四元零相关区周期互补序列集构造法

李玉博*　　许成谦　　李　刚　　刘　凯
(燕山大学信息科学与工程学院　秦皇岛　066004)

摘　要：该文分别基于二元零相关区周期互补序列集和二元周期互补序列集做为初始序列，利用逆 Gray 映射构造了四元零相关区周期互补序列集。如果选取的初始序列集参数可以达到理论界限，得到的四元零相关区周期互补序列集接近甚至达到理论界限。零相关区互补序列集相比传统互补序列集具有更多的序列数目，应用到通信系统中可以支持更多的通信用户。

关键词：四元序列；周期互补序列；零相关区；逆 Gray 映射
中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2013)09-2180-07
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01303

Constructions of Quaternary Periodic Complementary Sequence Sets with Zero Correlation Zone

Li Yu-bo　　Xu Cheng-qian　　Li Gang　　Liu Kai
(*College of Information Science* & *Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Based on binary periodic complementary sequence set and binary Zero-Correlation Zone (ZCZ) sequence set, constructions of quaternary periodic complementary sequence sets with zero-correlation zone are proposed by using the inverse Gray mapping. If the initial sequence set is optimal, then the resultant quaternary ZCZ periodic complementary set is optimal or almost optimal with respect to the theoretical bound. ZCZ periodic complementary sets have larger set size compared with the conventional complementary sets, and can support more users in communication systems.

Key words: Quaternary sequence; Periodic Complementary Sequences (PCS); Zero Correlation Zone (ZCZ); Inverse Gray mapping

1　引言

互补序列[1]因其具有理想的相关性能已在通信系统等领域得到广泛应用，例如多载波 CDMA 系统中利用互补序列集作为扩频码以消除干扰，Golay 互补对被应用到 OFDM 系统中降低峰均比(PMEPR)。然而由互补序列集的理论界限可知，一个互补序列集中互补序列个数不超过每个互补序列所包含子序列的数目，这限制了系统中所能容纳的用户数量。为了扩展序列数量，学者们提出了零相关区(ZCZ)周期互补序列集(ZPCS)和 ZCZ 非周期互补序列集(ZACS)[2]。根据 ZCZ 互补序列集的理论界[2]可知，ZCZ 互补序列集与正交互补序列集相比具有更多的序列个数，从而可以增加实际通信系统中的用户数量。相比单码 ZCZ 序列集而言，目前 ZCZ 互补序列集的构造方法还不是很多。文献[3,4]利用单码 ZCZ 序列集通过交织迭代分别构造了 ZCZ 非周期互补序列集和 ZCZ 周期互补序列集。文献[5]通过简单的移位操作构造了二元 ZCZ 周期互补序列集，这种方法得到的序列集中存在子序列移位等价的情况。文献[6]利用交织法构造了具有组间互补性能的 ZCZ 周期互补序列集。文献[7]则基于 ZCZ 周期互补序列集和完备互相关序列构造了组间互补序列集。四元序列在工程应用具有方便实现的优点，因此各种形式的具有良好相关性能的四元序列得到了广泛关注。文献[8]给出了四元 ZCZ 非周期互补序列集的概念，并给出一些构造方法。目前四元 ZCZ 周期互补序列集构造方法还比较少，文献[9,10]利用逆 Gray 映射构造了四元周期互补序列集和四元 ZCZ 周期互补序列集，序列集参数与初始序列集参数相同。文献[11]基于二元周期互补序列集分别构造了二元和四元 ZCZ 周期互补序列集。

本文给出了 4 种四元 ZCZ 周期互补序列集构造方法。前 3 种方法基于二元 ZCZ 周期互补序列集，得到的四元ZCZ周期互补序列集与初始序列集具有

2012-10-02 收到，2013-04-27 改回
国家自然科学基金(61172094，61201263)和河北省自然科学基金(F2012203171)资助课题
*通信作者：李玉博　liyubo6316@ysu.edu.cn

相同的参数。如果选取的初始序列集参数可以达到理论界限，得到的四元零相关区周期互补序列集参数同样达到理论界限。第 4 种方法基于二元周期互补序列集，可以灵活设定四元 ZCZ 周期互补序列集的相关区长度或序列数目等参数，且序列数目是文献[11]结果的 2 倍，应用到通信系统中可以支持更多的用户。

