

基于联合矩阵对角化的双基地 MIMO 雷达 DOD-DOA 估计

程院兵* 顾红 苏卫民

(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

摘要: 针对双基地 MIMO 雷达收发角(DOD-DOA)估计问题, 该文提出一种基于联合矩阵对角化的快速多目标收发角估计算法。该算法首先根据匹配滤波输出的数据结构, 利用奇异值分解和秩 1 矩阵判断定理将收发角度估计问题转化为联合矩阵对角化问题, 然后采用单次-扫描迭代算法对其求解, 得到收发阵列流型矩阵, 最后通过谱分析方法估计收发角。该算法充分利用匹配滤波输出的所有信息, 无需 2 维谱峰搜索, 每次迭代均可得到精确的闭式解, 且收发角自动配对。与现有算法相比, 该算法不仅提高了角度估计精度, 而且有效降低了运算量。仿真结果证明了所提算法的有效性。

关键词: 双基地 MIMO 雷达; 发射角; 接收角; 联合矩阵对角化; 单次-扫描迭代算法

中图分类号: TN958

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)04-0904-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.00847

DOD-DOA Estimation Using Joint Matrix Diagonalization in Bistatic MIMO Radar

Cheng Yuan-bing Gu Hong Su Wei-min

(School of Electronic Engineering and Optoelectronic Technology,
Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: To solve the problem of Direction Of Departure-Direction Of Arrival (DOD-DOA) estimation in bistatic MIMO radar, a fast method based on joint matrix diagonalization is proposed. First, according to the structure of matched filter output, DOD-DOA estimation is transformed to joint matrix diagonalization problem using Singular Value Decomposition (SVD) and the theorem of rank-1 matrix determined. Then, the Single-Sweep Iterative (SSI) algorithm is used to solve it, and the transmit/receive steering matrices are obtained. Finally, the DOD-DOA can be estimated by spectrum analysis method. The proposed method utilizes all the information of matched filter output, avoiding two-dimensional spectrum peak searching, and possesses an accurate closed form solution at each iteration. The DOD and DOA are automatically paired. Compared with the existence approaches, the proposed algorithm gives better angle estimation accuracy, and the computational cost is effectively reduced. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by simulation results.

Key words: Bistatic MIMO radar; Direction Of Departure (DOD); Direction Of Arrival (DOA); Joint matrix diagonalization; Single-Sweep Iterative (SSI) algorithm

1 引言

近年来, 受多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 通信技术的推动, MIMO 雷达成为学术界研究的热点^[1-3]。该雷达系统利用多个发射天线同时发射多个不相关或正交的信号, 使发射能量覆盖整个空域, 并利用多个接收天线接收回波信号。每路回波信号均经过一组匹配滤波器处理, 扩展了接收端输出信号的孔径。相比传统的

相控阵雷达, MIMO 雷达可获得更多的自由度, 具有增加可检测目标数及提高抗干扰性能等优势。根据天线阵列的配置, MIMO 雷达主要分为两类: 一类是统计 MIMO 雷达^[2], 其特点是阵元间距较大, 可从不同的视角观测目标, 从而获得发射和接收两方面的空间分集增益, 有效抑制目标雷达散射截面(RCS)闪烁。另一类是共址 MIMO 雷达^[3], 包括单/双基地 MIMO 雷达, 它们的收发阵元间距较小, 不具有空间分集特性, 其主要特点是利用波形分集技术形成大的虚拟孔径, 有效地提高了目标的空域滤波特性和可识别性能。

发射角 (DOD) 和接收角 (DOA) 是双基地

2011-08-18 收到, 2011-11-25 改回

国家部委基金和南京理工大学自主科研专项计划基金 (2010ZDJH05) 资助课题

*通信作者: 程院兵 chengyb@yeah.net

MIMO 雷达的重要空域参数^[4-9]。文献[4,5]分别采用基于 Capon 和 MUSIC 的谱峰搜索算法估计收发角,当搜索范围较大,精度要求较高时,其运算量巨大;文献[6]提出了一种基于 ESPRIT 的 DOD-DOA 估计算法,但需要额外的配对运算;文献[7]在文献[6]基础上提出了一种 DOD-DOA 能自动配对的算法,但该算法仅对发射阵元数为 2 或 3 时有效;文献[8]对文献[7]算法进行了改进,使得发射阵元数不受限制,且具有较高的角度估计精度。文献[9]从多维信号处理角度出发,提出了一种基于并行因子分析(PARAFAC)的 DOD-DOA 估计算法,其角度估计精度优于文献[8]算法,但由于该算法采用迭代最小二乘(ALS)算法求解收发阵列流型矩阵,需要多次随机初始化试验,当收发阵元数和快拍数较大时,其运算量巨大,且仅能获得局部最优解^[9,10]。

