

由投影重建图像的对称块迭代算法

邱 钧^{①②} 徐茂林^①

^①(北京信息工程学院应用数学研究室 北京 100101)

^②(中国科学院研究生院数学系 北京 100039)

摘要: 由投影重建图像的迭代算法有抑制噪声等优点,但其投影矩阵的计算量大、影响重建速度。该文利用投影线存在的几何对称结构,引入图像重建的对称块迭代算法(简称为SB-IRT),简化了投影矩阵系数的计算,调整了迭代算法的顺序相关性。对于模拟和实测数据进行了图像重建试验,结果表明:与常规算法比较,该文提出的对称块迭代算法重建速度快,重建图像精度高。

关键词: 图像重建; 对称块迭代; 变换群

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)10-2296-05

A Method of Symmetric Block-Iterative for Image Reconstruction

Qiu Jun^{①②} Xu Mao-lin^①

(Research Division of Applied Mathematics, Beijing Information Technology Institute, Beijing 100101, China)

(Department of Mathematics, Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: With a method of series expansion for image reconstruction, there exists great difficulties in terms of slow reconstruction due to bulk data to deal with. This paper presents the symmetric structure of projection lines for image reconstruction and provides a simplified algorithm for the coefficients of projection matrix via this symmetric structure, thereby an ad hoc method of fast Symmetric Block-Iterative Reconstruction Technique (SB-IRT) is introduced to solve the image reconstruction problem. The experimental image reconstruction utilizing the symmetric block-iterative algorithm with both simulated and experimental projection data is undertaken. In comparison with the performance of other conventional algorithms, the results show that the image reconstruction using the presented algorithm is much faster, and the reconstruction images has much better precision than the others.

Key words: Image reconstruction; Symmetric block-iterative; Transformation group

1 引言

由投影重建图像常用算法主要有两类^[1-5],一类是滤波反投影法,简称为FBP,是目前最常用的算法,分辨率高,可实时成像。它基于Radon变换反演的闭合公式,要求数据满足完备性。另一类是代数重建算法,其特点是开始就将连续的图像离散化,其经典算法是Gorden等^[1]提出的代数重建迭代算法,简称为ART,以及Gilbert^[2]提出的SIRT法。其后发展主要是以优化理论为基础的各种迭代算法^[6-9]。对上述经典迭代格式的修正,主要是 Eggerment^[10]等将ART中的Kaczmarz迭代改进为固定块迭代,Censor^[11]及Herman^[3,12,13]进一步改进为可变块迭代,使经典迭代法形成一个统一的框架。

代数重建迭代算法的诱人之处是结构简单,有明确的物理和几何意义。代数重建迭代算法对解病态方程组有效,有

助于处理不完全数据重建图像问题(这对于数据不完全的大型检测目标尤为重要)。但代数重建迭代算法的突出缺点是计算量大,影响图像重建速度。影响迭代法收敛快慢的主要因素是:迭代格式、迭代顺序及投影矩阵的计算。通过实验分析其中计算投影矩阵的非零系数的运算,占整个重建计算量的90%以上;投影矩阵的非零系数的简化运算是改进迭代重建算法的主要突破口。上述提及的的各种算法都没有从根本上解决简化投影矩阵非零系数的计算问题。例如,Censor^[11]提出的可变块迭代法的一般框架,仅限于迭代格式的改进。

通常标准工业CT设备投影扫描经过转换在每个投影方向上投影线都是关于中心对称的,投影方向是旋转对称的因而投影线具有自然的几何对称结构。这一投影线的对称结构仅涉及像素格的位置,而与像素值无关,即与要重建的图像和重建图像区域内的目标检测物的几何形状无关。对于所有图像重建问题的离散化模型都适用。

本文提出一种图像重建的对称块快速迭代算法(SB-IRT)。该算法基于投影线对称结构,可以重构投影矩阵计算的迭代格式,改变逐线扫描式校正迭代顺序,由8个对称方

2006-09-15收到,2007-01-30改回

国家自然科学基金(60572103)和北京市教育委员会科技发展计划(K200310772129)资助课题

向的投影线组同时向图像重建计算区域中心扫描迭代校正。计算量比普通迭代算法成倍减少, 同时避免引入不必要的计算误差。对模拟和实测数据进行了图像重建实验, 并对各种性能指标作出分析。结果表明, 对称块迭代算法重建速度快, 图像精度高。