2　基本概念

定义 1[2]　设 $A=\{A_0,A_1,\cdots,A_{M-1}\}$ 表示一个含有 M 个序列的序列集，其中每个序列 $A_m=\{A_{m,0},A_{m,1},\cdots,A_{m,N-1}\}$ 包含 N 个长度为 L 的子序列 $A_{m,n}=(a_{m,n}(0),a_{m,n}(1),\cdots,a_{m,n}(L-1))$。如果序列相关函数满足：

$$\begin{aligned}\varPhi_{A_{m_1},A_{m_2}}(\tau)&=\sum_{n=0}^{N-1}R_{A_{m_1,n},A_{m_2,n}}(\tau)\\&=\begin{cases}NL, & m_1=m_2,\quad \tau=0\\0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}\tag{1}$$

则称序列集 A 为周期互补序列集，表示为 $\mathrm{PCS}(M,N,L)$。式中用 $\varPhi_{A_{m_1},A_{m_2}}(\tau)$ 表示两个互补序列的互相关函数，如果 $m_1=m_2$，则用 $\varPhi_{A_{m_1}}(\tau)$ 表示互补序列的自相关函数。$R_{A_{m_1,n},A_{m_2,n}}(\tau)$ 表示两个子序列的周期互相关函数。

定义 2[6]　对于序列集 A，如果序列相关函数满足：

$$\begin{aligned}\varPhi_{A_{m_1},A_{m_2}}(\tau)&=\sum_{n=0}^{N-1}R_{A_{m_1,n},A_{m_2,n}}(\tau)\\&=\begin{cases}LN, & m_1=m_2,\tau=0\\0, & m_1=m_2,0<|\tau|<Z\\0, & m_1\neq m_2,|\tau|<Z\end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

则称序列集 A 为零相关区(ZCZ)周期互补序列集，表示为 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$。其中 M 表示序列集中 ZCZ 周期互补序列的数目，N 表示每个 ZCZ 周期互补序列包含的子序列数目，L 表示子序列长度，Z 表示零相关区长度。

定义 3[12]　定义一个二元到四元的映射如：$\phi(0,0)=0$，$\phi(0,1)=1$，$\phi(1,1)=2$，$\phi(1,0)=3$。称映射 ϕ 为逆 Gray 映射。

引理 1[12]　设 a_1,a_2,b_1,b_2 是 4 个周期为 L 的二元序列，s_1 和 s_2 是两个周期为 L 的四元序列：$s_1(t)=\phi(a_1(t),b_1(t))$，$s_2(t)=\phi(a_2(t),b_2(t))$。则序列 s_1 和 s_2 的互相函数为

$$\begin{aligned}R_{s_1,\,s_2}(\tau)&=\frac{1}{2}\left[R_{a_1,a_2}(\tau)+R_{b_1,b_2}(\tau)\right]\\&\quad+\frac{\omega}{2}\left[R_{a_1,b_2}(\tau)-R_{b_1,a_2}(\tau)\right]\end{aligned}\tag{3}$$

其中 ω 表示单位圆四次复数根。

引理 2[13]　设 a_i，a_j，b_i，b_j 是周期为 L 的二元序列，L 为奇数。构造两个长度为 $2L$ 的二元序列：

$$s_{i,0}(t)=\begin{cases}a_i(t), & t\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\a_i(t), & t\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

$$s_{j,0}(t)=\begin{cases}a_j(t), & t\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\a_j(t), & t\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

$$s_{i,1}(t)=\begin{cases}b_i(t), & t\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\b_i(t)\oplus 1, & t\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

$$s_{j,1}(t)=\begin{cases}b_j(t), & t\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\b_j(t)\oplus 1, & t\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

其中 $\oplus$ 表示模2相加。有

$$R_{s_{i,0},s_{j,0}}(\tau)=2R_{a_i,a_j}(\tau)\tag{4}$$

$$R_{s_{i,1},s_{j,1}}(\tau)=\begin{cases}2R_{b_i,b_j}(\tau), & \tau\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\-2R_{b_i,b_j}(\tau), & \tau\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}\tag{5}$$

$$R_{s_{i,0},s_{j,1}}(\tau)=R_{s_{i,1},s_{j,0}}(\tau)=0\tag{6}$$

引理 3[13]　利用引理2中的序列构造的四元序列 $q_i(t)=\phi[s_{i,0}(t),s_{i,1}(t)]$，$q_j(t)=\phi[s_{j,0}(t),s_{j,1}(t)]$，$0\le t\le 2L-1$。则有

$$R_{q_i,q_j}(\tau)=\begin{cases}R_{a_i,a_j}(\tau)+R_{b_i,b_j}(\tau), & \tau\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\R_{a_i,a_j}(\tau)-R_{b_i,b_j}(\tau), & \tau\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}\tag{7}$$

3　基于二元 ZCZ 周期互补序列集的构造法

3.1 构造法 1

步骤 1　选取一个二元 ZCZ 周期互补序列集 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$，$B=\{B_0,B_1,\cdots,B_{M-1}\}$，$B_m=\{B_{m,0},B_{m,1},\cdots,B_{m,N-1}\}$，其中 $B_{m,n}=(b_{m,n}(0),b_{m,n}(1),\cdots,b_{m,n}(L-1))$，$L$ 为偶数。