本文根据匹配滤波输出的数学结构,提出一种基于联合矩阵对角化的双基地 MIMO 雷达快速多目标 DOD-DOA 估计算法。文章首先建立了双基地 MIMO 雷达的信号模型,其次利用奇异值分解(SVD)和秩 1 矩阵判断定理将 DOD-DOA 估计问题转化为联合矩阵对角化问题,然后采用单次-扫描迭代算法对其求解,估计收发阵列流型矩阵,最后通过谱估计算法恢复目标收发角。该算法充分利用匹配滤波输出的所有信息,无需 2 维谱峰搜索,每次迭代均可得到精确的闭式解,且得到的收发角自动配对。与文献[9]算法相比,该算法不仅提高了角度估计精度,而且有效降低了运算量。

2 信号模型

双基地 MIMO 雷达的阵列结构如图 1 所示,收发天线阵列均为等间距均匀线阵,其阵元间距均为半波长, M 和 N 分别为发射和接收阵元数。 $\{s_m(t)\}_{m=1}^M$ 为 M 个正交的基带窄带相位编码信号。

假设雷达工作在窄带远场条件下,存在 R 个目标, θ_r 和 φ_r 分别表示第 r 个目标的 DOD 和 DOA,则接收阵列接收到的第 k 个基带回波脉冲可写为^[9]

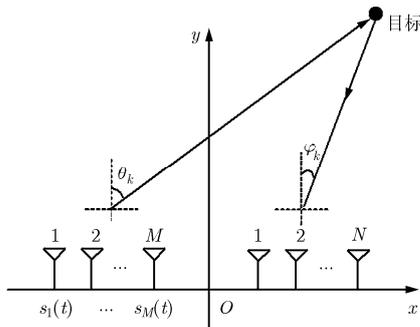


图 1 双基地 MIMO 雷达阵列结构

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{c}_k) \mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{Z}_k \quad (1)$$

式中 $\mathbf{X}_k \in \mathbb{C}^{N \times L}$, L 为单个脉冲的编码长度; $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \dots \ \mathbf{s}_M]^T \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 为基带发射信号矩阵,满足 $\mathbf{S} \mathbf{S}^H / L = \mathbf{I}_M$, $(\cdot)^T$ 和 $(\cdot)^H$ 分别为矢量/矩阵转置和共轭转置, \mathbf{I}_M 为 $M \times M$ 维单位矩阵; $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_R)] \in \mathbb{C}^{M \times R}$ 为发射流型矩阵, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\varphi_1) \ \mathbf{b}(\varphi_2) \ \dots \ \mathbf{b}(\varphi_R)] \in \mathbb{C}^{N \times R}$ 为接收流型矩阵, $\mathbf{a}(\theta_r) = [1 \ e^{-j\pi \sin(\theta_r)} \ \dots \ e^{-j\pi(M-1) \sin(\theta_r)}]^T$ 和 $\mathbf{b}(\varphi_r) = [1 \ e^{-j\pi \sin(\varphi_r)} \ \dots \ e^{-j\pi(N-1) \sin(\varphi_r)}]^T$ 分别为第 r 个目标的发射和接收导向矢量; $\text{diag}(\mathbf{c}_k)$ 为由 $\mathbf{c}_k = [c_{k1} \ c_{k2} \ \dots \ c_{kR}]$ 构成的对角矩阵, c_{kr} 为第 r 个目标在第 k 个脉冲内的散射系数; \mathbf{Z}_k 为 $N \times L$ 维回波噪声矩阵,假设噪声是均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯白噪声,即 $\mathbf{Z}_k \sim N^c(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ 。在接收端用 \mathbf{S} 对 \mathbf{X}_k 进行匹配滤波可获得 $MN \times 1$ 维矢量。

$$\mathbf{y}_k = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \mathbf{c}_k^T + \mathbf{z}_k \quad (2)$$

式中 $\mathbf{y}_k = \text{vec}(\mathbf{X}_k \mathbf{S}^H / L)$, $\mathbf{z}_k = \text{vec}(\mathbf{Z}_k \mathbf{S}^H / L)$, $\text{vec}(\cdot)$ 表示将矩阵从左到右按列写成列矢量, \odot 表示 Khatri-Rao 乘积。将 K 个回波脉冲匹配滤波后得到的矢量合并为 $MN \times K$ 维矩阵。

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_K] = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \mathbf{C}^T + \mathbf{Z} \quad (3)$$

式中 $\mathbf{C}^T = [\mathbf{c}_1^T \ \mathbf{c}_2^T \ \dots \ \mathbf{c}_K^T]$, $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \dots \ \mathbf{z}_K]$ 。如果能从 \mathbf{Y} 得到 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 结合 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均具有范德蒙德结构的特性, 就可以确定目标 DOD-DOA。

3 基于联合矩阵对角化的 DOD-DOA 估计算法

算法思路: 首先在式(3)的基础上利用 SVD 和秩 1 矩阵判断定理将 DOD-DOA 估计问题转化为联合矩阵对角化问题, 然后采用单次-扫描迭代算法对其求解得到收发阵列流型矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} , 最后利用 \mathbf{A}, \mathbf{B} 具有范德蒙德结构的特性, 通过谱分析方法恢复目标 DOD-DOA。

