阵 \mathbf{H} 和 \mathbf{J} 随机产生，二者分别为随机正定Hermitian矩阵的前 s 列和后 r 列。 ϕ 取为零均值协方差矩阵为 $\sigma_\phi^2 \mathbf{I}_r$ 的复高斯随机向量。令 θ 为零均值协方差矩阵为 $\sigma_\theta^2 \mathbf{I}_s$ 的复高斯随机向量。

信杂噪比(Signal-to-Clutter-plus-Noise Ratio, SCNR)定义为

$$\text{SCNR} = E_\theta \{ \theta^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \theta \} \tag{49}$$

根据 θ 的统计特性，式(49)可以表示为

$$\text{SCNR} = \sigma_\theta^2 \cdot \text{tr}(\mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \tag{50}$$

为计算方便，假定高斯热噪声的功率为 1，即杂波加噪声的协方差矩阵可以表示为 $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{R}_c$ ，其中 \mathbf{R}_c 为杂波的协方差矩阵，单位阵 \mathbf{I} 为热噪声的协方差矩阵。相应的，干噪比(Jamming-to-Noise Ratio, JNR)可定义为

$$\text{JNR} = \sigma_\phi^2 \cdot \text{tr}\{\mathbf{J}^H \mathbf{J}\} \tag{51}$$

图 2 给出了不同 SCNR 下 GLRT 的 PD。其中 $N_a = 3$ ， $N_p = 4$ ，训练样本数为 $L = 2N$ ，杂噪比 CNR 为 60 dB, JNR=15 dB, PFA 为 10^{-3} 。从图中可以看出，随着干扰子空间维数的增加，检测器的检测性能不断降低。这是由于随着干扰子空间维数的增加，信号能量在干扰子空间中的分量也相应的增加，而这一部分能量被抑制掉。换句话讲，随着干扰子空间的增加，信号能量的损失也越大。

图 3 给出了不同 JNR 下 GLRT 的 PD。其中，SCNR=30 dB, $L = 2N$ ，其它参数和图 2 相同。从图中可以看出，JNR 对检测器的 PD 基本没有影响。其实，这从检测器的表达式中可以看出：检测器利用了干扰子空间信息，而没用到干扰的功率信息。