2 投影的对称性

设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ 是要重建的图像向量, \mathbf{X} 是一幅离散化图像, 图像像素数 $N = n \times n$; \mathbf{A} 为 $M \times N$ 维投影矩阵, 其中元素 a_{ij} 表示第 i 条射线与第 j 个像素格相交的长度。若投影数据向量为 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_M)^T$, 则成像方程可写为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (1)$$

由投影重建图像问题即是如何反演上述方程。式(1)是一个大型病态方程组, 常用迭代法求某种形式的优化解。迭代法求解必须先算出射线与图像 \mathbf{X} 各像素格相交的长度, 即算出投影矩阵 \mathbf{A} 的诸行向量。

下面叙述图像重建中的几何对称性结构及相应投影矩阵系数的简化算法。

几何对称性结构和正方形的对称性密切相关, 正方形的对称性用保持它不变的刚体变换刻画。

设在平面 xoy 上有一正方形, 其中心在原点 o , 一边平行于 x 轴(如图 1)。

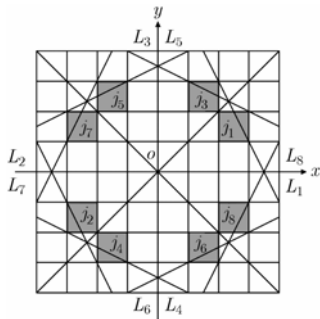


图 1 对称射线组和对称像素格示意图

正方形的反射对称性: T_x 为关于 x 轴的反射变换; T_y 为关于 y 轴的反射变换; T_+ 为关于直线 $y = x$ 的反射变换; T_- 为关于直线 $y = -x$ 的反射变换。

正方形的旋转对称性: R 为绕中心 o 反时针方向旋转 90° ; R' 为绕中心 o 反时针方向旋转 180° ; R'' 为绕中心 o 反时针方向旋转 270° 。

以上 7 个变换, 外加恒等变换 E 共 8 个变换, 以两个变换的相继变换作为乘法构成对称群, 记此群作 T 。 T 关于乘法运算是封闭的。特别是 $T_x T_- = R$, $T_y T_x = R'$, $T_x T_+ = R''$ 。所以群 T 可以表示成: $T = \{E, T_x, T_y, T_+, T_-, T_x T_-, T_x T_+, T_y T_x\}$, 这就是说 T 的每一个变换是反射, 或者相继二次反射。 T 不仅保持上述正方形不变, 而且保持像素格的对应位

置不变, 即全体像素格均有 T 对称性。

假设平面上有一条直线, 穿过 γ 个像素格, 被这 γ 个格子截取的线段长度沿直线的方向为 $\{v_1, v_2, \dots, v_\gamma\}$, 我们称 γ 为该直线的截格数, 数列 $\{v_1, v_2, \dots, v_\gamma\}$ 为该直线的格截段长序列。不难断定, T 保持在上述正方形中的直线的截格数和格截段长序列不变, 即 T 的任一变换把直线变成直线, 变换后的直线与变换前的直线有相同的截格数, 相同的格截段长序列。现在设有一直线 L_1 , 则利用群 T 可以得到 8 条线(如图 1), 记这 8 条线的线组为 $L = \{L_i\}_1^8$, L 的每一条线有相同的截格数, 相同的格截段长序列。

现在给出直线 L 的具体表达。设在平面 xoy 上任给一条射线:

$$L_1(p_1, \theta_1): p_1 = x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 \quad (2)$$

这里, θ_1 是射线 L_1 的法线与 x 轴的夹角, p_1 是原点到直线 L_1 的距离, 用群 T 中的变换找到另外 7 条射线, 如图 1 所示, 构造如下:

$$L_i(p_i, \theta_i): p_i = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i, \quad i = 2, 3, \dots, 8 \quad (3)$$

