用于压缩感知信号重建的正则化自适应匹配追踪算法

刘亚新　　赵瑞珍　　胡绍海　　姜春晖
(北京交通大学信息科学研究所　北京　100044)
(北京市"现代信息科学与网络技术"重点实验室　北京　100044)

摘　要：压缩感知理论是一种充分利用信号稀疏性或者可压缩性的全新的信号采样理论。该理论表明，通过采集少量的信号值就可实现稀疏或可压缩信号的精确重建。该文在研究和总结已有重建算法的基础上，提出了一种新的基于正则化的自适应匹配追踪算法(Regularized Adaptive Matching Pursuit，RAMP)用于压缩感知信号的重建。该算法可在信号稀疏度未知的情况下，通过自适应过程自动调节候选集原子的个数，利用正则化过程实现支撑集的二次筛选，最终实现了信号的精确重建。实验结果表明，在相同测试条件下，该算法的重建效果无论从主观视觉上还是客观数据上均优于其它同类方法。

关键词：信号处理；压缩感知；稀疏表示；重建算法；匹配追踪
中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2010)11-2713-05
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01623

Regularized Adaptive Matching Pursuit Algorithm for Signal Reconstruction Based on Compressive Sensing

Liu Ya-xin　　Zhao Rui-zhen　　Hu Shao-hai　　Jiang Chun-hui
(*Institute of Information Science*, *Beijing Jiaotong University*, *Beijing* 100044, *China*)
(*Key Laboratory of Advanced Information Science and Network Technology of Beijing*, *Beijing* 100044, *China*)

Abstract: Compressive sensing is a novel signal sampling theory under the condition that the signal is sparse or compressible. In this case, the small amount of signal values can be reconstructed accurately when the signal is sparse or compressible. In this paper, a new Regularized Adaptive Matching Pursuit (RAMP) algorithm is presented with the idea of regularization. The proposed algorithm could control the accuracy of reconstruction by both the adaptive process which chooses the candidate set automatically and the regularization process which gets the atoms in the final support set although the sparsity of the original signal is unknown. The experimental results show that the proposed algorithm can get better reconstruction performances and it is superior to other algorithms both visually and objectively.

Key words: Signal processing; Compressive sensing; Sparse representation; Reconstruction algorithm; Matching pursuit

1　引言

基于稀疏表示的压缩感知(compressive sensing)[1−4]作为信号处理领域中诞生的全新理论，越来越引起了众多相关领域研究人员的热切关注。该理论在信号的获取方式上突破了传统的奈奎斯特采样定理，革命性地实现了对数据获取的同时进行适当地压缩，成功克服了采样数据量巨大，传感元、采样时间以及数据存储空间等物理资源浪费严重的问题。针对可稀疏表示的信号，这种能够将数据采集和数据压缩合二为一的新理论将在信号处理领域有着更为广阔的应用前景。

重建算法作为广义压缩感知过程中的一个至关重要的环节，其关键问题是如何从仅有的低维数据中最大程度地恢复出原始的高维数据。截止目前，国外此领域研究人员经过严谨的数学证明和反复的实验论证，已有多种用于压缩感知重建的算法发表，如梯度投影法[5]、基追踪法[6]、匹配追踪法[7]等，其中匹配追踪类方法应用最为广泛，具有代表性的有匹配追踪法(Matching Pursuit，MP)、正交匹配追踪法(Orthogonal Matching Pursuit，OMP)[8]、正则化正交匹配追踪法(Regularized Orthogonal Matching Pursuit，ROMP)[9,10]等等，但上述算法

2009-12-22 收到，2010-03-31 改回
教育部留学回国人员科研启动基金(教外司留[2009]1341 号)资助课题
通信作者：赵瑞珍　rzhzhao@bjtu.edu.cn

都要求已知信号的稀疏度，给实际应用带来很大不便。本文将稀疏自适应匹配追踪的思想应用在ROMP算法中，提出了一种正则化自适应匹配追踪算法(Regularized Adaptive Matching Pursuit，RAMP)，实验结果表明，该算法重建效果好，应用范围广。

2 压缩感知与重建算法

设$\boldsymbol{x}$为长度为N的原始信号，$\boldsymbol{y}$为长度M的观测信号，$\boldsymbol{\Phi}_{M\times N}$ ($M<N$)为测量矩阵，且满足$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}$。若$\boldsymbol{x}$为$K$-稀疏信号，则当$K,M,N$之间满足$M\ge K\cdot\lg(N)$时，$\boldsymbol{x}$可精确重建。本文要解决的问题就是如何从观测信号$\boldsymbol{y}$中重建出信号$\boldsymbol{x}$，通常采用如下最优化问题求解：

$$\min\|\boldsymbol{x}\|_0,\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x} \tag{1}$$