步骤 2　构造四元序列集 $Q=\{Q_0,Q_1,\cdots,Q_{M-1}\}$，$Q_m=\{Q_{m,0},Q_{m,1},\cdots,Q_{m,N-1}\}$，其中

$$Q_{m,n}=(q_{m,n}(0),q_{m,n}(1),\cdots,q_{m,n}(L-1)),$$

$$q_{m,n}(t)=\phi[b_{m,n}(t),b_{m,n}(t+L/2)]\tag{8}$$

定理 1　序列集 Q 是一个四元零相关区周期互补序列集，参数为 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$。

证明　设 $Q_{m_1},Q_{m_2}\in Q$，$0\le m_1,m_2<M$，当

$0 \le |\tau| < Z$ 时，计算相关函数如下：

$$\begin{aligned}
&\Phi_{Q_{m_1},Q_{m_2}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_{Q_{m_1,n},Q_{m_2,n}}(\tau) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau) + \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau)\right] \\
&\quad + \frac{\omega}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}\left(\tau + L/2\right) - \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}\left(\tau - L/2\right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau) \\
&= \begin{cases} NL, & m_1 = m_2,\ \tau = 0(\operatorname{mod} L) \\ 0, & m_1 \ne m_2,\ \tau = 0(\operatorname{mod} L) \\ 0, & 0 < |\tau| < Z \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}$$

由上述过程可知，序列集 Q 是一个四元零相关区周期互补序列集，参数为 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$。 证毕

例 1 下面给出一个利用方法 1 构造四元 ZCZ 周期互补序列集的例子。取一个二元 ZCZ 序列集 $(4,6)\mathrm{PCS}_2^{16}$ 做为初始序列集。

$$\begin{bmatrix} (1111011011111001),(0101110010101100) \\ (0011101000110101),(1001000001100000) \\ (1010001110101100),(0000100111111001) \\ (0110111101100000),(1100010100110101) \end{bmatrix}$$

构造得到参数为 $(4,6)\mathrm{PCS}_2^{16}$ 的四元 ZCZ 周期互补序列集为

$$\begin{bmatrix} (2222133122223113),(1313220031312200) \\ (0022313100221313),(3113000013310000) \\ (2020113320203311),(1111200233332002) \\ (0220333302201111),(3311020211330202) \end{bmatrix}$$

3.2 构造法 2

步骤 1 选取一个二元 ZCZ 周期互补序列集 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$，$B = \{B_0, B_1, \cdots, B_{M-1}\}$，$B_m = \{B_{m,0}, B_{m,1}, \cdots, B_{m,N-1}\}$，其中 $B_{m,n} = (b_{m,n}(0), b_{m,n}(1), \cdots, b_{m,n}(L-1))$。

步骤 2 构造四元序列集 $Q=\{Q_0, Q_1, \cdots, Q_{M-1}\}$，$Q_m = \{Q_{m,0}, Q_{m,1}, \cdots, Q_{m,N-1}\}$，其中

$$Q_{m,n} = (q_{m,n}(0), q_{m,n}(1), \cdots, q_{m,n}(L-1))$$

若 M 为偶数，则

$$q_{m,n}(t) = \begin{cases} \phi\left[b_{2m,n}(t), b_{2m+1,n}(t)\right], & 0 \le m \le M/2-1 \\ \phi\left[b_{2m-M+1,n}(t), b_{2m-M,n}(t)\right], & M/2 \le m \le M-1 \end{cases} \tag{10}$$

若 M 为奇数，则

$$q_{m,n}(t) = \begin{cases} \phi\left[b_{2m,n}(t), b_{2m+1,n}(t)\right], & 0 \le m \le (M-1)/2-1 \\ \phi\left[b_{2m-M+2,n}(t), b_{2m-M+1,n}(t)\right], & (M-1)/2 \le m \le M-2 \\ \phi\left[b_{M-1,n}(t), b_{M-1,n}(t)\right], & m = M-1 \end{cases} \tag{11}$$

定理 2 序列集 Q 是一个四元零相关区周期互补序列集，参数为 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$。

