非规则 LDPC 度分布优化设计

李二保[①] 雷 菁[①] 徐富兵[①②]
[①](国防科学技术大学电子科学与工程学院 长沙 410073)
[②](中国人民解放军海军 91269 部队)

摘 要： 一对好的度分布可以有效降低 LDPC 的错误平层和编译码复杂度，在 AWGN 信道下，通过高斯近似分析方法可近似计算给定度分布的 LDPC 译码门限，利用差分进化算法可优化度分布以获得具有最大门限的度分布，仿真结果表明获得的度分布的译码门限比线性算法优化结果要好 0.15dB 左右。

关键词： LDPC；差分进化；高斯近似；门限值；度分布
中图分类号： TN911.22 **文献标识码：** A **文章编号：** 1009-5896(2008)11-2788-04

Design and Optimization of Degree Distributions of Irregular LDPC

Li Er-bao[①] Lei Jing[①] Xu Fu-bing[① ②]
[①](*School of Electronics Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)
[②](*Unit* 91269 *of the PLA Navy*)

Abstract: Good degree distributions can improve the error-floor and reduce the complication in encoding and decoding of LDPC. Under AWGN channel, Gaussian approximation algorithm can analyze the decoding threshold of LDPC presented by their degree distributions. Using differential evolution, the degree distributions that possess maximal threshold can be gotten. Through simulation results, the optimized degree distributions which possess a 0.15dB better noisy threshold than using linear algorithm.

Key words: LDPC; Differential evolution; Gaussian approximation; Threshold; Degree distribution

1 引言

LDPC 是 Gallager 于 1962 年在其博士论文中首先提出的逼近 Shannon 限的好码[1]。在码长较长、度分布及码型设计适当时，其性能优于 Turbo 码。Luby 等发现非规则 LDPC 比规则的具有更好的门限[2]。然而对含有小环的 LDPC 的性能分析比较麻烦，Richardson 等在无环假设下提出密度进化理论来对无限长 LDPC 进行近似分析[3]，对于给定度分布的 LDPC 码集，该理论通过研究消息密度进化情况来确定译码门限值。然而利用密度进化计算门限并用它来优化度分布时的计算量非常大，为此 Chung 等针对 AWGN 信道提出高斯近似分析方法[4]，将无限维的问题转化为一维问题，计算量得到极大的降低。评价度分布好坏的一个重要标准就是译码门限的大小[5]，然而对于在连续空间中如何有效地搜索得到一对好的度分布，则需要选择一个好的优化算法，差分进化算法[6]被证明是一种比较有效的非线性优化算法，本文在选择适当进化策略的同时对停止准则进行改进后使其更加适合 LDPC 的度分布优化，对获得的度分布进行高斯近似分析，其门限要比通过线性算法优化得到的结果[7]好 0.15dB。

2007-05-28 收到，2007-11-06 改回
国家自然科学基金项目(60572176)资助课题

本文第 2 节概述了 LDPC 的基本知识和密度进化理论的高斯近似方法。第 3 节是关于差分进化算法及其参数选择的内容，最后给出了本文利用差分进化和高斯近似方法获得的一些好的度分布及其门限。

2 LDPC 基本概念及高斯近似方法简介

LDPC 是具有稀疏奇偶校验矩阵的线性分组码。LDPC 码集可以由一对度分布 (λ,ρ) 确定，即由变量节点和校验节点的度分布函数 $\lambda(x)=\sum_{i=2}^{l_{\max}}\lambda_i x^{i-1}$ 和 $\rho(x)=\sum_{i=2}^{r_{\max}}\rho_i x^{i-1}$ 确定，其中 $l_{\max}$ 和 $r_{\max}$ 分别表示变量节点和校验节点的最大度数。规则码 (d_v,d_c) 是一种特殊情形，它的度分布多项式为 $\lambda(x)=x^{d_v-1},\rho(x)=x^{d_c-1}$。

LDPC 常用译码算法是基于 Tanner 图的和积算法(sum-product algorihm)。在无环假设下，如果一个规则 LDPC 码 (d_v,d_c) 没有长度小于或等于 $2l$ 的环，那么在 l 次迭代内，可以假定所有的消息变量是独立的[3]。设 u_0 表示变量节点接收信号的对数似然比(LLR)消息，v 和 u 分别表示变量节点和校验节点发送给各自邻接节点的 LLR 消息。那么，变量节点和校验节点的消息更新规则可表示为

$$v=u_0+\sum_{i=1}^{d_v-1}u_i,\qquad u=2\tanh^{-1}\prod_{i=1}^{d_c-1}\tanh\frac{v_i}{2} \quad (1)$$

