第 30 卷第 11 期　　电　子　与　信　息　学　报　　Vol.30No.11
2008 年 11 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Nov. 2008

最佳三元序列偶理论研究

毛　飞[①]　　吴　宁[①]　　周　正[②]
[①](南京航空航天大学信息科学与技术学院　南京　210016)
[②](北京邮电大学无线网络实验室　北京　100876)

摘　要：本文提出了一种新的具有良好循环自相关特性的离散信号，即最佳三元序列偶。给出了最佳三元序列偶的变换性质，研究了在伪随机二元序列、最佳二元序列偶以及最佳屏蔽二元序列偶基础上，通过插零法构造最佳三元序列偶的方法，从而可以利用现有的最佳信号生成最佳三元序列偶，大大拓宽最佳信号的存在空间，进一步丰富和完善了序列偶最佳相关信号理论。

关键词：最佳信号；序列偶；相关
中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2008)11-2622-04

Research on Perfect Ternary Sequence Pair

Mao Fei[①]　　Wu Ning[①]　　Zhou Zheng[②]
[①](*College of Information Science and Technology*, *Naijing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)
[②](*Wireless Network Lab*, *Beijing University of Posts and Telecommunications*, *Beijing* 100876, *China*)

Abstract: A new periodic correlation signal is presented, which is the perfect ternary sequence pair. The definitions of the perfect ternary sequence pair and its transformation properties are presented. A method for constructing the perfect ternary sequence pairs taking advantage of pseudorandom binary sequence, perfect binary sequence pair and the perfect punctured binary sequence pair is presented by us. As a result, it indicates that the method is handy and flexible. With this method more perfect signals could be obtained. These signals enrich the theory of sequence pair perfect discrete correlated signals.

Key words: Perfect signal; Sequence pairs; Correlation

1　引言

最佳离散信号设计的一个重要原则就是使得信号的自相关函数尽可能地逼近一个脉冲函数，以能够很容易地将信号与它的移位信号区分开来。最佳二元序列[1]是最理想的具有上述特性的循环相关信号，但在序列长度小于 12100 的范围内仅仅只有长度为 4 的最佳二元序列，这远远不能满足工程应用的要求。为了找到更多的适合工程应用的循环相关信号，人们又在改变二元序列和信号最佳循环相关条件下先后研究提出了几乎最佳二元序列[2]、奇周期最佳几乎二元序列[3]、伪随机二元序列[4]、最佳三元序列[5]等。上述这些码的最佳性是用序列与自身时延序列的内积来表征的，这大大限制了最佳序列码的存在空间，为了克服这一局限性，人们又相继研究提出了最佳二元序列偶[6]、最佳屏蔽二元序列偶[7]、几乎最佳二元序列偶[8]、伪随机二元序列偶[9]、并元序列偶[10]、奇周期最佳几乎二进序列偶[11]等。序列偶中两个序列的互相关函数定义为这个序列偶的自相关函数，并以此来表征序列偶的最佳循环相关特性。由于序列偶同样是具有良好周期相关特性的离散信号，因而可广泛应用于通信、雷达、导航、信号处理等系统中，其方法是在系统中任选序列偶中的一个序列作为传输信号，而用另一个序列作为接收机的本地序列，通过计算序列偶的自相关函数来达到提取信息的目的。本文则提出了一种新的具有循环周期自相关特性的离散信号，即最佳三元序列偶。第 2 部分给出了其相关定义；第 3 部分研究给出了最佳三元序列偶的变换性质；第 4、5、6 节分别探讨了最佳三元序列偶与伪随机二元序列、最佳二元序列偶、最佳屏蔽二元序列偶之间的关系，给出了利用已知最佳信号构造最佳三元序列偶的方法；文章最后，研究了最佳三元序列偶的周期乘积构造方法，从而可以利用已知的低阶序列偶来构造高阶的最佳三元序列偶。

2　基本定义

定义 1　设 $X=[x(0),x(1),\cdots,x(n-1)]$ 和 $Y=[y(0),y(1),\cdots,y(n-1)]$ 是周期为 n 的两个序列，称 X 和 Y 为序列偶，记为 $(X,\ Y)$；若 X 和 Y 中元素取值为 ±1，则称序列偶 $(X,\ Y)$ 为二元序列偶；若 X 和 Y 中元素取值为 ±1 和 0，则