证明 设 $Q_{m_1}, Q_{m_2} \in Q$，当 $0 \le |\tau| < Z$ 时，若 M 为偶数，计算相关函数分以下几种情况：

当 $0 \le m_1, m_2 \le M/2-1$ 时

$$\begin{aligned}
&\Phi_{Q_{m_1},Q_{m_2}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_{Q_{m_1,n},Q_{m_2,n}}(\tau) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1,n},B_{2m_2,n}}(\tau) + \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1+1,n},B_{2m_2+1,n}}(\tau)\right] \\
&\quad + \frac{\omega}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1,n},B_{2m_2+1,n}}(\tau) - \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1+1,n},B_{2m_2,n}}(\tau)\right] \\
&= \begin{cases} NL, & m_1 = m_2,\ \tau = 0(\operatorname{mod} L) \\ 0, & m_1 \ne m_2,\ \tau = 0(\operatorname{mod} L) \\ 0, & 0 < |\tau| < Z \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

当 $M/2 \le m_1, m_2 \le M-1$ 时

$$\begin{aligned}
&\Phi_{Q_{m_1},Q_{m_2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1-M+1,n},B_{2m_2-M+1,n}}(\tau) + \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1-M,n},B_{2m_2-M,n}}(\tau)\right] \\
&\quad + \frac{\omega}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1-M+1,n},B_{2m_2-M,n}}(\tau) - \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1-M,n},B_{2m_2-M+1,n}}(\tau)\right] \\
&= \begin{cases} NL, & m_1 = m_2,\ \tau = 0(\operatorname{mod} L) \\ 0, & m_1 \ne m_2,\ \tau = 0(\operatorname{mod} L) \\ 0, & 0 < |\tau| < Z \end{cases}
\end{aligned} \tag{13}$$

当 $0 \le m_1 \le M/2-1$， $M/2 \le m_2 \le M-1$ 时

$$
\begin{aligned}
\varPhi_{Q_{m_1},Q_{m_2}} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1,n},B_{2m_2-M+1,n}}(\tau) \right.\\
&\quad \left. + \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1+1,n},B_{2m_2-M,n}}(\tau)\right]\\
&\quad + \frac{\omega}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1,n},B_{2m_2-M,n}}(\tau)\right.\\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{N-1} R_{B_{2m_1+1,n},B_{2m_2-M+1,n}}(\tau)\right]\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

若 M 为奇数，证明过程类似。综合上述情况可得结论，序列集 Q 是一个四元零相关区周期互补序列集，参数为 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$。　证毕

例 2　选取与例 1 相同的二元 ZCZ 周期互补序列集做为初始序列集，利用构造法 2 可得参数为 $(4,6)\mathrm{PCS}_2^{16}$ 的四元 ZCZ 周期互补序列集如下：

$$
\begin{Bmatrix}
(3322132033223102),(1302330031203300)\\
(3120112231203300),(1100310233223102)\\
(1122312011221302),(3102110013201100)\\
(1320332213201100),(3300130211221302)
\end{Bmatrix}
$$

3.3 构造法 3

步骤 1　选取一个二元 ZCZ 周期互补序列集 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$，$B=\{B_0,B_1,\cdots,B_{M-1}\}$，$B_m=\{B_{m,0},B_{m,1},\cdots,B_{m,N-1}\}$，其中

$$B_{m,n}=(b_{m,n}(0),b_{m,n}(1),\cdots,b_{m,n}(L-1))$$

步骤 2　构造四元序列集 $Q=\{Q_0,Q_1,\cdots,Q_{M-1}\}$，$Q_m=\{Q_{m,0},Q_{m,1},\cdots,Q_{m,N-1}\}$，其中

$$Q_{m,n}=(q_{m,n}(0),q_{m,n}(1),\cdots,q_{m,n}(L-1))$$

若 M 为偶数，则

$$
q_{m,n}(t)=\begin{cases}
\phi\left[b_{2m,n}(t),b_{2m+1,n}(t)\oplus 1\right],\\
\quad 0\le m\le M/2-1\\
\phi\left[b_{2m-M+1,n}(t),b_{2m-M,n}(t)\oplus 1\right],\\
\quad M/2\le m\le M-1
\end{cases}
\tag{15}
$$

若 M 为奇数，则

$$
q_{m,n}(t)=\begin{cases}
\phi\left[b_{2m,n}(t),b_{2m+1,n}(t)\oplus 1\right],\\
\quad 0\le m\le (M-1)/2-1\\
\phi\left[b_{2m-M+2,n}(t),b_{2m-M+1,n}(t)\oplus 1\right],\\
\quad (M-1)/2\le m\le M-2\\
\phi\left[b_{M-1,n}(t),b_{M-1,n}(t)\oplus 1\right],\\
\quad m=M-1
\end{cases}
\tag{16}
$$