3.1 问题转化

对式(3)进行 SVD: $\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$, 分别取 $\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}$ 中与最大的 R 个奇异值相对应的分量构成 $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{MN \times R}$, $\tilde{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{R \times R}$, $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{K \times R}$, 假设存在非奇异矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{R \times R}$, 满足

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{E} \mathbf{G}, \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}^H \quad (4)$$

式中 $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{\Sigma}}$ 。令 $\mathbf{D} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{E} \mathbf{G}$, 取其第 r 列 \mathbf{d}_r , 在不考虑噪声情况下, \mathbf{d}_r 具有 Kronecker 乘积结构, 将其写成矩阵形式为

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{b}_r \mathbf{a}_r^T, \quad r = 1, \dots, R \quad (5)$$

式中 $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}(\theta_r)$, $\mathbf{b}_r = \mathbf{b}(\varphi_r)$; $(\mathbf{D}_r)_{n,m} = (\mathbf{d}_r)_{(m-1)N+n}$, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$, 其中 $(\cdot)_n$ 表示矢量的第

n 个元素, $(\bullet)_{n,m}$ 表示矩阵的第 n 行第 m 列元素。根据式(5)可取 \mathbf{b}_r 等于 \mathbf{D}_r 的最大奇异值对应的左奇异矢量, \mathbf{a}_r 等于相应的右奇异矢量的共轭。然后, 分别对 \mathbf{a}_r 和 \mathbf{b}_r 做谱分析就可以得到第 r 个目标的 DOD 和 DOA。因此, 在考虑噪声情况下, 我们的目的就是求解 \mathbf{G} , 使 \mathbf{D} 的每列尽可能的具有 Kronecker 乘积结构。另外, 当 $K \gg MN$ 时, 为了降低运算量, 采用如下方法^[11]计算 $\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{\Sigma}}$: 令 $\tilde{\mathbf{U}}$ 由 $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$ 的最大 R 个特征值 $\{\mu_r\}_{r=1}^R$ 对应的特征向量构成, $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ 为由 $\{\sqrt{\mu_r}\}_{r=1}^R$ 构成的对角矩阵。

下面通过推导说明求解 \mathbf{G} 可转化为联合矩阵对角化问题。将 \mathbf{E} 的第 r 列 \mathbf{e}_r 层叠成矩阵 \mathbf{E}_r , 其中 $(\mathbf{E}_r)_{n,m} = (\mathbf{e}_r)_{(m-1)N+n}$, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$, 根据式(4)有 $\mathbf{E} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})\mathbf{G}^{-1}$, 则 \mathbf{E}_r 可写为

$$\mathbf{E}_r = \sum_{i=1}^R \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i^T (\mathbf{G}^{-1})_{i,r} \quad (6)$$

当一个矩阵等于两个矢量的外积时, 称该矩阵为秩 1 矩阵^[12]。因此, 式(6)可被看作: 在已知 \mathbf{E}_r 下, 求解一组线性方程的系数 \mathbf{G} , 使 $\mathbf{b}_i \mathbf{a}_i^T$ 为秩 1 矩阵。引入以下定理判断一个矩阵是否为秩 1 矩阵:

定理 1^[12,13] 定义映射 $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \mathcal{P} \in \mathbb{C}^{I \times J \times I \times J}$ 为 $p_{ijkl} = x_{ij}y_{kl} + y_{ij}x_{kl} - x_{il}y_{kj} - y_{il}x_{kj}$, 其中 $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J}$, p_{ijkl} 为四阶张量 \mathcal{P} 的第 (i, j, k, l) 个元素, x_{ij} 和 y_{ij} 分别为 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的第 (i, j) 个元素, $i, k = 1, \dots, I$, $j, l = 1, \dots, J$ 。给定 \mathbf{X} , 当且仅当 \mathbf{X} 的秩最大为 1 时, $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathcal{O}$, 其中 \mathcal{O} 表示全 0 张量。

根据定理 1 构造一组张量

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{rs} &= \Phi(\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s) \\ &= \Phi \left(\sum_{t=1}^R \mathbf{b}_t \mathbf{a}_t^T (\mathbf{G}^{-1})_{t,r}, \sum_{u=1}^R \mathbf{b}_u \mathbf{a}_u^T (\mathbf{G}^{-1})_{u,s} \right), \\ & \quad r, s = 1, \dots, R \end{aligned} \quad (7)$$

根据 Φ 的双线性特性, 式(7)可重写为

$$\mathcal{P}_{rs} = \sum_{t,u=1}^R (\mathbf{G}^{-1})_{t,r} (\mathbf{G}^{-1})_{u,s} \Phi(\mathbf{b}_t \mathbf{a}_t^T, \mathbf{b}_u \mathbf{a}_u^T) \quad (8)$$

