第 30 卷第 11 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.30No.11
2008 年 11 月 Journal of Electronics & Information Technology Nov. 2008

一类三元非周期零相关区序列集的构造

王扬志 许成谦
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

摘 要：该文基于任意两个 $N\times N$ Hadamard 矩阵，构造出一类三元非周期零相关区序列集。与 Donelan 和 O'Farrell 的构造方法相比，该文构造出的序列具有较高的能量效率。又进一步构造出两个相互正交的具有非周期零相关区的三元序列集，这样就可以提供更多的能够在准同步 CDMA 系统中使用的序列。

关键词：准同步 CDMA 系统；零相关区序列集；Hadamard 矩阵；相互正交序列集

中图分类号：TN911. 2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2008)11-2626-04

Construction of Ternary Sequence Sets with Aperiodic Zero Correlation Zone

Wang Yang-zhi Xu Cheng-qian
(*The College of Information Science and Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Based on two arbitrary Hadamard matrices of common size, a new class of ternary sequence with aperiodic zero correlation zone is presented. Different from the construction given by Donelan and O'Farrell, the proposed method can generate sequences with higher energy efficiency. Furthermore, two of this kind of sequence sets are constructed which are mutually orthogonal, so that the number of available sequences for a Qs-CDMA system is increased.

Key words: QS-CDMA system; Zero correlation zone sequence sets; Hadamard matrix; Mutually orthogonal sequence sets

1 引言

近年来，准同步 CDMA(QS-CDMA)系统引起了人们的广泛关注。这是因为在准同步 CDMA(QS-CDMA)系统中，采用零相关区(ZCZ)序列集作为其扩频序列集，可以降低甚至消除系统中如共道干扰等一些干扰[1]，从而大大提高系统的容量。

目前，针对零相关区(ZCZ)序列集的设计，人们提出了多种构造方法。Fan等基于正交互补序列集成功构造出了零相关区序列集[2−4]。Hayshi提出了基于Hadamard矩阵的二元、三元零相关区序列集的构造方法[5,6]。上述的各种序列集均为具有周期零相关区的序列集，而在CDMA系统中非周期相关函数和周期相关函数有相同的重要性。Donelan和O'Farrell通过在正交矩阵的元素间插零的方法构造出三元非周期零相关区序列集[7]。本文利用任意两个 $N\times N$ Hadamard矩阵，构造出了一类具有非周期零相关区的三元序列集，本文构造的序列的能量效率远高于文献[7]中序列的能量效率。

在准同步 CDMA 系统中使用零相关区序列集，可以大大提高系统容量。可是，根据零相关区序列集的理论界[8,9]，在码长一定的条件下，序列集中的序列数随零相关区的增大而减少，因而可供使用的序列数较少，不能充分发挥这一系统的优势。最近，Rathinakumar 提出了相互正交零相关区序列集的概念[10]，通过推广文献[2]中的构造方法，构造了两个相互正交的零相关区序列集，从而能为准同步 CDMA 系统提供更多可供使用的序列。本文的构造方法同样可以构造出两个相互正交的三元非周期零相关区序列集。

2 基本概念

让 M 个长度为 L 的序列的集合 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{M-1}\}$ 表示为 $\{u_r\}_{r=0}^{M-1}$，其中 $u_r=(u_{r,0},u_{r,1},\cdots,u_{r,L-1})$。

定义 1 序列 u_r 和 u_s 的非周期相关函 $C_{u_r,u_s}(\tau)$,周期相关函 $R_{u_r,u_s}(\tau)$ 分别定义为

$$C_{u_r,u_s}(\tau)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{L-1-\tau}u_{r,i}u_{s,i+\tau}, & 0\le\tau\le L-1\\ \sum_{i=0}^{L-1+\tau}u_{r,i-\tau}u_{s,i}, & 1-L\le\tau<0\\ 0, & |\tau|\ge L\end{cases}\tag{1}$$

$$R_{u_r,u_s}(\tau)=\sum_{i=0}^{L-1}u_{r,i}u_{s,i+\tau},\quad (i+\tau)\operatorname{mod}L, 0\le\tau\le L-1\tag{2}$$