其中 $\oplus$ 表示模 2 相加。

定理 3　序列集 Q 是一个四元零相关区周期互补序列集，参数为 $(M,Z)\mathrm{PCS}_N^L$。

证明过程与定理 2 类似，略去。

例 3　选取与例 1 相同的二元 ZCZ 周期互补序列集做为初始序列集，利用构造法 2 可得参数为 $(4,6)\mathrm{PCS}_2^{16}$ 的四元 ZCZ 周期互补序列集如下：

$$
\begin{Bmatrix}
(2233023122332013),(0213221120312211)\\
(2031003320312211),(0011201322332013)\\
(0033203100330213),(2013001102310011)\\
(0231223302310011),(2211021300330213)
\end{Bmatrix}
$$

4　基于二元周期互补序列集的构造法

4.1 构造法 4

步骤 1　选取一个二元周期互补序列集 $\mathrm{PCS}(M,N,L)$，$B=\{B_0,B_1,\cdots,B_{M-1}\}$，$B_m=\{B_{m,0},B_{m,1},\cdots,B_{m,N-1}\}$，其中 $B_{m,n}=(b_{m,n}(0),b_{m,n}(1),\cdots,b_{m,n}(L-1))$，$L$ 为奇数。

步骤 2　设 $L=M'Z+r$，$0\le r<Z$。构造移位序列集 $E=\{e_0,e_1,\cdots,e_{M'-1}\}$，$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$，其中 $e_{i,0}$，$e_{i,1}\in\{0,1,2,\cdots,L-1\}$。

步骤 3　利用移位序列和序列集 B 构造两个序列集如下：

$$S^0=\left\{S_0^0,S_1^0,\cdots,S_{MM'-1}^0\right\},S^1=\left\{S_0^1,S_1^1,\cdots,S_{MM'-1}^1\right\}$$

其中 $S_k^i=\left\{S_{k,0}^i,S_{k,1}^i,\cdots,S_{k,N-1}^i\right\}$，$S_{k,n}^i=(s_{k,n}^i(0),s_{k,n}^i(1),\cdots,s_{k,n}^i(2L-1))$，$k=mM'+m'$，$0\le m\le M-1$，$0\le m'\le M'-1$，$i=\{0,1\}$。具体构造过程如下：

$$
s_{k,n}^0=\begin{cases}
b_{m,n}(t+e_{m',0}), & t=0(\mathrm{mod}\,2)\\
b_{m,n}(t+e_{m',0}), & t=1(\mathrm{mod}\,2)
\end{cases}
\tag{17}
$$

$$
s_{k,n}^1=\begin{cases}
b_{m,n}(t+e_{m',1}), & t=0(\mathrm{mod}\,2)\\
b_{m,n}(t+e_{m',1})\oplus 1, & t=1(\mathrm{mod}\,2)
\end{cases}
\tag{18}
$$

步骤 4　利用序列集 S^0，S^1 构造两个四元序列集如下：

$$Q^0=\{Q_0^0,Q_1^0,\cdots,Q_{MM'-1}^0\},Q^1=\{Q_0^1,Q_1^1,\cdots,Q_{MM'-1}^1\}$$

其中 $Q_k^i=\{Q_{k,0}^i,Q_{k,1}^i,\cdots,Q_{k,N-1}^i\}$，$Q_{k,n}^i=(Q_{k,n}^i(0),Q_{k,n}^i(1),\cdots,Q_{k,n}^i(2L-1))$，$k=mM'+m'$，$0\le m\le M-1$，$0\le m'\le M'-1$，$i=\{0,1\}$。具体构造过程如下：

$$q_{k,n}^0(t)=\phi\left[s_{k,n}^0(t),s_{k,n}^1(t)\right]\tag{19}$$

$$q_{k,n}^1(t)=\phi\left[s_{k,n}^1(t),s_{k,n}^0(t)\right]\tag{20}$$

将序列集合并得到包含序列数目更多的序列集 $Q=Q^0\cup Q^1$。

定理 4　如果移位序列 $E=\{e_{m'},0\le m'\le M'$

$\le m-1\}$，其中 $e_{m'}=(e_{m',0},e_{m',1})$，满足 $\min\{e_{m_1',0}-e_{m_2',0},e_{m_1',1}-e_{m_2',1}\}\ge Z$ 且 $e_{m_1',1}-e_{m_1',0}\ne e_{m_2',1}-e_{m_2',0}$。其中 $e_{m_1',0}-e_{m_2',0}$ 和 $e_{m_1',1}-e_{m_2',1}$ 都是模 L 运算。$0\le m_1',m_2'\le M'-1$。则序列集 Q 是一个四元 ZCZ 周期互补序列集，参数表示为 $(2MM',Z)\mathrm{PCS}_N^{2L}$。

