DTFT 频谱细化特性分析及其快速算法设计

肖 玮*① 涂亚庆① 何 丽②
①(后勤工程学院 重庆 401311)
②(陆军预备役高射炮兵师军需科 重庆 400041)

摘 要：该文介绍了离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)的一种等价定义式，分析了 DTFT 与线性调频 Z 变换(Chirp-Z transform)的联系与区别，推导出 DTFT 是一种特殊形式的 Chirp-Z 变换，具有频谱细化特性。设计了 DTFT 的快速算法，给出了算法实现步骤。算法计算量分析表明：在相同频率分辨率下，DTFT 快速算法的计算量比 Chirp-Z 变换快速算法小。仿真结果验证了理论推导的正确性和 DTFT 在频率估计方面的优越性。

关键词：信号处理；离散时间傅里叶变换；快速算法；频谱细化；Chirp-Z变换
中图分类号：TN911.72 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2011)06-1395-06
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.01118

Analysis of DTFT's Spectrum Zoom Character and Design of Its Fast Algorithm

Xiao Wei① Tu Ya-qing① He Li②
①(*Logistical Engineering University*, *Chongqing* 401311, *China*)
②(*Army Reserve Duty Anti-aircraft Fire Artillery Division*, *Chongqing* 400041, *China*)

Abstract: One equivalent definition of Discrete Time Fourier Transform (DTFT) is introduced in this paper. The relationship and differences between DTFT and Chirp-Z transform are analyzed. It is pointed out that DTFT, with spectrum zoom character, is a special form of Chirp-Z transform. Moreover, one fast algorithm and its detailed process of DTFT are given. Computational complexity analysis shows that fast algorithm of DTFT is less complicated than Chirp-Z with the same frequency resolution. Simulation results prove the validity of the theoretical results and the advantage of DTFT in frequency estimation.

Key words: Signal processing; Discrete Time Fourier Transform (DTFT); Fast algorithm; Spectrum zoom; Chirp-Z transform

1 引言

离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)是信号处理中的一个重要理论，在时间轴上离散取值，在频率域上连续取值，因此其频谱是连续的，能够突破离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)及其快速算法(Fast Fourier Transform, FFT)中频率分辨率受采样点数的限制，有效克服DFT(FFT)谱的“栅栏”效应。但由于DTFT计算量较大，其应用一直受到限制。文献[1]提出滑动DTFT快速算法，但该方法的实质是通过不断增加计算序列的长度，来实现指定频率处傅里叶系数的快速计算，并未从DTFT算法本身对其进行改进，因此不能适用当序列长度不能增加的情况，普适性较差。

DTFT实质是单位圆上的Z变换，Chirp-Z变换由Z变换推导出。本文通过分析DTFT与Chirp-Z变换的联系与区别，理论推导和仿真验证DTFT是一种特殊形式的Chirp-Z变换，具有频谱细化特性；据此，设计DTFT快速算法，给出算法的实现步骤和计算量分析；指出在相同频率分辨率下，DTFT法和Chirp-Z变换频率估计精度相同，但DTFT快速算法的计算量比Chirp-Z变换快速算法小。

2 DTFT 频谱细化特性分析

2.1 DTFT 的数学定义

在多数数字信号处理的文献中，DTFT 的定义式均是针对离散信号的[2,3]。然而，在科学研究和工程实践中处理的信号大多数是模拟信号，因此无法直接运用上述 DTFT 定义式进行频谱分析，必须先

2010-10-18 收到，2011-03-04 改回
国家自然科学基金和重庆市重点基金资助课题
*通信作者：肖玮 wzwry@163.com

将其转换为离散信号。下面，针对模拟信号介绍DTFT的另一种等价定义式[4]。

对任一在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积的连续时间信号$x_a(t)$，其傅里叶变换存在，定义为

$$X(e^{j\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

其中$\Omega = 2\pi F$为模拟角频率，单位为 rad/s；F为模拟频率，单位为 Hz。

利用连续信号采样的数学模型，用一个采样序列$\delta(t)$与$x_a(t)$相乘将其离散化，即

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \tag{2}$$

$$x_a(nT_s) = x(n) = x_a(t)\delta(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s) \tag{3}$$

