

## 利用基于浮动模板的预修正快速傅里叶变换方法快速求解三维介质体积分方程

陈忠宽 王生水 柴舜连 毛钧杰  
(国防科学技术大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 利用预修正快速傅里叶变换方法结合矩量法快速求解三维介质散射问题的体积分方程, 并引入一种新的模板拓扑结构, 将投影及插值模板由固定改为浮动, 以减少直接计算和预修正的近区未知量个数。数值计算结果表明, 基于浮动模板的预修正快速傅里叶变换方法可以显著减少需要进行预修正的近区未知量个数, 从而减少算法的存储需求和计算时间。

**关键词:** 预修正快速傅里叶变换方法; 矩量法; 体积分方程

中图分类号: O441

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)11-2763-04

## A Fast Solution to the Volume Integral Equation for 3-D Dielectric Objects by Using the Precorrected-FFT Based on Floating Stencil

Chen Zhong-kuan Wang Sheng-shui Chai Shun-lian Mao Jun-jie

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A fast solution to the Volume Integral Equation (VIE) for 3-D dielectric objects is implemented by using the precorrected-FFT method. A new stencil topology is presented to reduce near-zone interactions to be computed directly and precorrected, in which the projection and interpolation stencils are floating but not fixed. Numerical results show that the P-FFT method based on floating stencil can significantly reduce near-zone interactions to be precorrected, as well as memory and CPU time.

**Key words:** Precorrected-FFT Method (P-FFT); Method of Moment (MoM); Volume integral equation

### 1 引言

预修正快速傅里叶变换方法(Precorrected FFT, P-FFT)最早被 Philips 用于快速分析静电问题<sup>[1]</sup>, 其基本思想是将基函数投影到规则网格, 然后利用快速傅里叶变换(FFT)来快速求解规则网格上的位势(包括磁矢位和电标位, 下同), 再进行插值得到基函数上的位势。在结合矩量法求解体积分方程时, P-FFT 方法的存储需求为  $O(N)$ , 计算复杂度为  $O(M \log N)$ , 其效率可与多层快速多极方法相媲美<sup>[2]</sup>。由于 P-FFT 方法不仅可以采用多种剖分方法和分域基函数, 并且算法不依赖于积分方程的积分核, 因而可以方便地拓展到多个领域。近几年, P-FFT 方法逐渐被用来求解多种电磁问题<sup>[3-6]</sup>, 但在国内相关研究报道和文献还很少。

尽管具有突出的优点, 但与其他快速算法一样, 近区元素的多少在很大程度上影响着 P-FFT 方法的存储需求和求解速度。在求解三维介质体散射问题时, 未知量个数随介质的电尺寸增大而急剧增加, 近区元素也随之迅速增加, 问题变得更为严重。本文应用 P-FFT 方法结合矩量法快速求解三维介质散射问题的体积分方程, 并在此基础上提出一种新的模板拓扑结构, 在保持规则网格密度不变的前提下, 减

少需要存储和预修正的近区元素, 进而减少存储需求、加快求解速度。

### 2 P-FFT 方法求解体积分方程的一般步骤

#### 2.1 体积分方程

考虑体积为  $V$  的各向同性不均匀电介质处于电场  $E^i$  的照射之下, 则该散射问题可以用体积分方程来表示<sup>[2]</sup>

$$\frac{D(\mathbf{r})}{\hat{\epsilon}(\mathbf{r})} = E^i(\mathbf{r}) - j\omega A(\mathbf{r}) - \nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

其中  $D$  为电通量,  $\hat{\epsilon}$  为该介质的介电常数,  $A$  为磁矢位,  $\Phi$  为电标位。利用四面体剖分的 SWG 基函数<sup>[7]</sup>结合矩量法, 可以将体积分方程(1)离散化为线性方程组

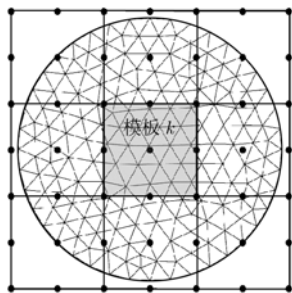
$$[Z_{mn}][D_n] = [E_m], \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中  $N$  为离散所得未知量个数,  $D_n$  为展开系数, 而  $Z_{mn}$  和  $E_m$  的表达式广为人知, 此处不再给出。求解以上方程, 即可得到  $D_n$ , 进而求出远场或其他参数。

由于矩阵  $[Z_{mn}]$  为稠密阵, 其存储需求为  $O(N^2)$ , 在直接求解和迭代求解时计算复杂度分别为  $O(N^3)$  和  $O(N^2)$ 。利用 P-FFT 方法可以加速求解, 减小其存储需求和计算复杂度。