实际中，允许一定程度的误差存在，因此将原始的最优化问题转化成一个较简单的近似形式求解，其中δ是一个极小的常量：

$$\min\|\boldsymbol{x}\|_0,\quad \text{s.t.}\quad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi x}\|_2^2\le\delta \tag{2}$$

上述l_0范数最小问题是一个NP难问题，很难直接求解。匹配追踪类方法为其近似求解提供了有力工具，且文献[11]中指出了该类方法用于稀疏信号重建时具有一定的稳定性。文献[8]中提出的OMP算法延续了匹配追踪算法中原子的选择准则，但是实现了递归地对已选原子集合进行正交化以保证迭代的最优性，从而减少了迭代次数。此后，Needell和Vershynin等人在OMP算法的基础上将正则化过程用于稀疏度K已知的OMP算法中，提出了ROMP算法。ROMP算法与OMP算法的不同之处在于，该算法首先根据相关原子挑选多个原子作为候选集，然后从候选集中按照正则化原则挑选出部分原子，最后将其并入最终的支撑集，从而实现了原子的快速、有效选择。最近出现的子空间匹配追踪算法(Subspace Pursuit，SP)[12]和压缩采样匹配追踪算法(Compressive Sampling Matching Pursuit，CoSaMP)[13]引入了回退筛选的思想，这些算法的重建质量与线性规划方法(Linear Programming，LP)[14]相当，同时重建复杂度低，但是这些算法都是建立在稀疏度K已知的基础上。

然而实际应用中信号的稀疏度K往往是未知的，由此出现了对稀疏度K自适应的稀疏自适应匹配追踪算法(Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP)[15]，它通过设置一个可变步长，逐步对信号稀疏度进行估计，因此可以在K未知的情况下获得较好的重建效果，速度也远快于OMP算法。基于ROMP算法和SAMP算法的突出优势，本文提出了正则化自适应匹配追踪算法，该算法解决了稀疏度K未知的情况下信号精确重建问题，同时也是一种近似解决l_0范数最小问题的贪婪迭代算法。

3 正则化自适应匹配追踪算法

文献[9]中提出的ROMP算法对所有满足约束等距条件(Restricted Isometry Property，RIP)[16]的矩阵和所有稀疏信号都可以精确重建，且重建速度较快。对于稀疏度为K的信号重建问题，ROMP算法首先根据相关原则进行原子的一次筛选，通过求余量$\boldsymbol{r}$与测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$中各个原子之间内积的绝对值，来计算相关系数$\boldsymbol{u}$。

$$\boldsymbol{u}=\left\{u_j \middle| u_j=\left|<\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi}_j>\right|, j=1,2,\cdots,N\right\} \tag{3}$$

并将按照此方法筛选出的K个原子的索引值存到候选集J中以便进行原子的二次筛选。

ROMP算法采用正则化过程进行原子的二次筛选，即根据式(4)将J中索引值对应的原子的相关系数分成若干组：

$$|\boldsymbol{u}(i)|\le 2|\boldsymbol{u}(j)|,\quad i,j\in J \tag{4}$$

然后选择能量最大的一组相关系数对应的原子索引值存入J_0中。该正则化过程可以使得ROMP算法最多经过K次迭代便可以得到一个原子数$|\Lambda|$小于$2K$的支撑集$\boldsymbol{\Phi}_\Lambda$用于精确重建信号，对于没有选入支撑集的原子，正则化过程则能保证它们的能量一定远小于被选入原子的能量，是一种简单有效的原子筛选方法。经过一定的迭代得到用于信号重建的支撑集后，再采用最小二乘法进行信号逼近以及余量更新：

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\arg\min_{i\in R^{\Lambda}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi}_\Lambda\boldsymbol{x}\|_2 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}_{\text{new}}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi}_\Lambda\hat{\boldsymbol{x}} \tag{6}$$

ROMP算法的基本步骤如下：

(1)初始余量$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{y}$，估计信号稀疏度为$K$，迭代次数$n$=1，索引值集合$\Lambda=\varnothing$，$J=\varnothing$；