T_s为两个连续样本之间的时间间隔，即采样周期；其倒数$1/T_s = f_s$，为采样频率；$\delta(t - nT_s)$是一个Dirac δ函数，对于任一连续函数$y(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t - nT)\mathrm{d}t = y(nT) \tag{4}$$

将式(3)和式(4)代入式(1)有

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T_s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega T_s n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nF/f_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \end{aligned} \tag{5}$$

在实际工程中，一般仅考虑$n = 0,1,2,\cdots,N-1$的有限长序列，故工程中 DTFT 定义为

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T_s}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega T_s n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nF/f_s} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \end{aligned} \tag{6}$$

2.2 DTFT 与 Chirp-Z 变换的区别与联系

Chirp-Z 变换是一种常用的频谱细化方法，由Rabiner 等人[5]提出，能够识别频谱的细微结构，从而得到比常规频谱分析，如 FFT 更加详尽的频谱信息，现已广泛应用于窄带信号分析[6]、图像处理[7]、故障诊断[8]、雷达信号处理[9]、语音处理[10]、通信[11]等诸多领域。Chirp-Z 变换的实质是计算沿 Z 平面上一段螺旋线周线做等角度间隔取样的R个采样点处的 Z 变换值，推导过程可以理解为将 Z 变换中的z替换成了$z_r = AW^{-r}$，R点 Chirp-Z 变换的定义如下：

$$\begin{aligned} X(z_r) &= \mathrm{CZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z_r^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) A^{-n} W^{nr}, \quad r = 0,1,\cdots,R-1 \end{aligned} \tag{7}$$

式(7)中，$x(n)$为无限长序列，在实际工程中，一般仅考虑$n = 0,1,2,\cdots,N-1$的情况；$A = A_0 e^{j\theta_0}$，$W = W_0 e^{-j\varphi_0}$，A_0, W_0为任意的正实数，A_0和θ_0表示第 1 个采样点的半径和相角，W_0表示采样点半径的伸展趋势，φ_0为相邻采样点间的角度间隔。

计算R点 Chirp-Z 变换的步骤一般为：(1)根据先验知识确定信号频率成分的粗略范围$(f_{\min}, f_{\max})$与采样频率f_s；(2)根据需要确定频率分辨率Δf；(3)根据(1)，(2)中确定的参数按式(8)-式(10)计算R，θ_0和φ_0；(4)将相应参数代入式(7)进行计算，得到R点 Chirp-Z 变换。

$$R = (f_{\max} - f_{\min}) / \Delta f \tag{8}$$

$$\theta_0 = 2\pi f_{\min} / f_s \tag{9}$$

$$\varphi_0 = 2\pi \Delta f / f_s \tag{10}$$

若令 Chirp-Z 变换中$A_0 = 1$，$W_0 = 1$，将式(9)和式(10)代入式(7)，有

$$\begin{aligned} X(z_r) &= \mathrm{CZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_r^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{nr} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn(2\pi f_{\min}/f_s + 2\pi\Delta f r/f_s)}, \\ &\quad r = 0,1,\cdots,R-1 \end{aligned} \tag{11}$$

同理，若在 DTFT 中，根据需要确定信号频率成分的粗略范围$(f_{\min}, f_{\max})$、频率分辨率Δf和输出点数$M = (f_{\max} - f_{\min})/\Delta f$，代入式(6)有

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T_s}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega T_s n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn(2\pi f_{\min}/f_s + 2\pi\Delta f m/f_s)}, \\ &\quad m = 0,1,\cdots,M-1 \end{aligned} \tag{12}$$