2007-04-02 收到，2008-01-21 改回
国家自然科学基金（60432040，60572020），北京市自然科学基金(4052021)，教育部博士点专项基金（20060013008)和韩国仁荷大学合作项目(UWB-ITRC)资助课题

称序列偶$(X,\ Y)$为三元序列偶。

定义 2[6]　周期为 n 的序列偶$(X,\ Y)$的周期自相关函数定义为

$$R_{(X,Y)}(u)=\sum_{i=0}^{n-1}x(i)y([i+u]_n) \tag{1}$$

其中 $0\le u\le n-1$，$[\cdot]_n=(\cdot)\bmod n$，下同。

定义 3[6]　若周期为 n 的二元序列偶$(X,\ Y)$的周期自相关函数满足：

$$R_{(X,\ Y)}(u)=\begin{cases}E\ne 0, & u=0\\ 0\ , & u\ne 0\end{cases} \tag{2}$$

则称二元序列偶$(X,\ Y)$为最佳二元序列偶。

定义 4　若周期为 n 的三元序列偶$(X,\ Y)$的周期自相关函数满足：

$$R_{(X,\ Y)}(u)=\begin{cases}E\ne 0, & u=0\\ 0\ , & u\ne 0\end{cases} \tag{3}$$

则称三元序列偶$(X,\ Y)$为最佳三元序列偶。

定义 5[7]　序列 $X=[x(0),x(1),\cdots,x(n-1)]$ 的 p-屏蔽序列 $Y=[y(0),y(1),\cdots,y(n-1)]$ 为

$$y(j)=\begin{cases}0, & j\in p\text{个屏蔽位}\\ x(j), & j\in\ N-p\text{非屏蔽位}\end{cases} \tag{4}$$

p 为序列 X 中的屏蔽位数，如果 $x(j)=\{-1,1\}$，p-屏蔽序列 Y 为 p-屏蔽二进序列，(X,Y)称为屏蔽二进序列偶。

定义 6[7]　周期为 n 的序列偶(X,Y)的周期自相关函数 $R_{(X,Y)}(u)$为

$$R_{(X,Y)}(u)=\sum_{i=0}^{n-1}x(i)y(i+u),\quad 0\le u\le n\text{–}1 \tag{5}$$

如果屏蔽序列偶的周期自相关函数 $R_{(X,Y)}(u)$满足以下条件：

$$R_{(X,Y)}\left(m\right)=\begin{cases}E\ne 0, & m\equiv 0\mod N\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{6}$$

则称二进序列偶(X,Y)为有 p 个屏蔽位的周期最佳屏蔽二进序列偶，简称为最佳屏蔽二进序列偶。

3　最佳三元序列偶的变换性质

设(X,Y)为周期 n 的最佳三元序列偶，(X_1,Y_1)为其变换序列偶，则有如下性质：

性质 1 (互易变换)　若序列偶 (X_1,Y_1) 满足 $x_1(i)=y(i)$，$y_1(i)=x(i)$，$0\le i\le n-1$，则序列偶 (X_1,Y_1) 为最佳三元序列偶。

性质 2(负元变换)　若 $x_1(i)=-x(i),y_1(i)=-y(i),0\le i$ $n-1$，则有序列偶(X_1,Y_1)为最佳三元序列偶。

性质 3(线性相位变换)　若 $x_1(i)=(-1)^i x(i),y_1(i)=(-1)^i y(i),0\le i\le n-1$，则有序列偶$(X_1,Y_1)$最佳三元序列偶。

性质 4(逆序变换)　若 $x_1(i)=x(n-1-i),y_1(i)=y(n-1-i),0\le i\le n-1$，则有序列偶$(X_1,Y_1)$为最佳三元序列偶。

性质 5 (循环移位变换)　若序列偶 (X_1,Y_1) 满足 $x_1(i)=x(i+u)$，$y_1(i)=y(i+u)$，$0\le i\le n-1$，$0\le u\le n-1$，$i+u$按$(i+u)\bmod n$ 取值，则序列偶 (X_1,Y_1) 为最佳三元序列偶。