其中

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_1, \quad \theta_5 = \frac{\pi}{2} + \theta_1, \quad \theta_7 = \pi - \theta_1 \quad (4)$$

$$\theta_i = \theta_{i-1}, \quad i = 2, 4, 6, 8; \quad p_i = (-1)^{i-1} p_1, \quad i = 2, 3, \dots, 8 \quad (5)$$

若将在变换群 T 下的不变性看作 xoy 平面上射线之间的一种关系, 那么它是一等价关系, 它将平面上所有的射线分成了等价类, 每一类就是一个对称射线组, 两个对称组不含同一射线。这样, 就赋予了平面上的所有射线以简明的结构, 便于计算和分析。

现在来考察某一对称射线组所穿过的对称像素格 $\{x_{jk}\}_{k=1}^8$ (这里不妨仍以像素值 x_{jk} 表示像素) 位置的编号 $\{j_k\}_{k=1}^8$ 。可以看到, 由其中的八个对称像素所形成的图形成八对称形式(见图 1)。确切叙述如下:

设与射线 L_1 相交的第 j_1 个像素的位置为第 k 行、第 l 列(从图像 \mathbf{X} 的左下算起), 即

$$j_1 = k + nl \quad (6)$$

这里 n 是图像 \mathbf{X} 的行或列像素个数。

由变换群 T 得到, 其余对称像素的位置为

$$\left. \begin{aligned} j_2 &= T_x T_y(j_1) = (n-1-k) + n(n-1-l) \\ j_3 &= T_+(j_1) = (nk+l) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} j_4 &= T_-(j_1) = (n-1-l) + n(n-1-k) \\ j_5 &= T_x T_-(j_1) = l + n(n-1-k) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} j_6 &= T_x T_+(j_1) = (n-1-l) + nk \\ j_7 &= T_y(j_1) = k + n(n-1-l) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$j_8 = T_x(j_1) = (n-1-k) + nl \quad (10)$$

从式(6)~式(10)可知, 若求得了某射线 L_1 与图像 \mathbf{X} 各像素相交的长度, 那么 L_1 所在对称射线组的其余 7 条射线与图像 \mathbf{X} 各像素格相交的长度也就知道了。换言之, 若求出了投影

矩阵的某一行,则在变换群 T 下的另外 7 行便可得到。可见,运用上述几何对称性原则,计算投影矩阵的计算量理论上可压缩大约 8 倍。

另外,若图像 \mathbf{X} 不是方阵,此时射线组 L 的子射线组 L^* 在变换群 T 的子变换群 T_1 下是不变的,即 L^* 是关于子变换群 T_1 的对称射线组,这里取 $L^* = \{L_1, L_8, L_2, L_7\}, T_1 = \{I, T_x, T_y, T_x T_y\}$, L^* 中射线对应的格截段长序列在子变换群 T_1 下也是不变的。于是,相应的结果可平行得到。

3 经典迭代算法

记 $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,N})^T, 1 \leq i \leq M$; 则代数重建法 (Algebra Reconstruction Technique 简称 ART) 的松弛迭代格式如下^[1, 3]:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} + \alpha_j \frac{y_i - \langle a_i, X^{(j)} \rangle}{\|a_i\|^2} a_i \quad (11)$$

式中符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积,这里, j 是迭代次数, α_j 是松弛系数,且 $\varepsilon_1 \leq \alpha_j \leq \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 是很小的正实数。这是一种逐线校正法,方程是循环迭代的,即 $i = i(j) = (j \bmod M) + 1$ 。当松弛系数 $\alpha_j \equiv 1$ 时,即是 Kaczmarz 迭代法。

同时迭代重建法 (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, 简称 SIRT) 的 Cimmino 迭代格式如下^[2, 3]:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} + \alpha_j \sum_{i=1}^M \frac{y_i - \langle a_i, X^{(j)} \rangle}{\|a_i\|^2} a_i \quad (12)$$