由以上分析可知，式(11)和式(12)具有相同的数学解析式，且式中参数具有相同的意义，故可得出如下结论: (1)DTFT 是一种特殊的 Chirp-Z 变换，当且仅当$A_0 = 1, W_0 = 1$时，DTFT 与 Chirp-Z 变换完全等价。(2)DTFT 中频率分辨率Δf不受信号采样点数N的制约，可以根据实际需要任意选定。(3)DTFT 输出点数M与信号采样点数N完全无关，仅和频率分辨率Δf有关。当$M = N$时，M点DTFT谱的频率分辨率和N点DFT(FFT)谱的频率分辨率相同，为f_s/N；当$M > N$时，M点 DTFT谱的频率分辨率f_s/M，从而获得了较N点 DFT (FFT)谱更精确的频谱，即达到了频域细化的效果。(由于 DTFT 能对任意感兴趣的频率区间进行分析，而 DFT(FFT)只能对整个频带进行分析，为方便比较，在此令$f_{\min} = 0$，$f_{\max} = f_s$)。

3 DTFT 快速算法

3.1 DTFT 快速算法设计

按式(12)计算M点 DTFT，其计算量为$N \times M$

次复数乘法。若 N 和 M 取值较大，其计算量将更大，因此很不利于推广应用。而 Chirp-Z 变换利用布鲁斯坦(Bulestein)所提出的式(13)设计快速算法[2,3]。

$$ab=\frac{1}{2}[a^2+b^2-(a-b)^2] \tag{13}$$

由上文推导可知，当 $A_0=1,W_0=1$ 时，DTFT 与 Chirp-Z 变换完全等价，因此可以利用式(13)为 DTFT 设计快速算法，则式(12)可以表示为

$$X(e^{j\Omega T_s})=e^{-j\pi m^2\Delta f/f_s}\sum_{n=0}^{N-1}g(n)h(m-n),\quad m=0,\cdots,M-1 \tag{14}$$

其中

$$g(n)=x(n)e^{-j2\pi n(f_{\min}+0.5n\Delta f)/f_s},\ n=0,1,\cdots,N-1 \tag{15}$$

$$h(n)=e^{j\pi n^2\Delta f/f_s} \tag{16}$$

由式(14)可知，计算 M 点 DTFT 可以通过计算序列 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积与表达式 $e^{-j\pi m^2\Delta f/f_s}$ 的乘积获得。由于 $g(n)$ 为长度为 N 的序列，$h(n)$ 为一无穷长的序列。为计算 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积，只需取 $h(n)$ 在 $-N+1\le n\le M-1$ 内的值即可，因此可以把 $h(n)$ 看成是长度为 $L=M+N-1$ 的有限长序列。因为在时域计算线性卷积效率很低，而当循环卷积的循环长度大于或等于 $L+N-1$ 时，计算循环卷积和线性卷积的结果相同，且计算循环卷积可以利用 FFT 算法[2,3]，因此可将 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积转换为循环卷积。由于计算 M 点 DTFT 只需要输出 $0,1,\cdots,M-1$ 共 M 个点的卷积值，即使后面 $N-1$ 个点发生混叠也不会影响前面的值，因此可将循环卷积的周期缩短为 L。

3.2 DTFT 快速算法的实现

由以上分析可知，DTFT 快速算法的基本思想如图 1 所示。

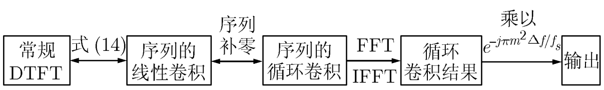


图 1 DTFT 快速算法的基本思想

具体实现步骤如下：

步骤 1　确定 $g(n)$ 和 $h(n)$ 循环卷积的周期 L，$L\ge M+N-1$，且 L 为 2 的整数次幂；

步骤 2　将 $h(n)$ 按式(17)转化为一个长度为 L 点的新序列：

$$h_L(n)=\begin{cases}h(n), & 0\le n\le M-1\\ 0, & M\le n\le L-N\\ h(L-n), & L-N+1<n<L-1\end{cases} \tag{17}$$

步骤 3　根据已知参数按式(15)计算出序列 $g(n)$；

步骤 4　将 $g(n)$ 进行补零处理，使之成为长度为 L 的序列 $g_1(n)$，利用 FFT 算法计算 $g_1(n)$ 的 L 点 DFT，记为 $G(l)$；