译码算法根据上面的消息更新迭代后的 LLR 消息进行译码判决，然而对于给定度分布的 LDPC 是存在译码门限的，对于 AWGN 信道，门限可以定义为噪声方差，当噪声方差 $\delta < \delta^*$ 时，随着迭代次数或者码长的增加，误码率可以趋于 0 的 δ^*，反之错误概率不会收敛于 0。

对于给定 $\left(\lambda,\rho\right)$ 的 LDPC 码集，它的门限值是可由密度进化理论确定，而这种分析就是在平均意义下对译码过程的理想近似(假设无环且码长无限)。如设定需要的误码率为 10^{-6}，对噪声方差为 δ' 的信道按式(1)进行消息迭代，若在设定迭代次数内达到误码率要求，说明噪声方差 δ' 小于门限，可以增加噪声方差，否则 δ' 大于门限，减小噪声方差，如此不断变化噪声方差，直到获得可容忍的最大噪声方差——门限。然而按式(1)计算消息密度存在卷积运算，计算量非常大[3]。为降低运算量，Chung 等针对 AWGN 信道提出高斯近似方法，假设消息密度均为高斯分布且满足独立性要求的，那么式(1)中的消息密度都是独立高斯分布的，且其均值与方差满足 $\sigma^2 = 2m$ [4]，因此只要知道消息密度的均值就可以完全确定消息密度。

令 m_u m_v 分别表示 u 、 v 的均值，则 $m_v{}^{(\ell)} = m_{u_0} + (d_v-1)m_u{}^{(\ell-1)}$，其中 m_{u_0} 表示初始消息 u_0 的均值，ℓ 表示第 ℓ 迭代，省略下标 i 是因为 u_i 是独立同分布的[4]，它们的均值都是 m_{u_0}。则第 ℓ 迭代的均值 $m_u{}^{(l)}$ 的更新计算为

$$m_u{}^{(\ell)} = \phi^{-1}\left(1-\left[1-\phi\left(m_{u_0}+(d_v-1)m_u{}^{(\ell-1)}\right)\right]^{d_c-1}\right) \tag{2}$$

其中函数 $\phi(x)$ 定义为

$$\phi(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sqrt{4\pi x}}\displaystyle\int_R \tanh\dfrac{u}{2}e^{-\frac{(u-x)^2}{4x}}\mathrm{d}x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

并且 $\phi(x)$ 是连续单调的，$\phi(0)=1$，$\phi(\infty)=0$，初始的校验节点传递的消息均值都为零，即 $m_u^{(0)}=0$。

以上是规则 LDPC 在高斯近似分析中消息的迭代更新公式，这些都可以类推到非规则 LDPC[4]，因此度为 i 的变量节点在第 ℓ 次迭代中输出消息的均值为

$$m_{v,i}^{(\ell)} = m_{u_0} + (i-1)m_u^{(\ell-1)} \tag{3}$$

第 ℓ 次迭代校验节点 v 接收的消息密度为

$$f_v{}^{(\ell)} = \sum_{i=2}^{d_l}\lambda_i N\left(m_{v,i}^{(\ell)}, 2m_{v,i}^{(\ell)}\right) \tag{4}$$

由此可得

$$E\left[\tanh\frac{v^{(\ell)}}{2}\right] = 1-\sum_{i=2}^{d_l}\lambda_i\phi\left(m_{v,i}^{(\ell)}\right) \tag{5}$$

因此度为 j 的校验节点在第 ℓ 次迭代中输出消息的均值 $m_{v,i}^{(\ell)}$ 为

$$m_{v,j}^{(\ell)} = \phi^{-1}\left(1-\left[1-\sum\nolimits_{i=2}^{d_l}\lambda_i\phi(m_{v,i}^{(\ell)})\right]^{j-1}\right) \tag{6}$$

又校验节点度为 j 的概率为 ρ_j，因此可以获得平均意义下的校验节点输出的消息的均值为

$$m_u^{(\ell)} = \sum\nolimits_{j=2}^{d}\rho_j\phi^{-1} \cdot\left(1-\left[1-\sum\nolimits_{i=2}^{d}\lambda_i\phi\left(m_{u_0}+(i-1)m_u{}^{(\ell-1)}\right)\right]^{j-1}\right) \tag{7}$$

这样就得到高斯近似下的消息迭代公式，与文献[3]中的消息迭代公式(7)、式(9)对比没有卷积运算，因此复杂度小了很多，另外从文献[4]中图 4、图 5 对于两种不同迭代公式的仿真结果来看，对变量节点输出的消息的描述，高斯近似与离散密度进化理论两种实现方法非常接近，满足门限分析的要求。

3　差分进化算法及其改进

通过上面的分析，已经可以确定对于一个给定度分布 $\left(\lambda,\rho\right)$ 的 LDPC 的门限值，因此本文的目标就是在 AWGN 信道下寻找一个好的度分布以期获得对于给定度和码率的最大的门限值。这是一个连续空间非线性代价方程求最值的优化问题，差分进化被证明是一种非常有效的算法[6]。