它是逐点校正的,每次迭代应考虑全部方程。利用对称性结构可得到如下对称块迭代算法。

4 对称块迭代算法

从光源出发的任意一条射线 L_i 确定了矩阵 \mathbf{A} 中的一行 a_i ,反之亦然,于是向量集 $\tilde{\mathbf{A}} = \{a_i\}_{i=1}^M$ 与相应射线集 $\{L_i\}_{i=1}^M$ 之间有一一对应关系。因此向量集 $\tilde{\mathbf{A}}$ 也按变换群 T 分类。记 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的指标集为 $I = \{1, 2, \dots, M\}$,与 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的分类相对应,指标集 I 相应地分割为: $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{M_0}, M_0 = M/8$ 。则 $\tilde{\mathbf{A}} = \bigcup_{K=1}^{M_0} \{T(a_{i_K})\}$, 这里 $i_K \in I_K$, 且

$$T(a_{i_K}) = \{I(a_{i_K}), T_x(a_{i_K}), T_y(a_{i_K}), T_+(a_{i_K}), T_-(a_{i_K}), T_x T_y(a_{i_K}), T_x T_+(a_{i_K}), T_x T_-(a_{i_K})\} \quad (13)$$

由射线的截格数及截格序列的不变性,所以

$$\|T(a_{i_K})\| = \|a_{i_K}\| \quad (14)$$

相应地,对数据 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_M)^T$ 也作与 $\tilde{\mathbf{A}}$ 同样的分类。并将变换群 T 重新记为 $T = \{T_i\}_{i=1}^8$,由式(13)~式(14),在变换群 T 下 ART 新迭代格式,本文记为 S-ART,如下:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} + \alpha_j \frac{T_i(y_{i_K}) - \langle T_i(a_{i_K}), X^{(j)} \rangle}{\|a_{i_K}\|^2} T_i(a_{i_K}), \quad i = 1, 2, \dots, 8; i_K \in I_K \quad (15)$$

在 S-ART 迭代中,方程的循环方式变为: $K = (j \bmod M_0) + 1$,即迭代是按对称射线组的顺序进行的。因此按式(15)

进行迭代,不仅简化了投影矩阵的计算,而且调整了方程的迭代顺序。后者可改善收敛速度,因为迭代前后两条射线的位置夹角为大角度时比较优越^[3],这也是新方法重建快速的原因之一。关于收敛及快慢的一般论证见文献[3]。

迭代格式(15)只是按对称射线组的顺序进行迭代的,仍然是逐线校正。下面给出按对称射线组进行校正的方法,本文称为对称块迭代算法,简称为 SB-IRT 算法:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} + \alpha_j \sum_{i=1}^8 w_i^{(j)} \left[\frac{T_i(y_{i_K}) - \langle T_i(a_{i_K}), X^{(j)} \rangle}{\|a_{i_K}\|^2} \right] T_i(a_{i_K}) \quad (16)$$

这里 $K = (j \bmod M_0) + 1, i_K \in I_{i(j)}$,而 $\{i(j)\}$ 是关于对称块指标集 $\{1, 2, \dots, M_0\}$ 的控制序列,即控制对称块的迭代顺序。 $w^{(j)} = (w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_8^{(j)})$ 表示第 j 次迭代的权系数。对 SIRT 法也可以运用对称性原理,得到下面的迭代格式:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} + \alpha_j \sum_{K=1}^{M_0} \sum_{i=1}^8 w_i^{(j)} \frac{T_i(y_{i_K}) - \langle T_i(a_{i_K}), X^{(j)} \rangle}{\|a_{i_K}\|^2} T_i(a_{i_K}) \quad (17)$$

可以看到式(15)、式(17)是两个极端的对称迭代格式。式(16)每次是按一个对称块进行校正,而式(17)每次按所有的对称块进行校正;式(15)仍然是逐线校正,但迭代顺序是按对称块进行的。

5 模拟和实测数据图像重建结果

5.1 模拟数据的图像重建

图 2 是模拟数据的 256×256 Shepp-Logan 头像模型;采集的数据量是 200×301 ,即在 200 个角度下(覆盖 180° 角度范围),每角度取 301 条射线,为完全平行投影数据集。对标准的平行束数据分别由算法 SB-IRT, S-ART, ART 及 SIRT 重建的结果如图 3 (a), 图 3 (b), 图 3 (c), 及图 3 (d) 所示。