假设存在对称矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ 满足线性方程组

$$\sum_{r,s=1}^R \mathcal{P}_{rs} h_{rs} = \mathcal{O} \quad (9)$$

式中 h_{rs} 为 \mathbf{H} 的第 r 行第 s 列元素。将式(8)代入式(9), 并利用 $\Phi(\mathbf{b}_t \mathbf{a}_t^T, \mathbf{b}_u \mathbf{a}_u^T) = \mathcal{O}$ 和 $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Phi(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ 可得

$$\sum_{r,s=1}^R \sum_{\substack{t,u=1 \\ t < u}}^R (\mathbf{G}^{-1})_{t,r} (\mathbf{G}^{-1})_{u,s} \Phi(\mathbf{b}_t \mathbf{a}_t^T, \mathbf{b}_u \mathbf{a}_u^T) h_{rs} = \mathcal{O} \quad (10)$$

当 $\mathcal{V}_{tu} = \Phi(\mathbf{b}_t \mathbf{a}_t^T, \mathbf{b}_u \mathbf{a}_u^T)$, $t < u$ 线性独立时, 式(10)可写为^[12]

$$\sum_{r,s=1}^R (\mathbf{G}^{-1})_{tr} (\mathbf{G}^{-1})_{us} h_{rs} = \lambda_{tu} \delta_{tu} \quad (11)$$

式中 δ 表示 Kronecker 函数, 当 $t = u$ 时, $\delta_{tu} = 1$, 否则 $\delta_{tu} = 0$ 。式(11)可进一步写为

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G}^T \quad (12)$$

式中 \mathbf{A} 为由 $\{\lambda_{tu}\}_{t=1}^R$ 构成的对角矩阵。对式(12), 选取 R 个线性独立的 \mathbf{A} 可得到 R 个线性方程

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{G}\mathbf{A}_1\mathbf{G}^T \\ &\vdots \\ \mathbf{H}_R &= \mathbf{G}\mathbf{A}_R\mathbf{G}^T \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

下面讨论如何构造矩阵 $\{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$ 。根据 Φ 和 \mathbf{H} 的对称性, 式(9)可重写为 $2\sum_{\substack{r,s=1 \\ r < s}}^R \mathcal{P}_{rs} h_{rs} + \sum_{r=1}^R \mathcal{P}_{rr} h_{rr} = \mathcal{O}$, 进一步写为^[12]

$$\mathbf{P}\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (14)$$

式中 $\mathbf{h} = [h_{11}, \dots, h_{RR}, h_{12}, \dots, h_{1R}, \dots, h_{R-1,R}]^T$, $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_{11}, \dots, \mathbf{p}_{RR}, 2\mathbf{p}_{12}, \dots, 2\mathbf{p}_{1R}, \dots, 2\mathbf{p}_{R-1,R}] \in \mathbb{C}^{(M^2N^2) \times (R(R+1)/2)}$, 其中 \mathbf{p}_{rs} 为将张量 \mathcal{P}_{rs} 写成 $M^2N^2 \times 1$ 维的矢量, 满足 $(\mathbf{p}_{rs})_{(n-1)N+(i-1)N+(m-1)M+k} = (\mathcal{P}_{rs})_{nmik}$, $n, i = 1, \dots, N$, $m, k = 1, \dots, M$, $\mathbf{0}$ 为全 0 向量。令 $\{\mathbf{w}_r = [w_{1,1,r}, \dots, w_{R,R,r}, w_{1,2,r}, \dots, w_{1,R,r}, \dots, w_{R-1,R,r}]^T\}_{r=1}^R$ 为 \mathbf{P} 的最小 R 个奇异值对应的奇异矢量, 则对称矩阵 $\{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$ 可由式(15)得到

$$\mathbf{H}_r = \overline{\mathbf{H}}_r + \overline{\mathbf{H}}_r^T, \quad \overline{\mathbf{H}}_r = \begin{bmatrix} w_{1,1,r} & w_{1,2,r} & \cdots & w_{1,R,r} \\ 0 & w_{2,2,r} & \cdots & w_{2,R,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{R,R,r} \end{bmatrix}, \quad r = 1, \dots, R \quad (15)$$

为了减小运算量, 可取 $\{\mathbf{w}_r\}_{r=1}^R$ 等于 $\mathbf{P}^H\mathbf{P}$ 的最小 R 个特征值对应的特征向量^[11]。至此, 求解 \mathbf{G} 的问题被转化为求解式(13)的联合矩阵对角化问题。另外, 以上结论是在 $\{\mathcal{V}_{tu}\}_{t < u}$ 线性独立的前提下得到的, 一般假设目标角度在区间 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 随机分布, 根据文献[12, 定理 2.5]可知当目标数和收发阵元数满足 $R(R-1) \leq MN(M-1)(N-1)/2$ 时, $\{\mathcal{V}_{tu}\}_{t < u}$ 线性独立。在双基地 MIMO 雷达多目标定位中该条件易满足, 如当 $M = N = 6$ 时, R 最大可取 21。