#### 2.2 P-FFT 方法

应用 P-FFT 方法需要构建一个包含整个求解域  $V$  的立

图1 基函数与规则网格的关系( $p=3$ )

方体, 对该立方体进行均匀剖分得到一系列模板, 而模板被进一步均匀剖分得到一系列网格。图1以球体的侧视图为例来说明基函数与规则网格的关系, 其中可以看到9个模板, 每个模板包括  $p^3$  个网格点(图中  $p=3$ ), 其中包含了若干基函数。

一般而言, P-FFT 方法可以分为4个步骤: 投影、卷积、插值和预修正。投影过程将基函数上的电荷/电流投影到对应模板的规则网格点, 卷积过程根据规则网格上的电荷/电流计算规则网格点的位势, 插值过程根据网格点的位势插值计算基函数上的位势, 而预修正过程则修正近区基函数之间的相互作用。利用 FFT 来快速计算规则网格上的卷积, 可以获得很高的效率。最终得到的  $[Z_{mm}]$  的 P-FFT 近似表达式为

$$\mathbf{Z}^{\text{P-FFT}}(m,n) = \mathbf{V}_m^T \mathbf{H} \mathbf{W}_n + \mathbf{P}(m,n) \quad (3)$$

其中  $\mathbf{W}$  为投影算子,  $\mathbf{H}$  为卷积算子,  $\mathbf{V}$  为插值算子,  $\mathbf{P}$  为近区元素预修正算子, 且有

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{Z}(m,n) - \mathbf{V}_m^T \mathbf{H} \mathbf{W}_n \quad (4)$$

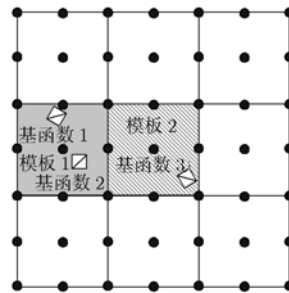
限于篇幅, 此处不给出其他各算子的表达式, 具体可参见文献[2-5]。

### 3 模板拓扑结构的改进

一般来说, 在两种情况下需要进行预修正: 一是两个基函数距离小于近远区门限  $R_{\text{thr}}$ , 此时投影、卷积和插值过程无法准确计算基函数的相互作用; 二是两个基函数对应的模板之间有重叠网格, 在计算  $\mathbf{H}$  矩阵的时候存在奇异性。P-FFT 方法中, 对每一对近区元素, 需要根据式(4)计算并存储  $\mathbf{P}(m,n)$ , 并且在每一次迭代求解的过程中进行预修正。因此, 近区元素个数在很大程度上影响着算法的效率。本节考虑改进模板拓扑结构, 使得可以在保持规则网格密度不变的前提下, 减少由模板重叠网格所导致的预修正次数。

#### 3.1 固定模板的弊端

P-FFT 方法通常采用的模板拓扑结构是诸模板紧密排列, 位于某模板内的所有基函数都投影到该模板, 我们姑且称之为“固定模板”。固定模板可能带来一个问题: 两基函数距离大于  $R_{\text{thr}}$ , 满足远场近似条件, 但是由于对应的模板之间有重叠网格, 因此仍然需要进行预修正, 不必要地增加了算法所需要的存储空间和计算时间。

图2 固定模板( $p=3$ )

以图2为例说明固定模板所额外增加的预修正元素。如图2, 在采用固定模板时, 模板1, 模板2相邻, 基函数1和基函数2位于模板1内, 基函数3位于模板2内。因此, 基函数1和基函数2被投影到模板1而基函数3被投影到模板2。

由于模板1和模板2有重叠的网格点, 卷积矩阵无法准确计算重叠网格的相互影响, 因此计算模板1内的所有基函数对模板2内的所有基函数的影响时, 都必须进行预修正。但是, 如果基函数1和基函数3, 基函数2和基函数3距离大于  $R_{\text{thr}}$ , 满足远场近似条件, 那么预修正本身并无必要。即是说, 此时引入预修正仅仅是由于两个模板之间有重叠网格。这样对于基函数1和基函数3, 基函数2和基函数3来说, 预修正无疑浪费了存储空间和计算时间, 降低了算法效率。

在整个三维求解空间来看, 对某个模板来说, 对于与它有重叠网格的所有模板内的所有基函数, 都必须标记为近区, 需要进行预修正, 这就导致了近区元素的快速增长。在求解体积积分方程时, 由于未知量个数随求解域体积的增长而快速增长, 带来的问题尤其严重。