定义 2 对于序列集 $\{u_r\}_{r=0}^{M-1}$ 中任意两个序列 u_r 和 u_s，

2007-05-15 收到，2007-10-08 改回
国家自然科学基金(60272026)，教育部留学回国人员基金和教育部博士点基金资助课题

如果其非周期相关函数满足如下条件

$$C_{u_r,u_s}(\tau)=\begin{cases}L, & \tau=0, r=s\\ 0, & \tau=0, r\neq s\\ 0, & 0<|\tau|\le z_0\end{cases} \tag{3}$$

就称该序列集为非周期零相关区序列集,简记为 AZCZ(L, M, Z_0)。若 $u_{r,i}(0\le r\le M-1, 0\le i\le L-1)$ 取值为±1,0，则称该序列集为三元非周期零相关区序列集。

定义 3　对于两个序列集 $\{u_r\}_{r=0}^{M-1}$ 和 $\{v_r\}_{r=0}^{M-1}$，如果它们中的任意两个序列 u_r 和 v_s 满足 $R_{u_r,v_s}(0)=0$，则称这两个序列集为相互正交序列集。

下面定义一种整数的循环排列，$\pi_0=(0,1,\cdots,N-1)$，$\pi_i=T^i(\pi_0)(0\le i\le N-1)$,其中 T 表示循环左移因子。例如 $\pi_1=T^1(\pi_0)=(1,2,\cdots,N-1,0)$。用 π_{ij} 表示 π_i 中的第 j 个元素，例如 $\pi_{12}=2$。

3　构造方法

本节利用任意两个 $N\times N$ Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{N\times N}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{N\times N}$ 递归构造一类具有非周期零相关区的三元序列集。

首先，利用 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 生成 N 个矩阵

$$\boldsymbol{H}^n=\begin{bmatrix}h_{0,0}^n & h_{0,1}^n & \cdots & h_{0,N-1}^n\\ h_{1,0}^n & h_{1,1}^n & \cdots & h_{1,N-1}^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N-1,0}^n & h_{N-1,1}^n & \cdots & h_{N-1,N-1}^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{\pi_{n,0},0} & b_{\pi_{n,0},1} & \cdots & b_{\pi_{n,0},N-1}\\ b_{\pi_{n,1},0} & b_{\pi_{n,1},1} & \cdots & b_{\pi_{n,1},N-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{\pi_{n,N-1},0} & b_{\pi_{n,N-1},1} & \cdots & b_{\pi_{n,N-1},N-1}\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中 $0\le n\le N-1$。

引理 1　当 n,n' 同为偶数或奇数时，$\boldsymbol{H}^n$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{H}^{n'}$ 的第 i 行、第 $i\pm1$ 行正交；当 n,n' 中一个是偶数而另外一个是奇数时，$\boldsymbol{H}^n$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{H}^{n'}$ 的第 i 行正交。其中，$0\le n,n'\le N-1, 0\le i\le N-1, n\neq n'$。

证明　(1)当 n,n' 同为偶数或奇数时，显然 $\pi_{n,i}$ 与 $\pi_{n',i},\pi_{n',i\pm1}$ 为不同的整数，所以 $\boldsymbol{H}^n$ 的第 i 行 $\left[b_{\pi_{n,i},0},b_{\pi_{n,i},1},\cdots,b_{\pi_{n,i},N-1}\right]$ 与 $\boldsymbol{H}^{n'}$ 的第 i 行 $\left[b_{\pi_{n',i},0},b_{\pi_{n',i},1},\cdots,b_{\pi_{n',i},N-1}\right]$,第 $i\pm1$ 行 $\left[b_{\pi_{n',i\pm1},0},b_{\pi_{n',i\pm1},1},\cdots,b_{\pi_{n',i\pm1},N-1}\right]$ 分别为 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中不同的两行，所以 $\boldsymbol{H}^n$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{H}^{n'}$ 的第 i 行、第 $i\pm1$ 行正交。

(2)当 n,n' 中一个是偶数而另外一个是奇数时，显然 $\pi_{n,i}$ 与 $\pi_{n',i}$ 为不同的整数，所以 $\boldsymbol{H}^n$ 的第 i 行 $\left[b_{\pi_{n,i},0},b_{\pi_{n,i},1},\cdots,b_{\pi_{n,i},N-1}\right]$ 与 $\boldsymbol{H}^{n'}$ 的第 i 行 $[b_{\pi_{n',i},0},b_{\pi_{n',i},1},\cdots,b_{\pi_{n',i},N-1}]$ 为 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中不同的两行，所以 $\boldsymbol{H}^n$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{H}^{n'}$ 的第 i 行正交。　　证毕