3.2 估计收发阵列流型矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B}

根据 3.1 节可知, 求解式(13)的联合矩阵对角化问题得到 \mathbf{G} , 再根据式(4)和式(5)即可得到收发阵列流型矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 。多种算法^[12-14]可用于求解联合对角化问题, 如雅克比迭代算法^[12], 扩展 QZ 迭代算法^[13]和子空间拟合法^[14], 但这些算法均较为复杂, 运算量大。文献[15]采用 AC-DC 算法解决叠

加图像盲分离中的参数化联合对角化问题，该算法收敛速度快，每次迭代中代价函数是非递增的，且能较好地逼近最优解。本文在 3.1 节基础上结合 AC-DC 算法给出一种简单的迭代算法求解式(13)，该算法通过交替更新 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ 和 \mathbf{G} 实现联合矩阵对角化，算法的收敛性能与 AC-DC 算法类似。下面分别讨论单次迭代过程中如何更新 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ 和 \mathbf{G} ：

(1) 给定 $\mathbf{G}, \{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$ ，更新 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ 。根据上文中 $\text{vec}(\cdot)$ 的定义有^[13] $\text{vec}(\mathbf{XYZ}) = (\mathbf{Z}^T \otimes \mathbf{X})\text{vec}(\mathbf{Y})$ ，其中 \otimes 表示 Kronecker 乘积，结合式(13)可得 $\text{vec}(\mathbf{H}_r) = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G})\text{vec}(\mathbf{A}_r)$ ，利用最小二乘准则更新 $\text{vec}(\mathbf{A}_r) = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G})^{-1}\text{vec}(\mathbf{H}_r)$ ， $r = 1, \dots, R$ (16)

然后对 $\{\text{vec}(\mathbf{A}_r)\}_{r=1}^R$ 做与 $\text{vec}(\cdot)$ 相反的操作就可以得到 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ 。

(2) 给定 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R, \{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$ ，更新 \mathbf{G} 。在考虑噪声情况下，式(13)可转化为如下的最小化问题

$$\min_{\mathbf{G}, \{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R} \varepsilon = \sum_{r=1}^R \left\| \mathbf{H}_r - \mathbf{G} \mathbf{A}_r \mathbf{G}^T \right\|_{\text{F}}^2 \quad (17)$$

式中 $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 表示矩阵 Frobenius 范数。式(17)的代价函数可写为 $\varepsilon = \sum_{r=1}^R \left\| \mathbf{H}_r - \sum_{k=1}^R \lambda_{r,k} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^T \right\|_{\text{F}}^2$ ，其中 $\lambda_{r,k}$ 为 \mathbf{A}_r 的对角线上第 k 个元素， \mathbf{g}_k 为 \mathbf{G} 的第 k 列。令 $\tilde{\mathbf{H}}_r = \mathbf{H}_r - \sum_{k=1}^R \lambda_{r,k} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^T$ ， $i \in [1, R]$ ，则代价函数可进一步写为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{r=1}^R \left\| \tilde{\mathbf{H}}_r - \lambda_{r,i} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^T \right\|_{\text{F}}^2 \\ &= \sum_{r=1}^R \text{Tr}[(\tilde{\mathbf{H}}_r - \lambda_{r,i} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^T)^H (\tilde{\mathbf{H}}_r - \lambda_{r,i} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^T)] \\ &= \tilde{C} - 2 \text{Re} \left[\mathbf{g}_i^T \left(\sum_{r=1}^R \lambda_{r,i} \tilde{\mathbf{H}}_r^H \right) \mathbf{g}_i \right] + (\mathbf{g}_i^H \mathbf{g}_i)^2 \sum_{r=1}^R |\lambda_{r,i}|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\text{Tr}(\cdot)$ 表示矩阵迹运算， $\text{Re}(\cdot)$ 表示取实部运算， \tilde{C} 为与 \mathbf{g}_i 无关的常数。令 $\mathbf{g}_i = g \boldsymbol{\rho}$ ，其中 $\boldsymbol{\rho}$ 为单位向量，有 $\boldsymbol{\rho}^H \boldsymbol{\rho} = 1$ ，将其代入式(18)可得

$$\varepsilon = \tilde{C} - 2g^2 \text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) + g^4 q \quad (19)$$

式中 $\mathbf{Q} = \sum_{r=1}^R \lambda_{r,i} \tilde{\mathbf{H}}_r^*$ ， $q = \sum_{r=1}^R |\lambda_{r,i}|^2 > 0$ 。不失一般性，可假设 $g \geq 0$ ，由于 \mathbf{G} 非奇异，因此要求 $g > 0$ 。对式(19)关于 g 求导，并令其结果等于 0，可得

$$g = \sqrt{\text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) / q}, \quad \text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) > 0 \quad (20)$$

将式(20)代入式(19)得 $\varepsilon = \tilde{C} - [\text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho})]^2 / q$ ， $\text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) > 0$ ，结合 $q > 0$ ，则最小化式(18)可转化为下面的最大化问题

$$\left. \begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{\rho}} \text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{\rho}^H \boldsymbol{\rho} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