为解决这一问题, 通常采用的方法是增大规则网格的密度, 从而使得满足远场近似条件的基函数所对应的模板之间(例如, 基函数1和基函数2对应的模板1与基函数3对应的模板2之间)没有重叠网格。然而这一做法的代价是增加了规则网格点的个数, 进而增加了其所需存储空间以及卷积计算时间, 降低了卷积算子的效率。因此, 规则网格密度不能太小, 要同时兼顾卷积效率和预修正效率。

#### 3.2 浮动模板的使用

由以上分析过程可见, 如果能够使得距离大于  $R_{\text{thr}}$  的诸基函数所对应的模板之间没有重叠网格, 就可以减少由重叠网格导致的近区元素个数。为此, 考虑采用一种新的模板生成方法, 其特点是诸模板不再是紧密排列, 而是可以相互重叠, 模板的中心位置在网格点上“浮动”, 因此称之为“浮动模板”。

浮动模板的生成方法为: 首先, 直接生成与传统 P-FFT 方法密度相当的规则网格点; 然后, 对于基函数  $n$ , 查找与该基函数中心点(对于 SWG 基函数, 为公共三角形的中心,

下同)距离最近的网格点,如果同时有若干网格点同时满足这一条件,则任选其中之一;最后,以这一网格点为中心,生成一个模板,基函数  $n$  就被投影到这个模板的诸网格点上,而这个模板的位势也被用来插值计算基函数  $n$  上的位势。

浮动模板与固定模板的主要区别在于:(1)浮动模板中,除了求解域边缘的少数网格之外,每个网格点都对应于一个模板中心,而固定模板中,约  $(p-1)^3$  个网格点中才有一个是模板中心;(2)浮动模板中,相邻模板所包含的空间有部分重叠,模板内部和边缘的网格也有部分重叠,而固定模板中,相邻模板所包含的空间不相互重叠,只有模板边缘的网格相互重叠;(3)浮动模板中,只有以模板中心网格点为中心、边长为网格间距的一半的立方体内的基函数才被投影到该模板,而固定模板中,模板内的所有基函数都被投影到该模板。

在保持规则网格密度不变的前提下,浮动模板可以使得距离大于  $R_{thr}$  的基函数尽可能多地对应于没有重叠网格的模板,减少由于网格重叠引起的预修正,具体参见图 3。图 3 中,基函数 1,基函数 2,基函数 3 与网格点的相对位置同图 2,但在采用浮动模板时,基函数 1,基函数 2,基函数 3 分别与模板 3,模板 4,模板 5 的中心网格点距离最近,因而分别对应于模板 3,模板 4,模板 5。此时,对于基函数 1 和 3,基函数 2 和基函数 3 来说,由于其距离大于  $R_{thr}$ ,且所对应的模板 3 和模板 5,模板 4 和模板 5 之间没有相互重叠的网格点,因此不需要进行预修正。

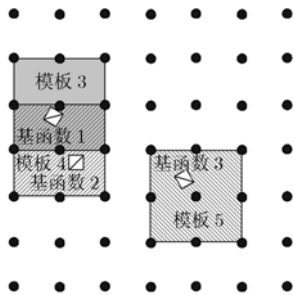


图 3 浮动模板( $p=3$ )

可见,在相同的基函数距离和网格密度下,采用浮动模板可以降低诸基函数所对应的模板之间有重叠网格的可能性,减少由重叠网格导致的预修正操作次数,从而减少需要预修正的近区元素个数。

### 3.3 浮动模板所增加的存储空间和计算量

采用浮动模板只改变了基函数与模板的对应关系,而没有改变 P-FFT 方法的各个算子。因此,除了减少近区元素的个数、节省预修正所需要的存储空间和计算时间之外,浮动模板不会影响 P-FFT 方法的效率和精度。

无论采用固定模板还是浮动模板,都需要事先将每个模板对应的所有网格点存储起来,供投影、插值和预修正时读取,为此需要一个三维数组。采用固定模板时,模板个数大约为网格点个数的  $1/(p-1)^3$ ;采用浮动模板时,除了边缘的

少数网格点之外,每个网格都对应着一个浮动模板的中心,浮动模板个数仅略小于网格个数。因此浮动模板所需要的存储空间与网格个数仍为线性关系,但约为固定模板个数的  $(p-1)^3$  倍。然而从程序实现来看,由于规则网格较稀疏,网格点个数远小于未知量个数,更远小于近区元素的个数,因此存储浮动模板所需要的存储量远远小于近区修正所需要的存储量,不会对算法效率产生显著影响。

对于固定模板,算法中需要判断基函数落在哪个模板内,然后读取模板所有的网格点;对于浮动模板,需要判断基函数与哪一个网格点距离最短,然后读取以该网格点为中心的浮动模板。由于判断基函数与模板的对应关系只须进行一次,并且可以直接计算而无须搜索,采用浮动模板所增加计算量可以忽略不计。