重建图像与图 2 标准测试模型之间的 3 个误差测度 d, r, e 顺次表示为归一化均方根距离测度值、归一化平均绝对距离测度值和最坏距离测度值。 d, r, e 作为重建质量的评估由下表 1 给出。表中也给出了迭代次数及计算时间。实验是在 P4-1.5GHz, 256MBRAM, WINDOWS2000 和 VC++6.0 环境下进行的。从重建图像的误差比较可以看出,对称块迭代算法(SB-IRT)各项指标均优于常规的 ART, SIRT 算法及 S-ART 算法,而逐线对称迭代算法(S-ART)在迭代时间上较占优。结果表明,基于对称性的迭代算法较之常规算法不仅重建速度快,而且重建图像精度高。

表 1 模拟数据的图像重建误差及时间比较

重建算法	迭代次数	d	r	e	时间(s)
SBIRT	6	0.075781	0.064390	8.362778	11.5
SART	6	0.114897	0.073197	19.448929	6.4
ART	6	0.116890	0.078356	23.102844	31.1
SIRT	6	0.287115	0.243375	41.630286	42.7

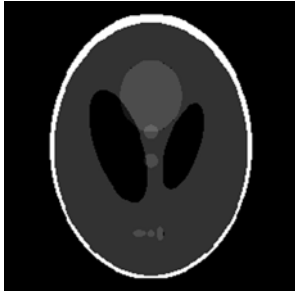


图 2 Shepp-Logan 头像模型

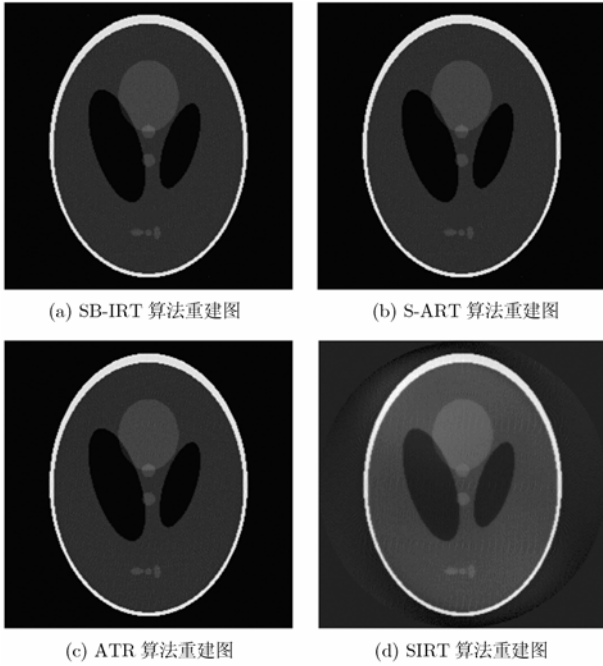


图 3

5.2 实测数据的图像重建

该数据为用国产工业CT设备扫描陶瓷叶片的投影重排数据。投影数据量是 576×281 。即在 576 个角度下(覆盖 180° 角度范围)，每角度取 281 条射线，为等价的平行投影数据集。图 4(a)，图 4(b)，图 4(c)是分别由算法SB-IRT、S-ART及ART重建的 256×256 图像；迭代次数均为 6 次，迭代时间分别为 18.3s、10.1s及 60.6s。实验环境与模拟数据重建实验相同。试验结果同样表明，对称迭代算法重建速度快，而且重建图像具有较高的分辨率。

6 结束语

代数迭代重建方法的基本思路是利用加权平均过程把重建图像过程中的数据误差转化为图像误差，再把图像误差按照某种方式补偿到当前重建的图像。加权平均过程不同对应着不同的代数重建方法。加权平均过程有利于数据中随机噪声的抑制，但是在噪声存在的情形下，采用逐线扫描式校正迭代方法的重建图像对投影数据的顺序相关性有依赖关系。