图4给出了不同训练样本数下GLRT的PD。其

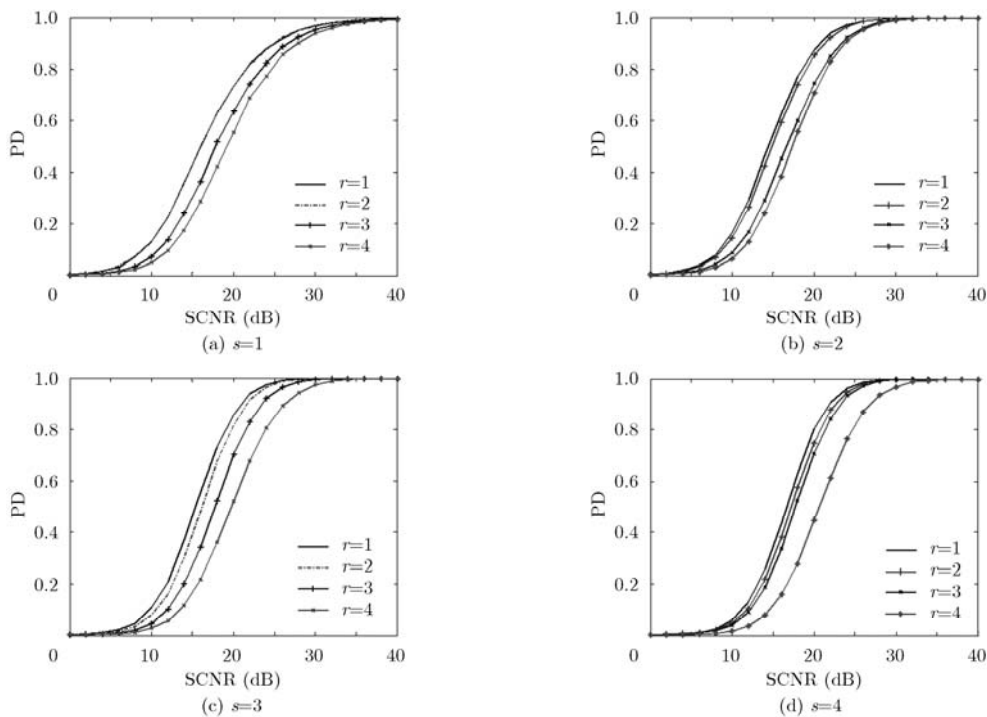


图2 不同SCNR下GLRT的PD

中, SCNR=30 dB, JNR=15 dB, 其它参数和图2相同。可以看出, 检测器的PD随着样本数的增加而提高。

图 5 给出了小训练样本下, GLRT, RR-GLRT 和 DL-GLRT 的检测性能比较。假设雷达阵列工作模式为正侧视, 且杂波脊的空时斜率为 1, 则杂波子空间的维数为: $n_c = N_a + N_p - 1 = 6$ 。本文选取加载量为 $\sigma_l^2 = 8$ dB, 加载量对检测器的具体影响参见文献[13]。从图 5 可以看出, 在小训练样本下, 与 GLRT 相比, RR-GLRT 和 DL-GLRT 均具有更高的检测概率, 并且 DL-GLRT 的检测概率比 RR-GLRT 略高。图 5 中的信号子空间和干扰子空间的维数均选为 1, 当二者维数选取为其它参数时, GLRT, RR-GLRT 和 DL-GLRT 的检测概率之间的关系与图 5 类似。

7 结论

本文提出了部分均匀环境中存在干扰时适用于车载雷达的自适应检测器, 即: 1S-GLRT和2S-GLRT。分析表明二者具有相同的形式; 并且每种检测器均具有如下3种等价形式: 广义余割的平方、广义余弦平方和广义余切的平方。随着SCNR和训练样本数的增加, 检测器的PD均不断增加; 检测器的PD不受干扰功率的影响, 但受到干扰子空间维数的影响; 随着干扰子空间维数的增加, PD不断降低。另外, 本文提出的GLRT是多阶非相干CFAR自适应子空间检测器和ACE的推广。针对小训练样本下的检测问题, 在GLRT的基础上, 提出了RR-GLRT和DL-GLRT, 与GLRT相比, 二者的检测概率均大大提高, 并且DL-GLRT比RR-GLRT具有略高的检测概率。