步骤 5　利用 FFT 算法计算 $h_L(n)$ 的 L 点的 DFT，记为 $H(l)$；

步骤 6　将 $G(l)$ 与 $H(l)$ 相乘，得到 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的循环卷积，记为 $Y(l)$，并对其进行 L 点快速傅里叶逆变换(Inverse Fast Fourier Transform, IFFT)得到序列 $y(n)$，只取 $y(n)$ 在 $0\le n\le M-1$ 范围内的值，即为 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积，记为 $y_1(n)$；

步骤 7　将 $y_1(n)$ 与表达式 $e^{-j\pi m^2\Delta f/f_s}$ 相乘，得到 M 点 DTFT 的值。

3.3 计算量分析与比较

3.3.1 计算量分析　在 DTFT 快速算法中：

(1)在计算 $g(n)$ 过程中，计算 $e^{-j\pi n^2\Delta f/f_s}$ 需要 $2N$ 次实数乘法，计算 $e^{-j2\pi nf_{\min}/f_s}$ 需要 N 次实数乘法，故计算 $g(n)$ 共需要 $2N$ 次复数乘法和 $3N$ 次实数乘法；

(2)3 次计算 L 点 FFT 过程中(步骤 3、步骤 5 和步骤 6)，共需要 $1.5L\log_2 L$ 次复数乘法和 $3L\log_2 L$ 次复数加法；

(3)计算 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的循环卷积 $Y(l)$ 时，需 L 次复数乘法；

(4)形成序列 $h(n)$ 时，需要 $2N$ 次实数乘法；

(5)计算 $e^{-j\pi m^2\Delta f/f_s}$ 需要 $2M$ 次实数乘法，计算 $y_1(n)$ 与 $e^{-j\pi m^2\Delta f/f_s}$ 的乘积，需要 M 次复数乘法。

由于计算 1 次复数乘法需要 4 次实数乘法和 2 次实数加法，计算 1 次复数加法需 2 次实数加法，故 M 点 DTFT 快速算法总的运算量为 $S_{\mathrm{DTFT}\times}$ 次实数乘法和 $S_{\mathrm{DTFT}+}$ 次实数加法：

$$S_{\mathrm{DTFT}\times}=6L\log_2 L+4L+13N+6M \tag{18}$$

$$S_{\mathrm{DFTF}+}=9L\log_2 L+2L+4N+2M \tag{19}$$

而直接 M 点 DTFT 需要 $M\times N$ 次复数乘法，即 $4MN$ 次实数乘法和 $2MN$ 次实数加法。因此，当 M,N 取值较大时，DTFT 快速算法的计算量远小于常规 DTFT 算法。

3.3.2 计算量比较　在 Chirp-Z 变换快速算法中，由于一般情况下 $A_0\ne 1,W_0\ne 1$(当 $A_0=1,W_0=1$ 时，Chirp-Z 变换即为 DTFT)，生成序列 $g(n)$ 时，需计算 ${A_0}^{-n}$ 和 ${W_0}^{0.5n^2}$；生成序列 $h(n)$ 时，需计算 ${W_0}^{-0.5n^2}$。因此在输出点数相同(即具有相同频率分辨率)的情况下，DTFT 快速算法较 Chirp-Z 变换快速算法少 $5N$ 次实数乘法，M 点 Chirp-Z 变换快速算法的总运算量约为 $S_{\mathrm{CZT}\times}$ 次实数乘法和 $S_{\mathrm{CZT}+}$ 次实数加法：

$$S_{\mathrm{CZT}\times}=6L\log_2 L+4L+18N+6M \tag{20}$$

$$S_{\mathrm{CZT}+}=9L\log_2 L+2L+4N+2M \tag{21}$$

4 仿真验证

为验证上述理论推导，以包含两个频率分量的多频信号 y_1 为例在MATLAB中进行如下仿真验证，

$$y_1 = \cos(2\times pi\times n\times f_1 / f_s) + \cos(2\times pi\times n\times f_2 / f_s + \theta) \quad (22)$$