性质 6 (完全采样变换)　若序列偶 (X_1,Y_1) 满足 $x_1(i)=x(ki)$，$y_1(i)=y(ki)$，$0\le i\le n-1$，k 为整数，且 k 与 n 互素，则序列偶 (X_1,Y_1) 为最佳三元序列偶。

性质 1～性质 6 易由最佳三元序列偶的定义证明，在此省略。

4　最佳三元序列偶和最佳二元序列偶的关系

定理 1　设序列偶(X,Y)为周期为 n 的最佳二元序列偶，在序列偶(X,Y)中序列 X 和序列 Y 中每个元素后均插入 k 个零元素，则新生成的序列偶(X_1,Y_1)为最佳三元序列偶。

证明　设 $X=(x(0),x(1),\cdots,x(n-1))$，$Y=(y(0),y(1),\cdots,y(n-1))$ 为最佳二元序列偶(X,Y)中的两个构成序列，则有序列偶(X_1,Y_1)中的两个构成序列为

$$\begin{aligned}X_1&=(x_1(0),x_1(1),\cdots,x_1(n(k+1)-1))\\&=(x(0),\underbrace{0,\cdots,0}_{k},x(1),\underbrace{0,\cdots,0}_{k},\cdots,x(n-1),\underbrace{0,\cdots,0}_{k})\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}Y_1&=(y_1(0),y_1(1),\cdots,y_1(n(k+1)-1))\\&=(y(0),\underbrace{0,\cdots,0}_{k},y(1),\underbrace{0,\cdots,0}_{k},\cdots,y(n-1),\underbrace{0,\cdots,0}_{k})\end{aligned} \tag{8}$$

即有

$$\begin{cases}x_1(i)=x(m), & i=m(k+1),\quad 0\le m\le n-1\\ x_1(i)=0, & \text{其他}\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}y_1(i)=y(m), & i=m(k+1),\quad 0\le m\le n-1\\ y_1(i)=0, & \text{其他}\end{cases} \tag{10}$$

则有序列偶(X_1,Y_1)的自相关函数为

$$R_{(X_1,Y_1)}(u)=\sum_{i=0}^{n(k+1)-1}x_1(i)y_1(i+u)$$

又因为序列偶(X,Y)为周期为 n 的最佳二元序列偶，则由定义 3 有

$$R_{(X,\ Y)}(u)=\begin{cases}E\ne 0, & u=0\\ 0\ , & u\ne 0\end{cases}$$

(1)当 $u=0$ 时，有

$$\begin{aligned}R_{(X_1,Y_1)}(u)&=\sum_{i=0}^{n(k+1)-1}x_1(i)y_1(i+u)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}x(i)y(i)+0=E\ne 0\end{aligned}$$

(2)当 $u=m(k+1)$, $1\le m\le n-1$ 时，有

$$\begin{aligned}R_{(X_1,Y_1)}(u)&=\sum_{i=0}^{n(k+1)-1}x_1(i)y_1(i+u)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}x(i)y(i+m)+0=0\end{aligned}$$

(3)当 $u=m(k+1)+j,0\le m\le n-1,1\le j\le k$ 时，有

$$\begin{aligned}R_{(X_1,Y_1)}(u) &= \sum_{i=0}^{n(k+1)-1} x_1(i)y_1(i+u)\\ &= \sum_{l=0}^{n-1} x_1(l(k+1))y_1(l(k+1)+u)+0\\ &= \sum_{l=0}^{n-1} x_1(l(k+1))y_1((l+m)(k+1)+j)\\ &= \sum_{l=0}^{n-1} x_1(l(k+1))0=0\end{aligned}$$

综上有

$$R_{(X_1,\ Y_1)}(u)=\begin{cases}E\neq 0, & u=0\\ 0, & u\neq 0\end{cases}$$

所以由最佳三元序列偶的定义知，序列偶(X_1,Y_1)为最佳三元序列偶。 证毕

5 最佳三元序列偶和最佳屏蔽二元序列偶的关系

定理 2 设序列偶(X,Y)为周期为 n 的最佳屏蔽二元序列偶，在序列偶(X,Y)中序列 X 和序列 Y 中每个元素后均插入 k 个零元素，则新生成的序列偶(X_1,Y_1)为最佳三元序列偶。