因变量节点和校验节点度分布满足和为 1 约束与码率约束，令 $\beta = 1-R$，R 为码率[3]，则

$$\sum_i\frac{\rho_i}{i} = \beta\sum_i\frac{\lambda_i}{i},\quad \lambda_2 = 1-\sum_{i=3}^{\ell_{\max}}\lambda_i,\quad \rho_2 = 1-\sum_{i=3}^{r_{\max}}\rho_i \tag{8}$$

由此可以得到

$$\lambda_{l_{\max}} = \frac{\dfrac{1-\beta}{2}+\displaystyle\sum_{i=3}^{r_{\max}}\rho_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{2}\right)-\beta\sum_{i=3}^{l_{\max}-1}\lambda_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{2}\right)}{\beta\left(\dfrac{1}{l_{\max}}-\dfrac{1}{2}\right)}$$

因 $\lambda_1=\rho_1=0$，而 $\lambda_2,\rho_2,\lambda_{l_{\max}}$ 可由上面的约束条件获得，因此只要优化一个 $L = l_{\max}+r_{\max}-5$ 维向量 $\boldsymbol{p}=(\lambda_3 L\lambda_{l_{\max-1}}$，$\rho_3 L\rho_{r_{\max}})$，适当地选择这些分量就可获得具有最大门限的度序列向量。

差分进化是一种并行搜索算法，它可避免错误地收敛，并保证向量跳出局部最小点。本文修改了文献[6]提出的算法的更新规则和停止准则，使其适合 LDPC 的度序列优化，且收敛速度较快。具体步骤如下：

初始化　先随机产生 NP 个 L 维向量 $p_{i,G}$，每个向量均满足式(8)，其中 NP 可取 10~30 L，G 代表迭代次数，每个向量的高斯近似门限值记为 $p_{i,G}'(i=0,1\cdots,\mathrm{NP}-1)$，用 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{best},G}$ 来保存具有最大门限值的向量。

进化　在 G+1 次迭代，从 [0, NP -1] 中随机地选择 4 个不同的整数 r_1,r_2,r_3,r_4，均与当前更新的向量下标 i 不同，则更新向量可以表示为

$$\boldsymbol{v}_{i,G+1} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{best},G} + F\left(p_{r_1,G}-p_{r_2,G}+p_{r_3,G}-p_{r_4,G}\right) \tag{9}$$

F 是差分偏移的放大系数，一般可以选择 0.5。本文采用的策略是每次更新时都以上次迭代更新寻找到的最好的测试向量 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{best},G}$ 作为基本向量，这样的进化策略加快了迭代的收敛速度，但是会降低向量空间集的差异性，因为随着迭代次

数的增加，向量空间集中的向量都趋向于具有最佳门限的向量 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{best},G}$，使得再迭代时向量的变化范围变小，为了增加向量空间的差异性，本文在向量更新时对向量中的分量采用一种有选择性的更新，如下式

$$v'_{ij,G+1}=\begin{cases}v_{ij,G+1}, & \text{if } \mathrm{rand}(i)<\mathrm{CR} \ \text{或} \ i=\mathrm{index}(j)\\ p_{ij,G}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

CR 取自 $(0,1]$，$\mathrm{rand}(i)$产生一个随机小数，$i=\mathrm{index}(j)$表示更新的向量的所有分量中至少有一个分量取自迭代产生的向量，这样向量空间的差异性得到一定的保证，有利于跳出局部最小点。

选择 比较门限，若 $p'_{i,G+1}$ 比 $p'_{i,G}$ 大，则 $p_{i,G+1}$ 更新为 $v'_{i,G+1}$，否则 $p_{i,G+1}=p_{i,G}$，每次迭代均更新向量集中的所有向量。

停止准则 经过有限次的迭代，向量空间的差异变小，在这里由于每个向量对应于一个噪声门限，因此可以利用噪声门限的方差来衡量这种差异性，例如当需要的噪声门限精度为 10^{-5} 时，则当向量空间中的门限方差 $<10^{-7}$ 时迭代就可以停止了，否则跳转到进化继续迭代。这样的停止准则比设置最大的迭代次数更加有效，当寻找到的度分布的门限已经非常接近最佳门限值时，再增加迭代次数时门限的变化将非常小，因此当达到需要的精度就跳出迭代的做法在优化时可以在减少迭代次数的同时达到比较理想的优化效果。

在 AWGN 信道下，通过上面的迭代就可以得到给定度和码率的具有最佳噪声门限的度分布$\left(\lambda,\rho\right)$，当然在产生、选择更新向量时还需要考虑到稳定性条件等问题[3]。