下面给出构造方法：

(1)利用 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{H}^2,\cdots,\boldsymbol{H}^{N-2}$ 构造序列集 U^0。U^0 由序列集 $U^{0,0},U^{0,2},\cdots,U^{0,N-2}$ 组成，$U^{0,n}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{H}^n$ 生成的序列集，$u_r^{0,n}$ 表示序列集 $U^{0,n}$ 中的第 r 个序列。

$$\begin{aligned}u_r^{0,n}=\big[&a_{r,0}h_{0,0}^n,a_{r,1}h_{1,0}^n,\cdots,a_{r,N-1}h_{N-1,0}^n,0,\\ &a_{r,0}h_{0,1}^n,a_{r,1}h_{1,1}^n,\cdots,a_{r,N-1}h_{N-1,1}^n,0,\\ &\vdots\\ &a_{r,0}h_{0,N-1}^n,a_{r,1}h_{1,N-1}^n,\cdots,a_{r,N-1}h_{N-1,N-1}^n\big]\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $0\le r\le N-1, n\in\{0,2,\cdots,N-2\}$。

(2)当 $m\ge1$ 时，假设序列集 U^{m-1} 已被构造，U^{m-1} 由序列集 $U^{m-1,0},U^{m-1,2},\cdots,U^{m-1,N-2}$ 组成。下面利用 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $U^{m-1,n}$ 生成序列集 $U^{m,n}$，$u_r^{m,n}$ 表示序列集 $U^{m,n}$ 中的第 r 个序列。

$$u_r^{m,n}=\sum_{i=0}^{N^m(N^2+N-1)-1}a_{r,i\bmod N}u_{i\bmod N,[i/N]}^{m-1,n} \tag{6}$$

其中 $0\le r\le N-1, n\in\{0,2,\cdots,N-2\}$,$[i/N]$ 表示取 i/N 的整数部分。

则 $U^{m,0},U^{m,2},\cdots,U^{m,N-2}$ 共同构成序列集 U^m。

定理 1　序列集 U^m 是一个三元 AZCZ($N^m(N^2+N-1), N^2/2, N^m$) 序列集。

证明　(1)当 $m=0$ 时,对于 U^0 中的任意两个序列 $u_r^{0,n},u_{r'}^{0,n'}, 0\le r,r'\le N-1, n$、$n'\in\{0,2,\cdots,N-2\}$。

$$C_{u_r^{0,n},u_{r'}^{0,n'}}(0)=\sum_{i=0}^{N^2+N-2}u_{r,i}^{0,n}u_{r',i}^{0,n'}=\sum_{i=0}^{N-1}a_{r,i}a_{r',i}\sum_{k=0}^{N-1}h_{i,k}^n h_{i,k}^{n'} \tag{7}$$

由引理 1 得

$$C_{u_r^{0,n},u_{r'}^{0,n'}}(0)=\begin{cases}N^2, & n=n', r=r'\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}C_{u_r^{0,n},u_{r'}^{0,n'}}(1)&=\sum_{i=0}^{N^2+N-3}u_{r,i}^{0,n}u_{r',i+1}^{0,n'}\\ &=\sum_{i=0}^{N-2}a_{r,i}a_{r',i+1}\sum_{k=0}^{N-1}h_{i,k}^n h_{i+1,k}^{n'}\end{aligned} \tag{9}$$

由引理 1 得

$$C_{u_r^{0,n},u_{r'}^{0,n'}}(1)=0 \tag{10}$$

$$C_{u_r^{0,n},u_{r'}^{0,n'}}(-1)=0 \tag{11}$$

所以，本定理在 $m=0$ 时成立，U^0 是一个 AZCZ($N^2+N-1, N^2/2, 1$) 序列集。

(2)当 $m\ge1$ 时，假设定理 1 在 $m-1$ 时成立，即对于 U^{m-1} 中的任意两个序列 $u_r^{m-1,n},u_{r'}^{m-1,n'}, 0\le r,r'\le N-1$, n、$n'\in\{0,2,\cdots,N-2\}$。

$$C_{u_r^{m-1,n},u_{r'}^{m-1,n'}}(\tau)=\begin{cases}N^{m+1}, & r=r', n=n', \tau=0\\ 0, & 0<|\tau|\le N^{m-1}\end{cases} \tag{12}$$