定理 2 的证明类似于定理 1 的证明，故在此省略。

6 最佳三元序列偶和伪随机二元序列的关系

伪随机二元序列[12]是一种长度为 n，序列中“$+1$”和“-1”的元素分别为$(n+1)/2$和$(n-1)/2$，而且序列的异相自相关函数值恒为-1。

定理 3 设序列 X 为周期为 n 的伪随机序列，将序列中“-1”元素置为“0”得到序列 Y，即有

$$y(i)=\begin{cases}1, & x(i)=1\\ 0, & x(i)=-1\end{cases} =\frac{1}{2}(x(i)+1) \tag{11}$$

再在序列 X 和序列 Y 中每个元素后均插入 k 个零元素后分别生成序列 X_1 和序列 Y_1，则由其构成的序列偶(X_1,Y_1)为最佳三元序列偶。

证明 因为序列 X 为周期为 n 的伪随机序列，则有

$$R_{XX}(u)=\begin{cases}n, & u=0\\ -1, & u\neq 0\end{cases} \tag{12}$$

并且序列中“$+1$”和“-1”的元素分别为$(n+1)/2$和$(n-1)/2$。又有序列 X 和序列 Y 的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{(X,Y)}(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} x(i)y(i+u)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x(i)x(i+u)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x(i)\end{aligned}$$

(1)当$u=0$时，结合式(12)和伪随机序列的特性有

$$\begin{aligned}R_{(X,Y)}(u) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x(i)x(i+u)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x(i)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)\end{aligned}$$

(2)当$u\neq 0$时，结合式(12)和伪随机序列的特性有

$$\begin{aligned}R_{(X,Y)}(u) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x(i)x(i+u)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x(i)\\ &= \frac{1}{2}(-1+1)=0\end{aligned}$$

综合(1)和(2)有

$$R_{(X,Y)}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(n+1), & u=0\\ 0, & u\neq 0\end{cases} \tag{13}$$

下面的证明过程类似于定理 1 的证明，故在此省略。 证毕

7 最佳三元序列偶的周期乘积构造法

本节将研究利用两个最佳三元序列偶构造新的高阶最佳三元序列偶的方法。

设序列偶(X_1,Y_1)的周期长度为 n_1，序列偶(X_2,Y_2)的周期长度为 n_2，如果 n_1 和 n_2 互素，则这两个序列偶的周期乘积序列偶(X,Y)为 $X=X_1\times X_2$，$Y=Y_1\times Y_2$。

定理 4 如果周期长度为 n_1 的序列偶(X_1,Y_1)和周期长度为 n_2 的序列偶(X_2,Y_2)均为最佳三元序列偶，并且 n_1 和 n_2 互素，则它们的周期乘积序列偶(X,Y)为最佳三元序列偶。

证明 周期乘积序列偶(X,Y)的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_{(X,Y)}(u) &= \sum_{i=0}^{n_1n_2-1} x(i)y(i+u)\\ &= \sum_{i=0}^{n_1n_2-1} x_1(i)x_2(i)y_1(i+u)y_2(i+u)\end{aligned}$$

由于 n_1 和 n_2 互素，因此上式在每一个周期 n_1n_2 中，所有可能的乘积 $x_1(i)y_1(i+u)$ 或 $x_2(i)y_2(i+u)$ 仅仅出现一次，故上式即为

$$\begin{aligned}R_{(X,Y)}(u) &= \sum_{i=0}^{n_1-1} x_1(i)y_1(i+u)\sum_{j=0}^{n_2-1} x_2(j)y_2(j+u)\\ &= R_{(X_1,Y_1)}(u)R_{(X_2,Y_2)}(u)\end{aligned}$$

又因为序列偶(X_1,Y_1)和序列偶(X_2,Y_2)均为最佳三元序列偶，则由最佳三元序列偶的定义有

$$R_{(X_1,\ Y_1)}(u)=\begin{cases}E_1\neq 0, & u=0\\ 0, & u\neq 0\end{cases}$$

$$R_{(X_2,\ Y_2)}(u)=\begin{cases}E_2\neq 0, & u=0\\ 0, & u\neq 0\end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned}R_{(X,Y)}(u) &= R_{(X_1,Y_1)}(u)R_{(X_2,Y_2)}(u)\\ &= \begin{cases}E=E_1E_2\neq 0, & u=0\\ 0, & u\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