令 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha} + j\boldsymbol{\beta}$ ， $\mathbf{Q} = \mathbf{R} + j\mathbf{T}$ ，其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^R$ ， $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} = 1$ ， $\mathbf{R}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{R \times R}$ ，则

$$\begin{aligned} \text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha} \\ &= \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} - \mathbf{R} \end{bmatrix}$ 。可以看出，当 $\boldsymbol{\gamma}$ 等于 $\boldsymbol{\Psi}$ 的最大特征值 $\sigma (> 0)$ 对应的特征向量时式(22)最大化，此时 $\text{Re}(\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\rho}) = \sigma$ ，将其代入式(20)可得 $g = \sqrt{\sigma / q}$ ，则

$$\mathbf{g}_i = g \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\alpha} + j\boldsymbol{\beta}) \sqrt{\sigma / q}, \quad i = 1, \dots, R \quad (23)$$

根据式(23)依次更新 \mathbf{G} 的每列。可以看出，该算法的一次迭代过程是通过单次最小二乘算法同时更新 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ 和最小化式(18)扫描更新 \mathbf{G} 的每列实现的，因此称该算法为单次-扫描迭代 (SSI) 算法。

综上所述，采用 SSI 算法求解式(13)的基本步骤为：(1) 初始化 \mathbf{G} 为 $\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2^{-1}$ 的特征矩阵；(2) 给定 $\mathbf{G}, \{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$ ，根据式(16)更新 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ ；(3) 给定 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R, \{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$ ，首先计算 \mathbf{Q} 和 q ，根据 \mathbf{Q} 得到 $\boldsymbol{\Psi}$ ，并对其特征分解得到最大特征值 $\sigma (> 0)$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 。对 $\boldsymbol{\gamma}$ 分块，分别取 $\boldsymbol{\gamma}$ 的前 R 个元素和后 R 个元素构成 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ ，然后利用式(23)依次更新 \mathbf{G} 的每列；(4) 重复(2)和(3)直到式(17)的相邻两次代价函数值之差达到某一给定的门限 δ 。

最后，利用 SSI 算法得到的 \mathbf{G} ，根据式(4)和式(5)计算 $\{\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r\}_{r=1}^R$ ，即收发阵列流型矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 。

3.3 谱分析算法恢复目标 DOD-DOA

文献[9]采用对 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的每列分别取平均的方法计算目标 DOD-DOA，该方法实现简单，但角度估计精度较低。本文利用 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 具有范德蒙德结构的特性，对其每列分别采用高分辨谱分析算法^[16]，如 Root-MUSIC 和 ESPRIT，可得到精度较高的 DOD-DOA 估计值，且二者自动配对。下面给出基于 ESPRIT 的角度恢复算法^[16]：取 \mathbf{A} 的第 r 列 \mathbf{a}_r ，计算其协方差矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r^H / M$ 的最大特征值对应的特征向量 \mathbf{u} ，取 \mathbf{u} 的前 $M-1$ 个元素构成矢量 \mathbf{u}_1 ，后 $M-1$ 个元素构成矢量 \mathbf{u}_2 ，计算 $\alpha = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_2 / \|\mathbf{u}_1\|^2$ ，其中 $\|\cdot\|$ 表示矢量 2 范数，则第 r 个目标的 DOD 估计值 $\hat{\theta}_r = -\arcsin(\alpha / \pi) \cdot 180 / \pi$ 。对 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的每列做相同处理，就可以得到所有目标的 DOD-DOA。由于 \mathbf{A}, \mathbf{B} 相同位置的列矢量分别对应着同一目标的 DOD 和 DOA，所以二者自动配对。

3.4 算法步骤

下面给出本文基于联合矩阵对角化的快速多目

标 DOD-DOA 估计算法的基本步骤:

步骤 1 根据式(2)和式(3), 对回波进行匹配滤波处理, 计算 \mathbf{Y} ;

步骤 2 特征分解 $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$, 计算 \mathbf{E} , 根据定理 1 和式(7)计算 $\{\mathcal{P}_{rs}\}_{r,s=1}^R$;

步骤 3 根据式(14)和式(15)计算 $\{\mathbf{H}_r\}_{r=1}^R$;

步骤 4 利用 SSI 算法计算 \mathbf{G} , 并根据式(4)和式(5)计算 \mathbf{A}, \mathbf{B} ;