证明 分下面几种情况讨论。

情况 1: $Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^0\in Q^0$，$k_1=m_1M'+m_1',k_2=m_2M'+m_2'$，$0\le m_1$，$m_2\le M-1$，$0\le m_1'$，$m_2'\le M'-1$，计算相关函数，由引理 3 可得

$$\Phi_{Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^0}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}R_{Q_{k_1,n}^0,Q_{k_2,n}^0}(\tau)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',0}-e_{m_1',0})\\ \displaystyle\quad+\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',1}-e_{m_1',1}),\\ \quad\tau=0(\mathrm{mod}\,2)\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',0}-e_{m_1',0})\\ \displaystyle\quad-\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',1}-e_{m_1',1}),\\ \quad\tau=1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}\tag{21}$$

由移位序列满足条件 $\min\{e_{m_1',0}-e_{m_2',0},e_{m_1',1}-e_{m_2',1}\}\ge Z$ 可得，当 $m_1'\ne m_2'$，$0\le\tau<Z$ 时，有 $\tau+e_{m_2',0}-e_{m_1',0}\ne 0(\mathrm{mod}\,L)$，$\tau+e_{m_2',1}-e_{m_1',1}\ne 0(\mathrm{mod}\,L)$。由互补序列性能可知此时有 $\Phi_{Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^0}(\tau)=0$。当 $m_1'=m_2'$，$0\le\tau<Z$ 时，

$$\Phi_{Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^0}(\tau)=\begin{cases}2NL, & m_1=m_2,\ \tau=0(\mathrm{mod}\,L)\\ 0, & m_1\ne m_2,\ \tau=0(\mathrm{mod}\,L)\\ 0, & 0<|\tau|<Z\end{cases}\tag{22}$$

情况 2: $Q_{k_1}^0\in Q^0$，$Q_{k_2}^1\in Q^1$，$k_1=m_1M'+m_1'$, $k_2=m_2M'+m_2'$，$0\le m_1,m_2\le M-1$，$0\le m_1',m_2'\le M'-1$，计算相关函数

$$\Phi_{Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^1}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}R_{Q_{k_1,n}^0,Q_{k_2,n}^1}(\tau)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\omega\Bigg[\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',0}-e_{m_1',0})\\ \displaystyle\quad-\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',1}-e_{m_1',1})\Bigg],\\ \quad\tau=0(\mathrm{mod}\,2)\\ \displaystyle\omega\Bigg[\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',0}-e_{m_1',0})\\ \displaystyle\quad+\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau+e_{m_2',1}-e_{m_1',1})\Bigg],\\ \quad\tau=1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}\tag{23}$$

由移位序列满足条件 $\min\{e_{m_1',0}-e_{m_2',0},e_{m_1',1}-e_{m_2',1}\}\ge Z$ 可得，当 $m_1'\ne m_2'$，$0\le\tau<Z$ 时，有 $\tau+e_{m_2',0}-e_{m_1',0}\ne 0(\mathrm{mod}\,L)$，$\tau+e_{m_2',1}-e_{m_1',1}\ne 0(\mathrm{mod}\,L)$。由互补序列性能可知此时有 $\Phi_{Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^1}(\tau)=0$。当 $m_1'=m_2'$，$0\le\tau<Z$ 时

$$\Phi_{Q_{k_1}^0,Q_{k_2}^1}(\tau)=\begin{cases}0, & \tau=0(\mathrm{mod}\,2)\\ \displaystyle 2\omega\sum_{n=0}^{N-1}R_{B_{m_1,n},B_{m_2,n}}(\tau), & \tau=1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$
$$=0\tag{24}$$

情况 3: $Q_{k_1}^1,Q_{k_2}^1\in Q^1$，证明同情况 1 类似。综合上述情况可得序列集 Q 是一个四元 ZCZ 周期互补序列集。 证毕

例 4 选取二元周期互补序列集 $\mathrm{PCS}(2,4,7)$ 如下：

$$\begin{Bmatrix}(1000000),(1110000),(1100100),(1010100)\\ (0000111),(1111110),(0010101),(1101100)\end{Bmatrix}$$

设定零相关区长度 $Z=3$，构造移位序列 $E=\{(0,3),(3,0)\}$，利用构造法 4 得到参数为 $(8,4)\mathrm{PCS}_3^{14}$ 的四元 ZCZ 周期互补序列集如下：

$$\begin{Bmatrix}(31011102010001),(32311012320010),(33012002210311),(30312112120300)\\ (11013100013201),(10113230100232),(13012200210331),(12112130300302)\\ (00103231101232),(23222313233320),(00303121121203),(23022003213311)\\ (02321011323010),(23202333231322),(02121121303003),(23002203211331)\\ (13033302030003),(12133032120030),(11032002230133),(10132332320100)\\ (33031300030203),(30331210300212),(31032200230113),(32332310100102)\\ (00301213303212),(21222131211120),(00101323323201),(21022001231133)\\ (02123033121030),(21202111213122),(02323323101001),(21002201233113)\end{Bmatrix}$$