综上由最佳三元序列偶的定义知，序列偶(X,Y)为最佳三元序列偶。 证毕

因为最佳二元序列偶是最佳三元序列偶中两个序列中“0”元素个数均为零的特殊情况，最佳屏蔽二元序列偶是最佳三元序列偶序列 X 的“0”元素个数为零的特殊情况，

所以由定理 4 可以得到如下推论。

推论 1 如序列偶(X_1, Y_1)为周期长度为 n_1 的最佳三元序列偶，序列偶(X_2, Y_2) 为 周期长度为 n_2 的最佳二元序列偶，并且 n_1 和 n_2 互素，则它们的周期乘积序列偶(X, Y)为最佳三元序列偶。

推论 2 如序列偶(X_1, Y_1)为周期长度为 n_1 的最佳三元序列偶，序列偶(X_2, Y_2) 为 周期长度为 n_2 的最佳屏蔽二元序列偶，并且 n_1 和 n_2 互素，则它们的周期乘积序列偶(X, Y)为最佳三元序列偶。

使用上面的定理和推论，则可以利用已知的低阶最佳三元序列偶、最佳二元序列偶和最佳屏蔽二元序列偶来构造高阶的最佳三元序列偶。

8 结束语

本文在最佳二元序列偶、最佳屏蔽二元序列偶等研究的基础上，提出了一种新的最佳循环相关信号，即最佳三元序列偶。给出了最佳三元序列偶的定义和变换性质，研究了最佳三元序列偶和最佳二元序列偶、最佳屏蔽二元序列偶、伪随机序列之间的关系，通过文中给出的结论，可以利用已有的最佳二元序列偶、最佳屏蔽二元序列偶以及伪随机二元序列偶来构造最佳三元序列偶。此外，文中还研究了最佳三元序列偶的周期乘积构造方法，从而可以利用低阶的序列偶构造高阶的序列偶，从而进一步丰富了最佳循环相关理论。

参 考 文 献

[1] 杨义先. 最佳信号理论与设计[M]. 北京：人民邮电出版社, 1996: 35-39.

[2] Wolfmann J. Almost perfect binary sequences[J]. *IEEE Trans. on Inform.Theory*, 1992, 38(4): 1412-1418.

[3] Anon. Odd-pefect, almost binary correlation sequences[J]. *IEEE Trans. on Aero. And Elec. Syst*, 1995, 31(1): 495-498.

[4] Sarwate D V, and Pursley M B. Crosscorrelation properties of pseudorandom and related sequences[J]. *Proc. IEEE*, 1980, 68(5): 593-619.

[5] Hoholdt T, *et al.*. Ternary sequences with perfect periodic auto-correlation[J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1983, IT -29(4): 597-600.

[6] 赵晓群. 阵列偶和加权二元序列理论的研究[D]. [博士论文], 哈尔滨工业大学, 1998: 57-73.

[7] Jiang Ting, Zhao Xiao-Qun, and Hou Lan-Tian. Perfect punctured binary sequence pair[J]. *Journal of Electronics* (*China*), 2003, 20(4): 285-288.

[8] 许成谦, 靳慧龙. 几乎最佳相关二元序列偶[J]. 遥测遥控, 2003, 24(5): 16-20.

[9] 毛飞, 蒋挺, 赵成林, 周正. 伪随机二进序列偶研究[J]. 通信学报, 2005, 26(8): 94-98.

[10] Mao Fei, Jiang Ting, Zhao Chenglin, and Zhou Zheng. Research on perfect dyadic binary sequence pair[J]. *Journal of Electronics* (*China*), 2006, 23(3): 361-364.

[11] 毛飞, 蒋挺, 周正等. 奇周期最佳几乎二进序列偶理论研究[J]. 北京邮电大学学报, 2006, 29(6): 77-80.

[12] 肖国镇, 梁传甲, 王育民. 伪随机序列及其应用[M]. 北京：国防工业出版社, 1985: 47-61.

毛 飞： 男，1978 年生，博士后，主要从事信息理论和无线通信技术研究.

吴 宁： 女，1956 年生，教授，主要从事计算机测量与控制、信号处理等研究工作.

周 正： 男，1945 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事无线电通信技术、信号处理研究.