综上所述,浮动模板在减少需要预修正的近区元素个数的同时,只增加了很小的存储空间来存储模板网格数据,几乎不会增加计算量。

## 4 数值结果

本节给出两个算例验证 P-FFT 方法的计算精度和效率,以及浮动模板所带来的效率提升。所有计算结果都是在一台 CPU 为 Merom T5500(频率 1.66GHz)、内存为 1.5GB 的笔记本电脑上求得的,迭代求解器为 GMRES。

第 1 个算例计算直径为 2m 的介质球的双站 RCS,  $\epsilon_r=4$ ,  $f=150\text{MHz}$ ,四面体个数 24,034,未知量个数 49,448,计算结果见图 4。由图 4 可见,P-FFT 方法计算所得的结果与解析解吻合得比较好,而采用浮动模板和固定模板所得的结果保持高度一致。采用浮动模板时,近区元素个数为 10,572,488,约占  $N^2$  的 0.432%;采用固定模板时,近区元素个数为 17,646,674,约占  $N^2$  的 0.722%。

第 2 个算例仍计算直径为 2m 的介质球的双站 RCS,但  $\epsilon_r=2$ ,  $f=250\text{MHz}$ ,四面体个数 46,019,未知量个数 94,107,计算结果见图 5。采用浮动模板时,近区元素个数为 23,895,231,约占  $N^2$  的 0.270%;采用固定模板时,近区元素个数为 40,143,317,约占  $N^2$  的 0.453%。

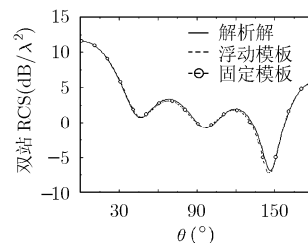


图 4 双站 RCS( $\epsilon_r=4$ ,  $f=150\text{MHz}$ ,  $\theta$  极化)

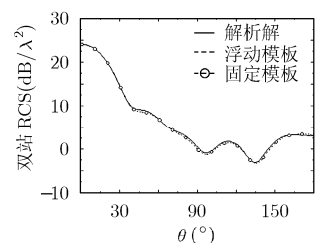


图 5 双站 RCS( $\epsilon_r=2$ ,  $f=250\text{MHz}$ ,  $\theta$  极化)

由以上算例可见,相对于固定模板,浮动模板可以将近区元素个数减少至约 60%而没有对算法精度造成不良影响。

## 5 结束语

本文实现了用 P-FFT 方法结合矩量法快速求解体积分方程, 并引入一种新的模板拓扑结构, 将其中的投影模板和插值模板由固定改为浮动。数值结果表明, 浮动模板的采用, 减少了近区元素, 从而减少了预修正所需要的存储空间和计算时间。

## 参考文献

- [1] Phillips J R and White J K. A precorrected-FFT method for electrostatic analysis of complicated 3-D structures[J]. *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 1997, 16(10): 1059-1072.
  - [2] Nie X C, Li L W, and Yuan N, *et al.* Precorrected-FFT solution of the volume integral equation for 3-D inhomogeneous dielectric objects[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2005, 53(1): 313-320.
  - [3] Nie X C, Yuan N, and Gan Y, *et al.* A fast combined field volume integral equation solution to EM scattering by 3-D dielectric objects of arbitrary permittivity and permeability [J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2006, 54(3): 961-969.
  - [4] Nie X C, Yuan N, and Li L W, *et al.* A fast volume-surface integral equation solver for scattering from composite conducting-dielectric objects[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2005, 53(2): 818-824.
  - [5] Yuan N, Yeo T S, and Nie X, *et al.* Analysis of probe-fed conformal microstrip antennas on finite grounded substrate[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2006, 54(2): 554-563.
  - [6] Nie X C, Li L W, and Yuan N, *et al.* Fast analysis of scattering by arbitrarily shaped three-dimensional objects using the precorrected-FFT method[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2002, 34(6): 438-442.
  - [7] Schaubert D H, Wilton D R, and Glisson A W. A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 1984, 32(1): 77-85.
- 陈忠宽: 男, 1979年生, 博士生, 研究方向为电磁场数值计算、微波、毫米波天线的设计与分析。
- 王生水: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为电磁场数值计算、微波、毫米波天线的设计与分析。
- 柴舜连: 男, 1969年生, 副教授, 博士, 主要从事天线理论研究和计算分析以及电波传播的研究和计算工作。
- 毛钧杰: 男, 1943年生, 教授, 博士生导师, 电子学会高级会员, 主要从事毫米波多模复合制导理论研究、天线设计、电波传播的计算及微波教学工作。