由式(1)，式(12)得

$$\sum_{i=0}^{N^{m-1}(N^2+N-1)-1-\tau} u_{r,i}^{m-1,n} u_{r',i+\tau}^{m-1,n'}(\tau) = \begin{cases} N^{m+1}, & r=r', n=n', \tau=0 \\ 0, & 0<\tau\le N^{m-1} \end{cases} \tag{13}$$

$$\sum_{i=0}^{N^{m-1}(N^2+N-1)-1+\tau} u_{r,i-\tau}^{m-1,n} u_{r',i}^{m-1,n'}(\tau) = 0, \quad -N^{m-1}\le\tau<0 \tag{14}$$

对于U^m中的任意两个序列$u_r^{m,n},u_{r'}^{m,n'}$，其中$0\le r,r'\le N-1$,n、$n'\in\{0,2,\cdots,N-2\}$。

$$\begin{aligned} C_{u_r^{m,n},u_{r'}^{m,n'}}(\tau) &= \sum_{i=0}^{N^m(N^2+N-1)-1-\tau} u_{r,i}^{m,n} u_{r',i+\tau}^{m,n'} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1-(\tau \bmod N)} a_{r,i} a_{r',(i+\tau)\bmod N} \cdot \sum_{k=0}^{N^{m-1}(N^2+N-1)-1-[\tau/N]} u_{i,k}^{m-1,n} u_{(i+\tau)\bmod N,k+[\tau/N]}^{m-1,n'} \\ &\quad + \sum_{i=N-(\tau \bmod N)}^{N-1} a_{r,i} a_{r',(i+\tau)\bmod N} \cdot \sum_{k=0}^{N^{m-1}(N^2+N-1)-1-[\tau/N+1]} u_{i,k}^{m-1,n} u_{(i+\tau)\bmod N,k+[\tau/N+1]}^{m-1,n'} \end{aligned} \tag{15}$$

由式(13)得

$$C_{u_r^{m,n},u_{r'}^{m,n'}}(\tau) = \begin{cases} N^{m+2}, & r=r', n=n', \tau=0 \\ 0, & 0<\tau\le N^m \end{cases} \tag{16}$$

同理可得

$$C_{u_r^{m,n},u_{r'}^{m,n'}}(\tau) = \sum_{i=0}^{N^m(N^2+N-1)-1+\tau} u_{r,i-\tau}^{m,n} u_{r',i}^{m,n'} = 0, \quad -N^m\le\tau<0 \tag{17}$$

综合式(16)，式(17)可得

$$C_{u_r^{m,n},u_{r'}^{m,n'}}(\tau) = \begin{cases} N^{m+2}, & r=r', n=n', \tau=0 \\ 0, & 0<|\tau|\le N^m \end{cases} \tag{18}$$

所以，U^m是一个AZCZ$(N^m(N^2+N-1),N^2/2,N^m)$序列集，本定理成立。 证毕

在实际应用中选择三元序列做为扩频序列时，序列的能量效率是一个重要的选择依据。三元序列的能量效率表示为序列中非零元素的个数与序列长度的比值。文献[7]中序列的能量效率$\eta=1/(Z_0+1)$，序列的能量效率决定于零相关区的大小。当$z_0=2$时，η仅为33.3%并且η随z_0的增大而减小。本文中序列的能量效率$\eta=N^2/(N^2+N-1)$，η仅和初始矩阵的大小有关。当$N=2$时，$\eta=80\%$并且η随N的增大而增大。所以，本文中序列的能量效率远高于文献[7]中序列的能量效率，更适合在实际工程中应用。

4 相互正交 AZCZ 序列集的构造方法

基于Hadamard矩阵$\boldsymbol{A}$和矩阵$\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{H}^3,\cdots,\boldsymbol{H}^{N-1}$使用第3节中的构造方法，同样可以构造一个三元AZCZ$(N^m(N^2+N-1),N^2/2,N^m)$序列集V^m，V^m由序列集$V^{m,1},V^{m,3},\cdots,V^{m,N-1}$组成。