5　四元 ZCZ 周期互补序列集性能分析

本文构造法 $1, 2, 3$ 构造的四元 ZCZ 周期互补序列集参数与初始序列集相同，所以当选取的初始序列集参数达到理论界限时，构造的四元 ZCZ 周期互补序列集参数同样达到理论界限。本文构造法 4 构造了序列集参数如相关区长度和序列数目可以灵活设定的四元 ZCZ 周期互补序列集。构造法 4 利用参数为 $\mathrm{PCS}(M, N, L)$ 的初始二元周期互补序列集得到了四元零相关区周期互补序列集 $(2MM', Z)\mathrm{PCS}_N^{2L}$，可以通过式子 $L = M'Z + r$ 来灵活设定相关区长度 Z 以及序列数目 $2MM'$ 以满足不同应用场合。若通信系统中用户信号时延较大，则可以设定较大的零相关区长度 Z 来保证无干扰通信。若系统中信号时延较小，而具有较多的用户时，可以设定较小的 Z 值以增加序列集中序列数目来支持更多用户。显然对于给定的子序列长度 L，则零相关区长度 Z 和序列数目 $2MM'$ 一个值增大时，另一个值必然减小。实际上 ZCZ 周期互补序列集各参数存在一个相互制约的关系式，这就是理论界限[2]。理论界限是评价序列集参数优劣的标准。对于一个参数为 $(M, Z)\mathrm{PCS}_N^L$ 的 ZCZ 周期互补序列集，有式(25)成立：

$$M \le N \cdot \left\lfloor \frac{L}{Z} \right\rfloor \tag{25}$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示对 x 下取整。式(25)称为 ZCZ 周期互补序列集的理论界限，当等号成立时，称序列集为最佳 ZCZ 周期互补序列集。

定理 5　如果选取参数达到理论界限的二元 ZCZ 周期互补序列集 $(M, Z)\mathrm{PCS}_N^L$ 做为初始序列集，则本文构造法 $1, 2, 3$ 得到的四元 ZCZ 周期互补序列集参数都可达到理论界限。

定理 6　如果选取参数达到理论界限的二元周期互补序列集 $\mathrm{PCS}(M, N, L)$ 做为初始序列集，其中 $L = MZ + r$，$0 \le r < Z$，令 $M' = M$。则当 $0 \le r < Z/2$ 时，本文构造法 4 得到的四元 ZCZ 周期互补序列集中序列数目达到理论界限。当 $Z/2 \le r < Z$ 时，得到的四元 ZCZ 周期互补序列集中序列数目比理论界少 M 个。

证明　本文构造法 4 利用参数为 $\mathrm{PCS}(M, N, L)$ 的二元周期互补序列集构造得到参数为 $(2MM', Z)\mathrm{PCS}_N^{2L}$ 的四元 ZCZ 周期互补序列集，设 M_o 表示序列集中序列数目的理论最大值，根据 ZCZ 互补序列集理论界限有

$$M_o = N \cdot \left\lfloor \frac{2L}{Z} \right\rfloor = N \cdot \left\lfloor \frac{2MZ + 2r}{Z} \right\rfloor = 2MN + N \cdot \left\lfloor \frac{2r}{Z} \right\rfloor \tag{26}$$

当 $0 \le r < Z/2$ 时，得 $M_o = 2MN$。若初始序列集参数达到理论界，即 $M = N$，则有 $M_o = 2M^2$。由 $M' = M$，所以有 $2MM' = 2M^2 = M_o$ 故此时得到的四元 ZCZ 周期互补序列集中序列数目达到理论界限。当 $Z/2 \le r < Z$ 时，可得 $M_o = 2MN + N$，由 $M = N$，则有 $M_o = 2M^2 + M$，此时 $M_o - 2MM' = 2M^2 + M - 2M^2 = M$，故此时得到的四元 ZCZ 周期互补序列集中序列数目比理论界少 M 个。　证毕

表 1 对已有几种方法所得到的四元 ZCZ 周期互补序列集参数进行对比。

文献[11]分别构造了二元和四元 ZCZ 周期互补序列集，基于这些二元 ZCZ 周期互补序列集可以利用本文构造法 $1, 2, 3$ 构造出大量四元 ZCZ 周期互补序列集。由表 1 可知，与文献[11]中四元 ZCZ 周期互补序列集构造方法相比，本文构造法 4 得到的结果中序列数目是前者的 2 倍，因此可以支持更多的通信用户。