其中 $f_1 = 68.5$ Hz，$f_2 = 70.2$ Hz，$n = 1:600$，$f_s = 5120$ Hz，相位 θ 为幅度 2π 的高斯分布的随机值。

4.1 DTFT 与 Chirp-Z 变换的等价性仿真验证

4.1.1 无噪声情况下的仿真验证

(1)基于信号 y_1，调用MATLAB中固有函数CZT计算 R 点Chirp-Z 变换，MATLAB中代码如下：

```
w=exp(-j*2*pi*(fmax-fmin)/(R*fs))
a=exp(j*2*pi* fmin /fs)
z=CZT( y1 ,R,w,a)
```

(2)由于 MATLAB 中没有专门的函数计算形如式(6)的 DTFT，自编函数 NEWDTFT 计算信号 y_1 的 M 点 DTFT，MATLAB 中代码如下：

```
function[X]=NEWDTFT(y1,n,fs, fmin, fmax,M)
f=linspace(fmin, fmax,M)
X=y1*(exp(-j*n'*(2*pi*f/fs)))
```

其中 M、R 分别表示DTFT和Chirp-Z 变换的输出点数，$R = M = 2048$，仿真结果如图2(a)所示。

4.1.2 高斯白噪声下的仿真验证

为验证在噪声背景下DTFT和Chirp-Z 变换的等价性，在上述正弦采样信号 y_1 中加入信噪比 SNR = −10 dB 的高斯白噪声，随机进行1000次 Monte Carlo仿真实验，基于DTFT和Chirp-Z 变换，f_1 和 f_2 的频率估计均方根误差均分别为 1.01 Hz 和 0.87 Hz。图2(b)为一次随机仿真实验的结果。

从图2所示的仿真结果知，虽然实现Chirp-Z 变换和DTFT的函数不同，但输出结果是相同的(图2(b)中频率估计值的细微差别源于单次随机实验中噪声的随机性)，故与上述理论分析所得结论一致：当且仅当 $A_0 = 1, W_0 = 1$ 时，DTFT与Chirp-Z 变换完全等价。

4.2 DTFT频谱细化特性仿真验证

为验证 DTFT 的频谱细化特性，调用自编函数 NEWDTFT 函数进行如下仿真实验，仅改变输出点数 M 的大小($M = 10,100,1000$)，其余实验参数设置同上，实验结果如图 3 所示。当 $M = 10$ 时，DTFT 谱根本无法分辨出信号 y_1 中的两个频率分量；随着输出点数 M 的不断增大，DTFT 频谱越平滑，频谱的局部特征越清晰；当 $M \geq 100$ 时，能够清楚地分辨出 y_1 中的两个频率分量，从而充分体现了 DTFT 的频谱细化特性。

4.3 DTFT 应用性能仿真

4.3.1 单频信号的频率估计

为说明 DTFT 在单频信号频率估计等方面的优越性，用 MATLAB 生成包含单个频率成分的正弦采样信号 y_2，

$$y_2 = \cos(2\times pi\times n\times f_3 / f_s + pi / 4) \quad (23)$$

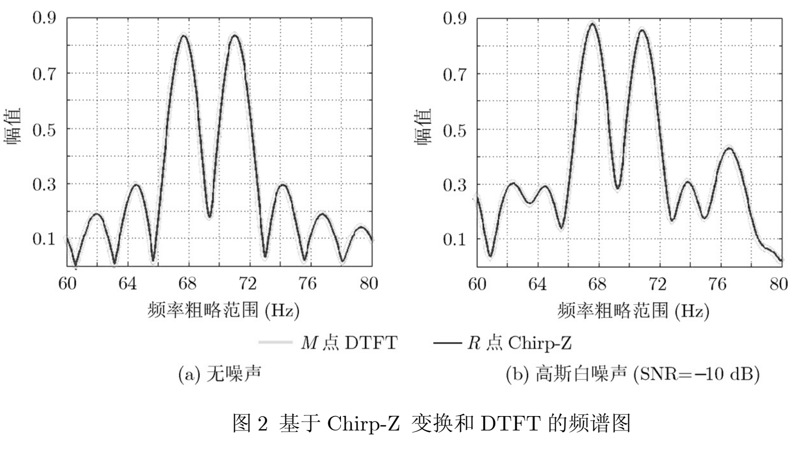
其中 $n = 2048$ 为采样点数，$f_s = 5120$ Hz 为采样频率，$f_3 = 68.5$ Hz 为信号频率。