(2)用式(3)计算相关系数$\boldsymbol{u}$，并从$\boldsymbol{u}$中寻找K个最大值对应的索引值存入J中；

(3)对J中索引值对应原子的相关系数进行正则化，并将正则化结果存入集合J_0中，该集合中原子的相关系数必须满足式(4)；

(4)更新支撑集$\boldsymbol{\Phi}_\Lambda$，其中$\Lambda=\Lambda\cup J_0$；

(5)应用式(5)得到$\hat{\boldsymbol{x}}$，同时用式(6)对余量进行更新；

(6)若$|\Lambda|\ge 2K$，则停止迭代；否则令$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\text{new}}$，$n=n+1$，转步骤(2)。

从上述算法的步骤(1)中可以看出，只有首先对信号稀疏度进行适当估计才能进一步精确重建信

号，但大量实验表明，如果对信号的稀疏度预先估计过小，那么迭代多次依然无法达到停止迭代条件；如果对稀疏度估计的过大，那么重建质量无论从视觉效果还是从客观数据上都很差，远不能达到精确重建的效果。

本文算法在采用 ROMP 算法中正则化过程的基础上，结合了文献[14]中 SAMP 算法的自适应思想，在稀疏度问题上克服了正则化过程的局限性，算法本身可以在迭代过程中自动调整所选原子数目来重建稀疏度未知的信号。算法中采用转换阶段(stage) 的方式逐步增加该原子数，将同一个迭代过程分成多个阶段，设置一个可变步长(size) 代替所选原子数目，相邻两个阶段所对应的支撑集的大小之差即为当前步长，随着步长的增加和支撑集的不断增大，实现了在未知稀疏度的前提下步长逐步逼近 K 进而精确重建出原始信号的目的。

总之，正则化自适应匹配追踪(RAMP)算法是一种结合了ROMP算法正则化思想以及SAMP算法自适应思想的新的重建算法，保证了全局优化的同时提高了算法的运算速度。下列步骤具体说明了该算法的过程，其中 ε_1 与 ε_2 分别为控制迭代次数与阶段转换的阈值，为达到较好的重建精度以及严格控制阶段转换的目的，根据所处理信号的具体信息适当地选择阈值的大小，算法具体步骤如下：

(1)初始余量 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{y}$，初始步长 $\mathrm{size} \neq 0$，阶段 $\mathrm{stage} = 1$，迭代次数 $n = 1$，索引值集合 $\varLambda = \varnothing$，$J = \varnothing$；

(2)若 $\|\boldsymbol{r}\|_2 \le \varepsilon_1$，则停止迭代，利用得到的原子进行最终的信号重建；否则进入步骤(3)；

(3)利用式(3)计算相关系数 $\boldsymbol{u}$，并从 $\boldsymbol{u}$ 中寻找 size 个最大值对应的索引值存入 J 中；

(4)对 J 中索引值对应原子的相关系数进行正则化，并将正则化结果存入集合 J_0 中，该集合中原子的相关系数必须满足式(4)；

(5)更新支撑集 $\varPhi_\varLambda$，其中 $\varLambda = \varLambda \cup J_0$；

(6)应用式(5)得到 $\hat{\boldsymbol{x}}$，同时用式(6)对余量进行更新；

(7)若 $\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{new}} - \boldsymbol{r}\| \le \varepsilon_2$，则令 $\mathrm{stage} = \mathrm{stage} + 1$，$\mathrm{size} = \mathrm{size} \cdot \mathrm{stage}$，转步骤(3)；否则，令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{new}}$，$n = n + 1$，转步骤(2)。

正如上述 RAMP 算法中的步骤(2)和步骤(7)所示，通过设置两个阈值，整个实验过程可以自适应地判断是否需要调整当前步长，以决定是否进入下一个阶段或是下一次迭代。因此该算法不需要将稀疏度 K 作为先验知识进行信号重建，避免了由于步长选定的过小(远小于信号稀疏度)导致的迭代多次依然无法达到停止迭代条件的问题，同时也避免了同类其它算法中阈值选得太小造成的需要较多次迭代才能达到所需重建精度的过匹配现象。步骤(4)的正则化过程保证了最多经过 K 次迭代就可以得到用于信号精确重建的支撑集，使得该算法能获得较好的重建质量的同时，大大缩短了运行时间。

4　实验结果对比及分析

为了说明 RAMP 算法的优越性，本文通过 MATLAB 处理平台对该算法进行各项测试。首先选取 1 维信号进行测试，将对长度为 $N = 300$ 的 1 维高斯随机信号进行稀疏化从而生成一个稀疏信号 $\boldsymbol{x}$，$M = 75$，$K = 20$，即压缩比 M/N=0.25。实验中采用高斯随机矩阵作为测量矩阵，重建信号为 $\hat{\boldsymbol{x}}$，重建效果如图 1 所示。