基于投影线几何对称结构的对称块迭代算法重构了投影矩阵计算的迭代格式，改变了逐线扫描迭代校正的顺序相关

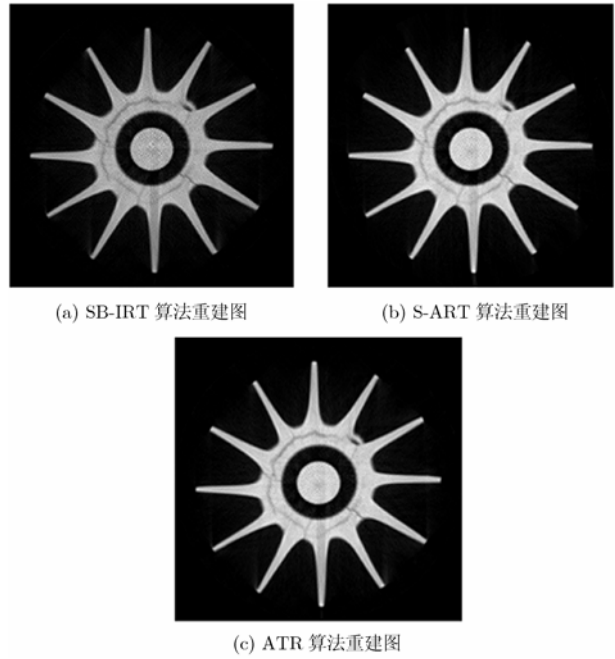


图 4

性。可以根据投影数据量构造由多条投影线组成的大型对称块。加快迭代速度且避免计算误差，对于数据不完全的大型目标检测尤为重要。更复杂的对称块优化构造值得进一步研究与关注。

在一般性的条件下，对称射线组的投影线都是关于中心对称的，几何对称的投影线组可以组成关于坐标中心的反射变换和旋转变换的变换群。对于更一般的矩形重建图像问题，射线组的子射线组在变换群的子变换群下保持其不变性。同样可以利用射线组构造迭代块，简化并优化投影系数矩阵的计算。这一方法适用于所有图像重建问题的离散化模型。例如，应用于滤波反投影法的反投影运算可以重构反投影矩阵的几何相关性和顺序相关性；应用于多准则优化算法和基于优化堆栈设计的随机选择性迭代算法等等。在三维由投影重建图像算法中仍然存在相应的对称性结构，对应的算法会更有效，进一步的研究与应用有望得到许多结果。

参考文献

- [1] Gorden R, Bender R, and Herman G T. Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray Photograph. *Journal of Theoretical Biology*, 1970, 29(5): 471-481.
- [2] Gilbert P F C. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, 1972, 36(4): 105-117.
- [3] Herman G T. Image Reconstruction from Projections. New York: Academic Press, 1980: 120-143.
- [4] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. NewYork: John Wiley & Sons, 1986: 89-130.

- [5] Ramm A G and Katsevich A I. The Radon Transform and Local Tomography. NewYork: CRC Press, 1996: 26-133.
- [6] Herman G T and Lent A. Quadratic optimization for image reconstruction I. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1976, 5(6): 319-332.
- [7] Wang Yuanmei and Lu Weixue. Multiobjective optimization approach to image reconstruction from projections, *Signal Processing*, 1992, 26(1): 16-15.
- [8] Jiang Ming and Wang Ge. Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction, *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003, 22(5): 569-579.
- [9] Wang Ge and Jiang Ming. Ordered-subset simultaneous algebra reconstrucion techniques, *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2004, 12(4): 169-177.
- [10] Eggermont P P B, Herman G T, and Lent A. Iterative algorithms for large partitioned linear systems, with applications to image reconstruction, *Linear Algebra and its Applications*, 1981, 40(2): 37-67.
- [11] Censor Y, Parallel application of block-iterative methods in medical imaging and radiation therapy, *Mathematical Programming*, 1988, 42(3): 307-325.
- [12] Herman G T , Levkowitz H, Tuy H K, and McCromick S. Multilevel image reconstruction in multiresolution image processing and analysis, (A. Rosenfeld, Editor), Springer-Verlag, Berlin, 1984: 121-135.
- [13] Censor Y and Herman G T. Block-iterative algorithms with underrelaxed Bregman projection, *SIAM Journal on Optimization* , 2002, 13(1): 283-297.
- 邱 钧: 男, 1966 年生, 副教授, 研究领域为图像重建、图像处理与分析.
- 徐茂林: 男, 1960 年生, 博士, 讲师, 研究领域为图像重建、图像处理与分析.