在无噪声情况下和高斯白噪声情况下(SNR = −5 dB, −10 dB, −15 dB)分别采用 FFT 法，DTFT 法和 Chirp-Z 法对 y_2 进行频率估计，随机进行 1000 次 Monte Carlo 仿真实验，结果如表 1 所示。由于 DTFT 法和 Chirp-Z 法能对任意感兴趣的频段进行分析，在此设其频率分析范围为 60 ~ 80 Hz。

由表 1 所知，无论是在无噪声的理想情况下，还是在高斯白噪声(SNR = −5 dB, −10 dB, −15 dB)情况下，在单频信号的频率估计中，DTFT 法和 Chirp-Z 法的频率估计精度均较 FFT 法高，均方根误差大约分别是 FFT 法的 1/167, 1/39, 1/22 和 1/11。且在相同频率分辨率的情况下，DTFT 法和 Chirp-Z 法的估计精度完全相同，再次验证了 DTFT 法和 Chirp-Z 法的等价性。

4.3.2 多频信号的频率估计

为说明 DTFT 在多频信号频率估计方面的优越性，对包含两个密集频率



(a) 无噪声 (b) 高斯白噪声 (SNR=−10 dB)

图 2 基于 Chirp-Z 变换和 DTFT 的频谱图

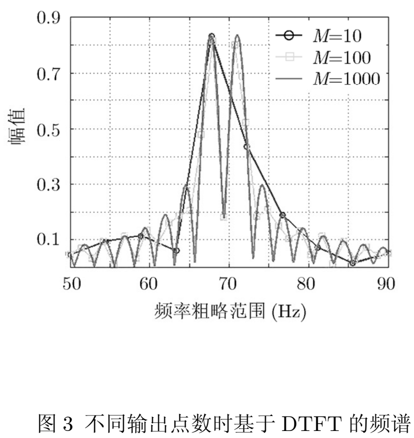


图 3 不同输出点数时基于 DTFT 的频谱图

表 1 基于 FFT/DTFT/Chirp-Z 的单频信号频率估计仿真结果

估计方法	f_3 的均方根误差(Hz)			
	SNR = −15 dB	SNR = −10 dB	SNR = −5 dB	无噪声
FFT 法	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
DTFT 法	0.0910	0.0460	0.0254	0.0059
Chirp-Z 法	0.0910	0.0460	0.0254	0.0059

成分的正弦采样信号 y_1 进行了如下仿真实验。DTFT 法和 Chirp-Z 法的频率分析范围设置同 4.3.1 节。在无噪声情况下和高斯白噪声(SNR = −15 dB, −10 dB, −5 dB)情况下分别采用 FFT 法、DTFT 法和 Chirp-Z 法对 y_1 进行频率估计，随机进行 1000 次 Monte Carlo 仿真实验，仿真结果如表 2 所示。图 4 为随机一次实验的示意图。