6　结束语

本文研究了四元 ZCZ 周期互补序列集的理论构造问题。给出了 4 种构造方法，前 3 种方法基于二元 ZCZ 周期互补序列集构造四元 ZCZ 周期互补序列集。如果选取参数达到理论界的二元 ZCZ 周期互补序列集做为初始序列集，得到的四元 ZCZ 周期互补序列集参数达到理论界限。第 4 种方法基于二元周期互补序列集，利用移位序列和逆 Gray 映射来构造 ZCZ 周期互补序列集，如果选取参数达到理论界的二元周期互补序列集做为初始序列集，得到的四元 ZCZ 周期互补序列集中序列数目在某些情况下达到理论界限。与已有方法相比，得到的序列集具有更多的序列数目，应用到通信系统中可以支持更多的用户。

表 1　四元 ZCZ 周期互补序列集参数的比较

方法	初始序列集参数	四元 ZCZ 周期互补序列集参数			
		ZCZ 互补序列数目	子序列数目	子序列长度	零相关区长度
文献[11]	$\mathrm{PCS}(M, N, L)$	MM'	N	L	Z
构造法 1, 2, 3	$(M, Z)\mathrm{PCS}_N^L$	M	N	L	Z
构造法 4	$\mathrm{PCS}(M, N, L)$	$2MM'$	N	$2L$	Z

参 考 文 献

[1] Bomer L and Antweiler M. Periodic complementary binary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1990, 36(6): 1487–1494.

[2] Fan Ping-zhi, Yuan Wei-na, and Tu Yi-feng. Z-complementary binary sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(8): 509–512.

[3] Zhang Zhen-yu, Chen Wei, Zeng Fan-xin, *et al*.. Z-complementary sets based on sequences with periodic and aperiodic zero correlation zone[J]. *EURASIP Jounrnal on Wireless Communications and Networking*, 2009, DOI:10.1155/2009/418026.

[4] 张振宇, 陈卫, 曾凡鑫, 等. 多载波码分多址通信系统中抑制干扰的序列设计[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(10): 2354–2358.
Zhang Zhen-yu, Chen Wei, Zeng Fan-xin, *et al*.. Construction of interference-resistant sequences for multi-carrier CDMA communication systems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(10): 2354–2358.

[5] Tu Yi-feng, Fan Ping-zhi, Hao Li, *et al*.. A simple method for generating optimal Z-periodic complementary sequence set based on phase shift[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(10): 891–893.

[6] Feng Li-fang, Zhou Xian-wei, and Fan Ping-zhi. A construction of inter-group complementary codes with flexible ZCZ length[J]. *Journal of Zhejiang University Science C*, 2011, 12(10): 846–854.

[7] Feng Li-fang, Zhou Xian-wei, and Li Xin-yu. A general construction of inter-group complementary codes based on Z-complementary codes and perfect periodic cross-correlation codes[J]. *Wireless Persional Communcations. September* 2012. DOI: 10.1007/s11277-012-0837-6.

[8] Li Xu-dong, Fan Ping-zhi, Tang Xiao-hu, *et al*.. Quadriphase Z-complementary sequences[J]. *IEICE Transactions, on Fundamentals of Electronics*, *Communications and Computer Sciences*, 2010, E93-A(11): 2251–2257.

[9] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zhang Zhen-yu, *et al*.. New construction method for quaternary aperiodic, periodic, and Z-complementary sequence sets[J]. *Journal of Communications and Networks*, 2012, 14(3): 230–236.

[10] Zeng Fan-xin, Zeng Xiao-ping, Zhang Zhen-yu, *et al*.. Quaternary periodic complementary/Z-complementary sequence sets based on interleaving technique and Gray mapping[J]. *Advance in Mathematics of Communications*, 2012, 6(2): 237–247.

[11] 李玉博, 许成谦, 李刚. 二元及四元零相关区周期互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(1): 115–120.
Li Yu-bo, Xu Cheng-qian, and Li Gang. Constructions of binary and quaternary periodic complementary sequence sets with zero correlation zone[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(1): 115–120.

[12] Chung Jin-ho and Yang Kyeongcheol. New design of quaternary low-correlation zone sequence sets and quaternary hadamard matrices[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(8): 3733–3737.

[13] Lim T, No J S, and Chung H. New construction of quaternary sequences with good correlation using binary sequences with good correlation[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2011, E94-A(8): 1701–1705.

李玉博： 男，1985 年生，讲师，研究方向为扩频序列设计.

许成谦： 男，1961 年生，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、密码学、信号设计.

李　刚： 男，1979 年生，副教授，研究方向为编码理论研究、最佳离散信号设计.

刘　凯： 女，1977 年生，副教授，研究方向为扩列设计、扩频通信、编码理论.