步骤 5 对步骤 4 得到的 \mathbf{A}, \mathbf{B} 使用 3.3 节算法估计 DOD-DOA。

4 运算复杂度分析

本文算法和文献[9]算法均是对一大大小为 $MN \times K$ 的矩阵进行处理。由上文分析可知, 本文算法的运算量主要集中在 \mathbf{P} 的计算, $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H, \mathbf{P}^H\mathbf{P}$ 的特征分解和 SSI 算法, 其中计算 \mathbf{P} 的运算量(复乘次数)为 $O[2R(R+1)M^2N^2]$, 特征分解 $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$ 和 $\mathbf{P}^H\mathbf{P}$ 的运算量分别为^[11] $O(M^3N^3)$ 和 $O[R^3(R+1)^3/8]$, SSI 算法中单次更新 $\{\mathbf{A}_r\}_{r=1}^R$ 和 \mathbf{G} 的运算量均为^[13,15] $O(R^4)$, 因此本文算法的运算量约等于 $O[2R(R+1)M^2N^2 + M^3N^3 + R^3(R+1)^3/8 + 2IR^4]$, 其中 I 为 SSI 算法的迭代次数。文献[9]算法的运算量主要集中在 ALS 算法, 其运算量约等于^[9,10] $O[I(R^3 + RMNK)]$, 其中 I 为 ALS 算法的迭代次数。由于采用 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 进行初始化, SSI 算法经过少量次迭代(10 次以内)即可收敛, 而 ALS 算法由于随机初始化, 其收敛速度慢, 且仅能获得局部最优解^[9,10]。下一节实验 4 通过仿真给出了本文算法和文献[9]算法运算量的比较。

5 仿真实验

假设双基地 MIMO 雷达发射和接收阵元数为 $M = N = 10$, 阵元间距均为半波长。各发射阵元发射相互正交的窄带 Hadamard 编码信号, 单个脉冲编码长度 $L = 256$ 。本文算法步骤 4 中单次扫描迭代算法的门限值 $\delta = 10^{-6}$ 。下面分别从目标角度

星座图、均方根误差(RMSE)和运算量 3 个方面说明本文算法的有效性和优越性。

实验 1 目标角度星座图 假设存在 5 个目标, 其发射角为 $\{\theta_k\}_{k=1}^5 = \{-60^\circ, -40^\circ, -15^\circ, 25^\circ, 60^\circ\}$, 接收角为 $\{\varphi_k\}_{k=1}^5 = \{-50^\circ, 30^\circ, 15^\circ, -20^\circ, 50^\circ\}$, 信噪比(SNR)均为 0 dB, 散射系数服从 Swerling-II 模型^[9], 快拍数 $K = 200$ 。图 2 给出了在 200 次蒙特卡罗试验下本文算法得到的目标角度星座图, 图中“+”表示目标真实位置。可以看出, 本文算法能同时估计多个目标 DOD 和 DOA, 且二者自动配对。

实验 2 角度 RMSE 与 SNR 的关系 假设存在 2 个目标, 其发射角为 $\{\theta_k\}_{k=1}^2 = \{-20^\circ, 55^\circ\}$, 接收角为 $\{\varphi_k\}_{k=1}^2 = \{15^\circ, -60^\circ\}$, 散射系数服从 Swerling-II 模型, 快拍数 $K = 200$ 。图 3 给出了本文算法和文献[9]算法对目标 1 的角度 RMSE 与 SNR 的关系, 并与求根克拉美-罗界^[7](Root-CRB)作了比较。蒙特卡罗试验次数为 1000。可以看出, 在不同的信噪比下, 本文算法的测角精度均优于文献[9]算法。

实验 3 角度 RMSE 与快拍数的关系 假设存在两个目标, 其信噪比均为 5 dB, 其余参数与实验 2 相同。图 4 给出了本文算法和文献[9]算法对目标 1 的角度 RMSE 与快拍数的关系, 并与 Root-CRB 作了比较。蒙特卡罗试验次数为 1000。可以看出, 在不同的快拍数下, 本文算法的测角精度均优于文献[9]算法。

实验 4 运算量比较 假设存在 5 个目标, 其参数与实验 1 相同。图 5 给出了本文算法与文献[9]算法的运算时间比值与快拍数的关系。蒙特卡罗试验次数为 1000。可以看出, 本文算法的运算时间要明显低于文献[9]方法, 在大快拍情况下, 性能改善显著。