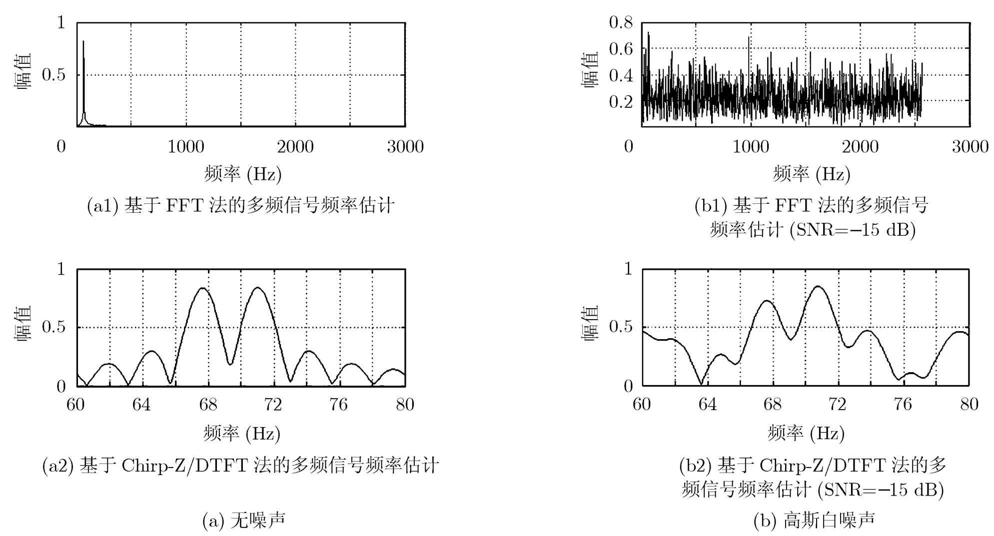
由于 y_1 中两个频率成分间隔为 $(70.2-68.5)$ Hz $=1.7$ Hz $<5120/2048$ Hz $=2.5$ Hz (FFT 的频率分辨率)，因此即使在无噪声的理想情况下 FFT 法也不能较准确地分辨出 y_2 中的两个频率成分(图 4(a))；在信噪比分别为 SNR = −15 dB, −10 dB, −5 dB 的高斯白噪声情况下，第 1 频率分量能较准确的识别出来，估计值的均方根误差均为 1 Hz，但第 2 频率分量估计值的均方根误差分别为 1432.1 Hz , 1316.9 Hz , 599.32 Hz，根本无法识别(见表 2)。

由上文分析知，DTFT 法和 Chirp-Z 法均具有频谱细化特性，因此在 60 ~ 80 Hz 频率分析范围内进行 2048 条谱线的细化后，频率分辨率由原来的 2.5 Hz 提高到接近 0.01 Hz，因此即使在信噪比为 −15 dB 的情况下，仍能够较准确的分辨出 y_1 中两个密集频率成分 f_1 和 f_2 (图 4(b))，且精度较高，f_1 和 f_2 估计值的均方根误差分别为 0.3440 Hz , 2.1360 Hz (见表 2)。且在相同频率分辨率下，基于 DTFT 法和 Chirp-Z 法的频率估计结果完全相同，再次验证了 DTFT 法和 Chirp-Z 法的等价性。

由上述仿真可知，无论是在单频信号还是多频信号的频率估计中，DTFT 法都具有明显优势，其精度远远高于 FFT 法，特别是在多频信号的频率估

表 2 基于 FFT/DTFT/ Chirp-Z 的多频信号频率估计仿真结果

估计方法	f_1 的均方根误差(Hz)	f_2 的均方根误差(Hz)	f_1 的均方根误差(Hz)	f_2 的均方根误差(Hz)	f_1 的均方根误差(Hz)	f_2 的均方根误差(Hz)	f_1 的均方根误差(Hz)	f_2 的均方根误差(Hz)
	SNR = −15 dB	SNR = −15 dB	SNR = −10 dB	SNR = −10 dB	SNR = −5 dB	SNR = −5 dB	无噪声	无噪声
FFT 法	1.0000	1432.1	1.0000	1316.9	1.0000	599.32	1.0000	24.800
DTFT 法	0.3440	2.1360	0.3200	1.8856	0.3208	1.5719	0.3164	0.5906
Chirp-Z 法	0.3440	2.1360	0.3200	1.8856	0.2969	1.5719	0.3164	0.5906



(a1) 基于 FFT 法的多频信号频率估计

(b1) 基于 FFT 法的多频信号频率估计 (SNR=−15 dB)

(a2) 基于 Chirp-Z/DTFT 法的多频信号频率估计

(b2) 基于 Chirp-Z/DTFT 法的多频信号频率估计 (SNR=−15 dB)