4 仿真结果

表 1 给出的是一些通过差分进化算法寻找到的好的度分布，为简化度分布设计，假设校验节点只有两种度分布，且是连续的[4]，这样获得的度分布往往具有较好的门限且对于校验节点只要给出平均度就可完全确定其度分布，因为校验节点度分布多项式可表示为 $\rho(x)=(1-\rho)x^{j-1}+\rho x^{j}$，则平均度 $\rho_{\mathrm{av}}=(j-1)(1-\rho)+\rho j=j-1+\rho$，变量节点最大度 d_v 分别取 20、30、50、80、100、200。向量空间中的向量数 $\mathrm{NP}=20L$，停止准则中当噪声门限方差 $<10^{-8}$ 时跳出迭代。本文选择的进化策略是第 3 节式(9)的策略，表 1 中给的度分布确定的 LDPC 码集的码率均为 0.5。其中 $\mathrm{SNR_d}$ 表示与文献[7]中表 1 的门限差值，由仿真结果可以看出本文改进的算法比文献[7]中具有同样的度分布获得的门限好 0.15dB 左右。

5 结束语

构造好的度分布在 LDPC 的构造中占有十分重要的位置，随着 LDPC 在各种标准中的日益广泛应用，如何获得实用且易于实现的 LDPC 一直困扰着人们，本文通过改进差分进化算法的进化规则和停止准则，并结合高斯近似分析方法来进行度分布优化设计，获得了码率为 0.5 的一些具有较大噪声门限值的度分布。好的度分布不仅可以降低误码平层，同时可以有效地降低编译码复杂度，因为如果度分布构造合理，编码复杂度只与码长呈线性增长[5]，同时仿真表明，即使对于同一门限和相同的度，其度分布也是可以不完全相同的，因此今后希望能在度分布设计中增加更多约束，以期在构造具体的码的时候朝着编码结构简单且易于硬件实现的准循环类 LDPC 方向靠拢。

表 1 码率为 0.5 的度分布及其门限

$d_{\max}$	20	30	50	80	100	200
λ_2	0.22011	0.19513	0.18858	0.17087	0.17193	0.15501
λ_3	0.17239	0.13800	0.13403	0.11964	0.11372	0.08466
λ_4	0.02935	0.10850	0.10062	0.10067	0.10202	0.13172
λ_6	0.15955		0.16531			
λ_9	0.06062	0.13116				
λ_{10}	0.00623	0.06860	0.04180	0.21375	0.24307	
λ_{11}		0.04061	0.02198	0.00884		0.07012
λ_{12}			0.01302	0.02872	0.00243	0.16380
λ_{19}		0.01265				
λ_{20}	0.35175	0.00148				0.03527
λ_{30}		0.30387	0.28154	0.12626	0.14339	
λ_{50}			0.05312	0.23078	0.20691	0.25936
λ_{80}				0.00047	0.01404	0.09391
λ_{100}					0.00249	0.00596
λ_{200}						0.00019
ρ_{av}	7.84995	8.69932	8.99112	9.88634	9.93468	10.98679
σ_{GA}	0.95542	0.95922	0.96014	0.96295	0.96310	0.96490
$\mathrm{SNR_d}$	0.156	0.180	0.156	0.162	0.125	0.118

参 考 文 献

[1] Gallager R G. Low-Density Parity-Check Codes [D]. [Ph. D. dissertation], Cambridge, MA: MIT Press, 1963.

[2] Luby M. Analysis of low density codes and improved designs using irregular graphs[C]. In proc .3oth. Annu. ACM symp. Theory of Computing, 1998: 249–258.

[3] Richardson T, Shokrollahi A, and Urabanke R, Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 619–637.

[4] Chung S Y, Richardson T J, and Urbanke R L. Analysis of

sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation[J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001(47), (2): 657-670.

[5] Di Changyan, Richardson T, and Urabanke R. Weight distribution of Low Density Parity Check Codes[J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2006, 52(11): 4839-4855.

[6] Price K and Storm R. Differential evolution ——A simple and efficient adapive scheme for global optimization over continuous spaces[J]. *J. Global Optimiz*, 1997, 11: 341-359.

[7] 肖娟, 王琳, 邓礼钊. 不规则 LDPC 码的密度进化方法及其门限值确定 [J]. 电子与信息学报, 2005, 27(4): 617-619.
Xiao Juan, Wang Lin, and Deng Li-zhao, Density evolution method and threshold decision for irregular LDPC codes. *Journal of Electronics & Information Technogoly* [J], 2005, 27 (4): 617-619.

李二保： 男，1983 年生，硕士，从事纠错编码研究.

雷 菁： 女，1968 年生，教授，硕士生导师，从事通信传输与编码技术研究.

徐富兵： 男，1977 年生，硕士，从事纠错编码研究.