综上所述, 本文算法可有效估计多目标 DOD 和 DOA, 且二者自动配对。与文献[9]算法相比, 本文算法无需多次随机初始化试验, 算法收敛速度

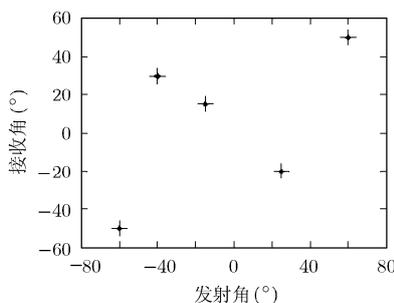


图 2 本文算法得到的目标角度星座图

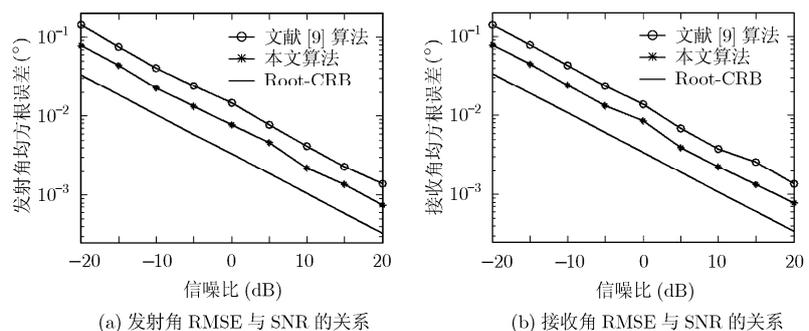


图 3 目标 1 角度 RMSE 与 SNR 的关系

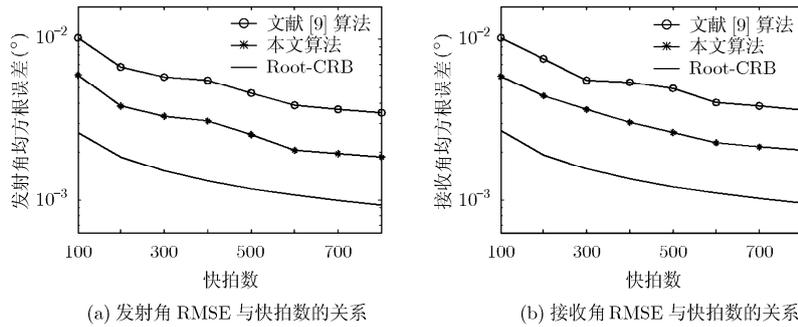


图4 目标1角度 RMSE 与快拍数的关系

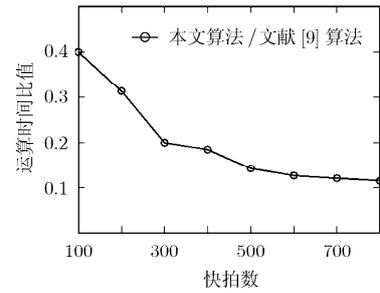


图5 运算时间比值与快拍数的关系

快，每次迭代均可得到精确的闭式解，因此具有更高的角度估计精度，且运算量也大幅减小。

6 结论

本文首先在双基地 MIMO 雷达信号模型基础上，利用奇异值分解和秩 1 矩阵判断定理将收发角估计问题转化为联合矩阵对角化问题，然后采用单次-扫描迭代算法对其求解，获得收发阵列流型矩阵，避免了复杂的 2 维谱峰搜索，最后利用高分辨谱分析算法实现范德蒙德矩阵恢复，估计目标收发角。经合理的初始化，迭代算法可快速收敛，且每次迭代均具有精确的闭式解。与文献[9]方法相比，本文算法不仅提高了角度估计精度，而且有效降低了运算量，增强了雷达的实时处理能力，对于工程实现具有重要参考价值。

参考文献

- [1] Li J, Blum R S, Stoica P, *et al.* Introduction to issue on MIMO radar and its applications[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(1): 2-4.
- [2] Haimovich A, Blum R, and Cimini L. MIMO radar with widely separated antennas[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(1): 116-129.
- [3] Li J and Stoica P. MIMO radar with collocated antennas[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(5): 106-114.
- [4] Yan H D, Li J, and Liao G S. Multitarget identification and localization using bistatic MIMO radar systems[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Vol. 2008, DOI: 10.1155/2008/283483.
- [5] Zhang X, Xu L, Xu L, *et al.* Direction of departure (DOD) and direction of arrival (DOA) estimation in MIMO radar with reduced dimension MUSIC[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(12): 1161-1163.
- [6] Cheng D F, Cheng B X, and Qin G D. Angle estimation using ESPRIT in MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2008, 44(12): 770-771.
- [7] Jin M, Liao G S, and Li J. Joint DOD and DOA estimation for bistatic MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(2): 244-251.
- [8] Chen J L, Gu H, and Su W M. A new method for joint DOD and DOA estimation in bistatic MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(2): 714-718.
- [9] Dion D and Sidiropoulos N D. Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(11): 5693-5705.
- [10] Ahmad K, Laurent A, and Lieven D L. Iterative methods for the canonical decomposition of multi-way arrays: application to blind underdetermined mixture identification[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(8): 1789-1802.
- [11] Gilbert S. Introduction to Linear Algebra[M]. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1993: 363-370.
- [12] Lieven D L. A link between the canonical decomposition in multilinear algebra and simultaneous matrix diagonalization [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2006, 28(3): 642-666.
- [13] Lieven D L and Josephine C. Tensor-based techniques for the blind separation of DS-CDMA signals[J]. *Signal Processing*, 2007, 87(2): 322-336.
- [14] Van Der and Veen A J. Joint diagonalization via subspace fitting techniques[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Salt Lake City, UT, May 7-11, 2001, 5: 2773-2776.
- [15] Be'ery E and Yeredor A. Blind separation of superimposed shifted images using parameterized joint diagonalization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(3): 340-353.
- [16] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 126-143.

程院兵：男，1984 年生，博士生，研究方向为随机信号雷达及 MIMO 雷达信号处理等。

顾红：男，1967 年生，教授，博士生导师，研究方向为噪声雷达、MIMO 雷达信号处理、雷达成像和目标识别等。

苏卫民：男，1959 年生，教授，博士生导师，研究方向为阵列信号处理及雷达成像等。