(a) 无噪声

(b) 高斯白噪声

图 4 基于 FFT/Chirp-Z/DTFT 的多频信号频谱图

计中，能够将 FFT 根本无法分辨出的两个密集频率成分准确地估计出来。另一方面，在相同条件下，DTFT 法的与 Chirp-Z 法的频率估计精度一样，但根据式(18)-式(21)的分析可知，DTFT 快速算法的计算量却远小于 Chirp-Z 快速算法。

5 结束语

本文通过分析DTFT与Chirp-Z 变换的联系与区别，理论推导与仿真验证了 DTFT 是一种特殊的 Chirp-Z 变换，具有频谱细化特性；设计了 DTFT 的快速算法，给出了详细的实现步骤。算法计算量分析与仿真实验表明：在相同频率分辨率下，DTFT 快速算法与 Chirp-Z 法的频率估计精度相同，但其计算量小于 Chirp-Z 快速算法。DTFT 的应用仿真结果表明，无论是在单频信号还是多频信号的频率估计中，DTFT 法的频率估计精度高于 FFT 法数 10 倍以上，特别是在多频信号的频率估计中，能够将 FFT 法根本无法分辨出的频率分量准确地估计出来。本文研究结果为信号频率估计和频谱细化提供了一种新思路和方法，在不增加硬件成本的条件下有效提高频率估计精度，能够广泛应用于窄带信号分析、图像处理、故障诊断等诸多领域，具有重要的理论意义和实用价值。

参 考 文 献

[1] 张海涛, 涂亚庆. 计及负频率影响的科里奥利质量流量计信号处理方法[J]. 仪器仪表学报, 2007, 28(3): 539–544.
Zhang Hai-tao and Tu Ya-qing. New signal processing method with negative frequency contribution for Coriolismass flowmeter[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2007, 28(3): 539–544.

[2] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 北京：清华大学出版社, 2003: 100–115, 192–195.
Hu Guang-shu. Digital Signal Pressing — Theory, Algorithm and Realization [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 100–115, 192–195.

[3] Prioakis J G and Manolakis D G. Digital Signal Processing: Principle, Algorithms, and Application [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2006: 200–215, 403–407.

[4] 周谋炎. 反卷积与信号复原[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001: 19–20.
Zhou Mou-yan. Deconvolution and Signal Recovery[M]. Beijing: China National Defense Industry Press, 2001: 19–20.

[5] Rabiner L R and Schafer R W. The Chirp-Z transform algorithm [J]. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1969, 17(2): 86–92.

[6] Granados-Lieberman D, Romero-Troncoso R J, and Cabal-Yepez E, *et al*.. A real-time smart sensor for high-resolution frequency estimation in power systems[J]. *Sensors*, 2009, 9(9): 7412–7429.

[7] Tang Yu, Xing Meng-dao, and Bao Zheng. The polar format imaging algorithm based on double Chirp-Z transforms[J]. *IEEE Geosciences and Remote Sensing Letters*, 2008, 5(4): 610–614.

[8] Wu Yu, Liu Zhen-xing, and Li Ru-yun. Fault diagnosis way based on subsection spectrum zoom analysis by CZT for squirrel cage induction motors[C]. 2008 International Conference on Condition Monitoring and Diagnosis, Beijing, China, April 21–24, 2008: 208–211.

[9] Liang Yi, Wang Hong-xian, and Zhang Long. An approach to forward looking FMCW radar imaging based on two-dimensional Chirp-Z transform[J]. *Science China-Information Sciences*, 2010, 53(8): 1653–1665.

[10] Drugman T, Bozkurt B, and Dutoit T. Chirp decomposition of speech signals for glottal source estimation[C]. ISCA Workshop on Non-Linear Speech Processing, Barcelona, 2009: June 27–27, 1345–1353.

[11] Tan S and Hirose A. Low-calculation-cost fading channel prediction using chirp Z-transform[J]. *Electronics Letters*, 2009, 45(8): 418–420.

肖 玮： 女，1982 年生，博士生，从事数字信号处理研究.
涂亚庆： 男，1963 年生，博士，教授，博士生导师，从事仪器仪表与信号处理、智能控制与自动化研究.
何 丽： 女，1984 年生，硕士，从事信号处理研究.