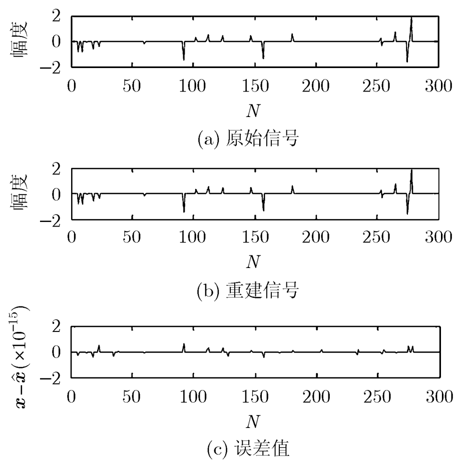

图 1 RAMP 算法 1 维信号重建质量

从上述实验可以看出，RAMP 算法对 1 维信号的重建效果很好，相对误差较小，算法收敛性也较好。为了进一步说明 RAMP 算法的重建效果，本文采用大小为 512×512 的 Lena 图像作为测试图像，继续进行实验。为便于测量矩阵的生成，将原始 Lena 图像数据分成 1024 个大小为 16×16 的块，并将每一块排成一列进行后续处理。利用该方法对原始图像进行预处理之后，采用离散余弦变换作为稀疏变换以及高斯随机矩阵作为测量矩阵。文中将基于迭代贪婪追踪的稀疏重建算法中的 MP，OMP，ROMP，SAMP 等算法与本文提出的 RAMP 算法进行了不同角度的对比和分析。

图 2 直观地给出了大小为 512×512 的 Lena 图像在压缩比 M/N=0.5 时 MP，OMP，ROMP，SAMP 以及 RAMP 算法的重建效果。由图可见，在压缩比相同的情况下，RAMP 算法进行图像重建的效果相对于 MP，OMP，ROMP 和 SAMP 算法效果更好。

为了进一步说明图 2 所示结果，表 1 给出了压缩比为 M/N=0.5 时，分块处理的 MP 算法，OMP 算法，ROMP 算法，SAMP 算法以及 RAMP 算法对 Lena 图像重建的峰值信噪比、相对误差、匹配度及运行时间，如图 3-图 6 所示。本文中，当 $\boldsymbol{x}$ 为原信号，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为重建信号时，匹配度 α 的计算方法为

$$\alpha = 1 - \frac{\left| \|\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 - \|\boldsymbol{x}\|_2 \right|}{\left| \|\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 + \|\boldsymbol{x}\|_2 \right|} \tag{7}$$

由表 1 及图 3-图 6 可以看出，RAMP 算法相对于经典的 MP，OMP，ROMP，SAMP 算法在峰值信噪比、相对误差、匹配度以及运行时间上都有不同程度的改进。当 M/N=0.1 时，5 种算法在同样的低压缩比的情况下重建效果都比较差，但是随着压缩比的不断增加，RAMP 算法所重建信号的峰值信噪比相对于 MP 和 OMP 两种算法都有明显提高。从图 4 可以清晰地看出，当 M/N>0.1 时，该算法重建出的信号与实际信号的偏离程度较 MP 和 OMP 更小。从匹配度的角度分析，该算法在压缩比为 0.5 的情况下至少可以重建出达到原始信号 96.35%相似度的信号。此外，随着迭代次数的增加以及 RAMP 算法的峰值信噪比的逐步提高，迭代余量和重建信号的相对误差越来越小，因此从实验的角度验证了本文算法具有一定的收敛性。

经过大量实验，本文选择一组对信号稀疏度估计最佳的 ROMP 算法数据进行实验对比，上述列出的各种实验参数表明，由于 RAMP 算法对稀疏度的自适应估计过程，在运行时间上相对于 ROMP 算法较长，但是图像的重建质量相对于 ROMP 算法有一定程度的提高。在考虑到同等实验条件的前提下，本文均采取相同的方法对图像进行预处理进而进行各项对比实验，其中，由于 SAMP 算法在原子的候选集和最终支撑集的选择上相对于 RAMP 算法的原子选择方式计算量较大，因而在运行时间上比 RAMP 算法长，且若分块预处理时块尺度较大，本文算法在运行时间方面的优势就更为明显。综合各种算法的优劣势对比结果可知，本文所提出的算法是一种具有一定优势且优于上述算法的新算法。

5 结论

本文在深入研究了压缩感知理论各种经典重建算法，尤其是 ROMP 和 SAMP 算法的基础上，针对 ROMP 重建算法必须已知信号稀疏度的缺点，提出了一种新的正则化自适应匹配追踪算法，该算法采用简单而有效的正则化过程实现对原子库的筛选，同时通过设置两个迭代阈值，对信号的稀疏度