定理 2 三元非周期零相关区序列集U^m，V^m相互正交。

证明 (1)当$m=0$时，对于$U^{0,n},V^{0,n'}$中的任意两个序列$u_r^{0,n},v_{r'}^{0,n'},0\le r,r'\le N-1,n\in\{0,2,\cdots,N-2\}$，$n'\in\{1,3,\cdots,N-1\}$。

$$R_{u_r^{0,n},v_{r'}^{0,n'}}(0) = \sum_{i=0}^{N^2+N-2} u_{r,i}^{0,n} v_{r',i}^{0,n'} = \sum_{i=0}^{N-1} a_{r,i} a_{r',i} \sum_{k=0}^{N-1} h_{i,k}^n h_{i,k}^{n'} \tag{19}$$

由引理1得

$$R_{u_r^{0,n},v_{r'}^{0,n'}}(0) = 0 \tag{20}$$

所以，序列集U^0，V^0正交，本定理在$m=0$时成立。

(2)当$m\ge1$时，假设定理2在$m-1$时成立。由假设可得

$$R_{u_r^{m-1,n},v_{r'}^{m-1,n'}}(0) = \sum_{i=0}^{N^{m-1}(N^2+N-1)-1} u_{r,i}^{m-1,n} v_{r',i}^{m-1,n'} = 0 \tag{21}$$

对于U^m，V^m中的任意两个序列$u_r^{m,n},v_{r'}^{m,n'},0\le r,r'\le N-1,n\in\{0,2,\cdots,N-2\},n'\in\{1,3,\cdots,N-1\}$。

$$\begin{aligned} R_{u_r^{m,n},v_{r'}^{m,n'}}(0) &= \sum_{i=0}^{N^m(N^2+N-1)-1} u_{r,i}^{m,n} v_{r',i}^{m,n'} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} a_{r,i} a_{r',i} \sum_{k=0}^{N^{m-1}(N^2+N-1)-1} u_{i,k}^{m-1,n} v_{i,k}^{m-1,n'} \end{aligned} \tag{22}$$

由式(21)得

$$R_{u_r^{m,n},v_{r'}^{m,n'}}(0) = 0 \tag{23}$$

所以，序列集U^m，V^m正交，本定理成立。 证毕

5 结束语

本文利用任意两个$N\times N$ Hadamard矩阵，构造出了具有非周期零相关区的三元序列集，本文构造的序列的能量效率较高，更适合在实际工程中应用。本文的构造方法，可以基于这两个Hadamard矩阵构造出两个参数相同的零相关区序列集并且二者相互正交，这样就可以提供更多的能够在准同步CDMA系统中使用的序列。

参 考 文 献

[1] Suehiro N. A signal design without co-channel interference for approximately synchronized CDMA systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1994, 12(5): 837–841.

[2] Fan P Z, Suehiro N, Kuroyanagi N, and Deng X M. A class of binary sequences with zero correlation zone. *IEE Electronics Letters*, 1999, 35(10): 777–779.

[3] Deng X M and Fan P Z. Spreading sequence sets with zero correlation zone. *IEE Electronics Letters*, 2000, 36(12): 982–983.

[4] Fan P Z and Hao L. Generalized orthogonal sequences and their applications in synchronous CDMA systems. *IEICE*

Trans. on Fundamentals, 2000, E83-A(11): 2054–2069.

[5] Hayashi T. Binary sequences with orthogonal subsequences and a zero correlation zone: pair-preserving shuffled sequences. *IEICE Trans. on Fundamentals*, 2002, E85-A(6): 1420–1425.

[6] Hayashi T. A class of ternary sequence sets having a zero correlation zone for even and odd correlation functions. IEEE 2003 International Symposium on Information Theory, Yakohama, Japan, 2003: 434.

[7] Donelan H and O'Farrell T. Families of ternary sequences with aperiodic zero correlation zones for MC-DS-CDMA. *IEE Electronics Letters*, 2002, 38(25): 1660–1661.

[8] Tang X H, Fan P Z and Matsufuji S. Lower bounds on the maximum correlation of sequence set with low or zero correlation zone. *IEE Electronics Letters*, 2000, 36(6): 551–552.

[9] Tang X H and Fan P Z. Bounds on aperiodic and odd correlations of spreading sequences with low and zero correlation zone. *IEE Electronics Letters*, 2001, 37(19): 1201–1203.

[10] Rathinakumar A and Chaturvedi A K. Mutually orthogonal sets of ZCZ sequences. *IEE Electronics Letters*, 2004, 40(18): 1133–1134.

王扬志： 男，1975年生，博士生，研究方向为序列设计.

许成谦： 男，1961年生，教授，博士生导师，研究方向为序列设计、信道编码、密码学.