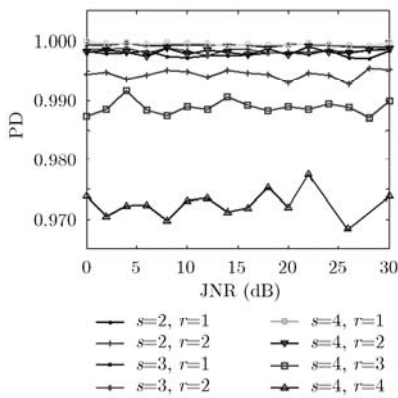


图 3 不同 JNR 下 GLRT 的 PD

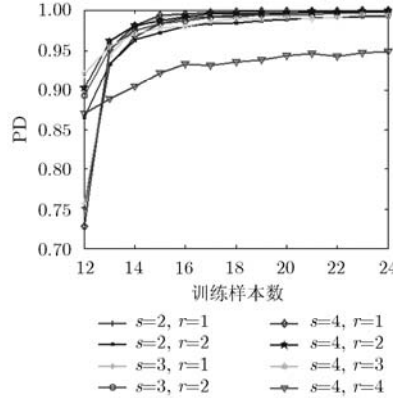


图 4 不同训练样本数下 GLRT 的 PD

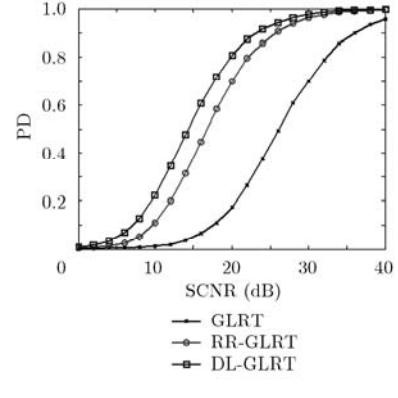


图 5 $L=N$ 时, GLRT, RR-GLRT 和 DL-GLRT 的性能比较

参考文献

[1] 谢洪森, 邹鲲. 一种非均匀场景复合高斯杂波下的自适应检测器[J]. 电子与信息学报, 2012, 33(10): 2433-2437.
Xie Hong-sen and Zou Kun. An adaptive detector in compound gaussian clutter of nonhomogenous environments [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 33(10): 2433-2437.

[2] Kelly E J. An adaptive detection algorithm[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1986, AES-22(1): 115-127.

[3] Robey F C, Fuhrmann D R, Kelly E J, et al. A CFAR adaptive matched filter detector[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(1): 208-216.

[4] Chen W S and Reed I S. A new CFAR detection test for radar [J]. *Digit Signal Processing*, 1991, 1(4): 198-214.

[5] De Maio A. Rao test for adaptive detection in gaussian interference with unknown covariance matrix[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3577-3584.

[6] De Maio A. A new derivation of the adaptive matched filter [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(10): 792-793.

[7] 尚秀芹, 宋红军, 陈倩, 等. 非均匀环境中分布目标的参量广义似然比检测[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(1): 128-133.
Shang Xiu-qin, Song Hong-jun, Chen Qian, et al. Parametric generalized likelihood ratio tests for distributed target in heterogeneous environment[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(1): 128-133.

[8] Conte E, Maio A D, and Ricci G. GLRT-based adaptive detection algorithms for range-spread targets[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(7): 1336-1348.

[9] Kraut S and Scharf L L. The CFAR adaptive subspace detector is a scale-invariant GLRT [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(9): 2538-2541.

[10] 谢文冲, 王永良. 非均匀杂波环境 STAP 方法研究[J]. 自然科学进展, 2007, 17(4): 513-519.
Xie Wen-chong and Wang Yong-liang. Research on STAP in

- nonhomogeneous clutter[J]. *Progress on Natural Science*, 2007, 17(4): 513-519.
- [11] Guerci J R, Goldstein J S, and Reed I S. Optimal and adaptive reduced-rank STAP[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2000, 36(2): 647-663.
- [12] Carlson B D. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1988, 24(4): 397-401.
- [13] 刘维建, 谢文冲, 王永良. 基于对角加载的自适应匹配滤波器和自适应相干估计器[J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(3): 463-468.
- Liu Wei-jian, Xie Wen-chong, and Wang Yong-liang. The adaptive matched filter and adaptive coherence estimation based on diagonal loading[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(3): 463-468.
- [14] Yanai H, Takeuchi K, and Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition[M]. New York: Springer, 2011: 95.
- [15] Liu J, Zhang Z J, Yang Y, *et al.*. A CFAR adaptive subspace detector for first-order or second-order gaussian signals based on a single observation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(11): 5126-5140.
- [16] Ayoub T F and Haimovich A M. Modified GLRT signal detection algorithm[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2000, 36(3): 810-818.
- [17] Abramovich Y I, Spencer N K, and Gorokhov A Y. Modified GLRT and AMF framework for adaptive detectors[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(3): 1017-1051.
- 刘维建: 男, 1982年生, 博士生, 研究方向为空时自适应检测、阵列信号处理.
- 谢文冲: 男, 1978年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为空时自适应处理、机载雷达信号处理.
- 王永良: 男, 1965年生, 博士, 教授, 主要研究方向为机载雷达信号处理、阵列信号处理、空间谱估计.