(a) 原始图像 (b) MP 算法

(c) OMP 算法 (d) ROMP 算法

(e) SAMP 算法 (f) RAMP 算法

图 2 各算法 2 维信号重建质量对比(M / N=0.5)

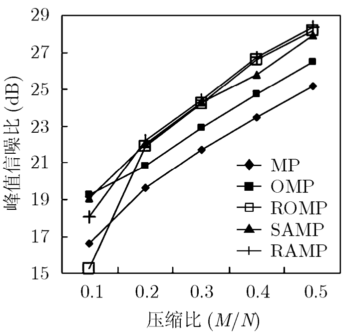

图 3 峰值信噪比分析曲线

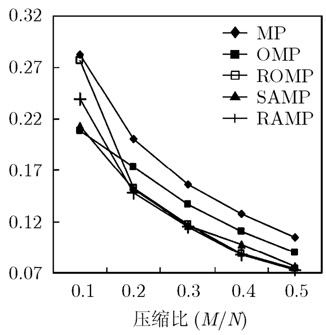

图 4 相对误差分析曲线

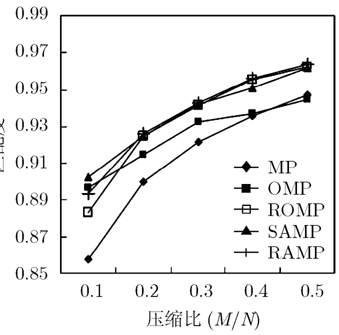

图 5 匹配度分析曲线

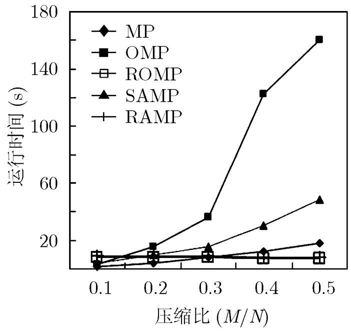

图 6 运行时间对比曲线

表 1 各算法重建质量对比

算法名称	峰值信噪比(dB)	相对误差	匹配度	运行时间(s)
MP	19.55	0.1053	0.9472	18.202
OMP	26.49	0.0908	0.9548	160.433
ROMP	28.18	0.0747	0.9626	7.802
SAMP	27.92	0.0771	0.9616	48.22
RAMP	28.40	0.0729	0.9635	9.010

进行自适应地估计，从而可对稀疏度未知的信号实现信号重建。经过大量实验证明，本算法的重建质量无论在视觉效果上还是客观数据上均优于现有同类算法，是一种重建效果较好的方法。

参 考 文 献

[1] Candés E. Compressive sampling. Proceedings of international congress of mathematicians. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, 2006: 1433–1452.

[2] Baraniuk R. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4): 118–121.

[3] Zhao Rui-zhen, Liu Xiao-yu, and Li Ching-chung, *et al*.. Wavelet denoising via sparse representation. *Science in China Series F*, 2009, 52(8): 1371–1377.

[4] Candès E, Romberg J, and Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207–1223.

[5] Figueiredo M, Nowak R, and Wright S. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586–597.

[6] Chen S B, Donoho D L, and Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33–61.

[7] Mallat S and Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397–3415.

[8] Tropp J and Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 53(12): 4655–4666.

[9] Needell D and Vershynin R. Greedy signal recovery and un-certainty principles. Proceedings of the Conference on Computational Imaging，San Jose, USA, SPIE, 2008: 1–12.

[10] Needell D and Vershynin D. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(3): 317–334.

[11] Donoho D L, Elad M, and Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6–18.

[12] Dai W and Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. 2008 5th International Symposium on Turbo Codes and Related Topics, TURBOCODING, Lausanne, Switzerland, 2008: 402–407.

[13] Needell D and Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. ACM Technical Report 2008-01, California Institute of Technology, Pasadena, 2008, 7.

[14] Candes E and Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203–4215.

[15] Thong T Do, Gan Lu, Nguyen, and Tran D. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, 2008, 10: 581–587.

[16] Candès E, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.

刘亚新： 女，1984 年生，硕士生，从事压缩感知重建方法的研究.

赵瑞珍： 男，1975 年生，博士，副教授，从事图像处理、小波变换、压缩感知等方面的研究.

胡绍海： 男，1964 年生，博士，教授，主要从事数字信号处理、人工神经网络等方面的研究.

姜春晖： 男，1987 年生，硕士生，从事压缩感知重建方法的研究.