

非高斯有色噪声背景下二维谐波频率估计的累积量投影方法

张坤雷^① 王树勋^① 汪飞^②

^①(吉林大学通信工程学院 长春 130025)

^②(南京航空航天大学信息与科学技术学院 南京 210016)

摘要: 针对非高斯有色噪声中的二维谐波频率估计问题, 该文提出了复数线性非高斯过程的二维累积量投影定理。应用该定理并巧妙地构造观测信号的高阶累积量求得非高斯噪声的自相关, 并通过求解一个广义特征值对噪声空间进行预白化, 然后结合高分辨率的子空间方法二维 MUSIC 估计得到二维谐波参量。该文方法解决了非高斯有色噪声中的二维谐波频率估计问题, 特别地当非高斯噪声为对称分布和谐波信号中存在二次相位耦合时该文方法同样有效。仿真实验验证了该文结论。

关键词: 谐波; 累积量投影; 非高斯有色; 频率估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)10-2309-04

Cumulant Projection Method for Two-Dimensional Harmonics Frequency Estimation in Colored Non-Gaussian Noise

Zhang Kun-lei^① Wang Shu-xun^① Wang Fei^②

^①(Institution of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

^②(College of Information and Science & Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The problem of concern here was the two-dimensional (2-D) harmonic frequency estimation in colored non-Gaussian noise. The 2-D cumulant projection theorem of complex linear non-Gaussian process was presented. The noise auto-correlation estimation was obtained based on this theorem by skillfully constructing a high-order cumulant of the complex noisy harmonic. Then a generalized eigen-value problem was solved to prewhiten the noise space. Finally 2-D MUSIC was employed to retrieve the 2-D harmonic frequencies. This method can effectively extract frequencies from colored non-Gaussian noise, even though the noise is symmetrically-distributed or there exists quadratic phase coupling. Theory and algorithm are illustrated by simulation examples.

Key words: Harmonic; Cumulant projection; Non-Gaussian colored; Frequency estimation

1 引言

二维谐波恢复问题近年来受到广泛重视, 并已在雷达、声纳、地球物理、无线通信和生物医学等领域得到了广泛的应用, 针对该问题国内外学者已提出了很多方法。白噪声中的二维频率估计已经得到很好的解决, 而有色噪声背景下的这一问题还有待于进一步研究。因为高阶累积量对高斯噪声不敏感, 而且包含信号的频率和幅度信息, 基于此文献[1, 2]成功地解决了高斯有色噪声中的二维频率估计。文献[3,4]通过拓广的二维 ESPRIT 方法解决了二维 MA 非高斯有色噪声中的频率估计问题, 然而正如该文所说的, 当噪声为 AR 或 ARMA 模型的非高斯噪声时, 其方法失效。本文正是为了解决该问题而展开了研究。

近年来, 自从 Giannakis 和 Delopoulos 在文献[5]中证明

了线性非高斯过程的不同阶次的累积量之间存在着投影关系后, 该理论已经成功的应用到谱估计、系统辨识、信号检测和谐波恢复中。利用累积量投影关系, 文献[6]在实数域研究了非高斯有色噪声中的谐波恢复方法, 但当谐波信号中存在二次相位耦合时, 无法得到噪声的自相关估计, 该方法失效。文献[7]研究了复数域中的累积量投影定理, 解决了噪声为对称分布和信号中存在二次非线性相位耦合的谐波恢复。但文献[6,7]所解决的问题都仅限于一维。为了将累积量投影定理在二维信号处理中得到应用, 本文将该定理推广到二维, 并构造特定的高阶累积量来估计噪声的自相关, 然后通过求解一个广义特征值问题对噪声空间进行预白化, 最后通过高分辨率的子空间方法二维 MUSIC 估计得到二维谐波参量。本文方法能解决二维 AR, MA 或 ARMA 模型的非高斯有色噪声中的二维谐波频率估计问题, 特别地当非高斯噪声为对称分布和谐波信号中存在二次相位耦合时本文方法同样有效。

2006-06-30 收到, 2006-11-21 改回

国家自然科学基金(60572069)和教育部博士学科点专项基金(20050183073)资助课题

2 观测信号模型

二维谐波的观测模型为

$$x(m, n) = s(m, n) + v(m, n) \tag{1}$$

其中二维谐波信号为

$$s(m, n) = \sum_{l=1}^L A_l e^{j(\omega_{1l}m + \omega_{2l}n + \theta_l)} \tag{2}$$

式中 m, n 为二维时间坐标, $m = 0, 1, \dots, T_1 - 1$; $n = 0, 1, \dots, T_2 - 1$; L 为信号个数; $(\omega_{1l}, \omega_{2l})$ 为第 l 个信号频率对; θ_l 为第 l 个信号相位, θ_l 相互独立且在 $(-\pi, \pi)$ 上服从均匀分布; $v(m, n)$ 为零均值平稳非高斯有色噪声。对于 $v(m, n)$ 有如下假设:

AS1 $\omega_{kl} \in (-\pi, \pi)$, $k = 1, 2$ 。 $(\omega_{1l}, \omega_{2l}) \neq (0, 0)$, 且当 $l \neq i$ 时, $\omega_{1l} \neq \omega_{2i}$, $\omega_{2l} \neq \omega_{2i}$;

AS2 $v(m, n)$ 是线性过程, 即 $v(m, n) = \sum_{\tau_m} \sum_{\tau_n} e(\tau_m, \tau_n) h_v(m - \tau_m, n - \tau_n)$, $h_v(m, n)$ 绝对可和, $e(m, n)$ 为平稳的独立同分布 (iid) 非高斯白噪声;

AS3 信号 $s(m, n)$ 和噪声 $v(m, n)$ 相互独立;

AS4 $\sum_{\tau_1, \dots, \tau_{k-1}} |c_{k,v}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| < \infty$, $k = 1, 2, \dots, 8$ 。

3 基于累积量投影定理的非高斯有色噪声的自相关估计

Giannakis 和 Delopoulos 指出线性非高斯过程不同阶次的累积量之间满足高阶累积量投影定理。自相关即为二阶累积量, 因此应用这一性质, 可以通过线性非高斯过程的高阶累积量来获得其自相关^[4]。而使用投影定理由含噪谐波信号的高阶累积量估计噪声自相关时, 谐波信号起到干扰的作用, 因此关键在于使信号(无论是否存在二次相位耦合)的累积量为零, 同时噪声(无论何种分布)的累积量不为零, 且满足高阶累积量的投影定理。

根据累积量投影定理的要求, 当二维谐波信号中不存在二次相位耦合, 且非高斯有色噪声为非对称分布时, 下面给出复数过程的三阶累积量的一种定义

定义 1 模型(1)中 $x(m, n)$ 的三阶累积量定义为

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) = \text{cum}(x(m, n), x^*(m + \tau_1, n + \tau_2), x(m + \tau_3, n + \tau_4)) \tag{3}$$

复数谐波信号的三阶累积量的定义方式有 $2^3 = 8$ 种。定义1是其中的一种, 它不同于高斯有色噪声中谐波信号恢复的三阶累积量定义方式, 这是因为二者的目的不同。

由信号和噪声相互独立, 则

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) = c_{3s}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) + c_{3v}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) \tag{4}$$

易知, 谐波信号按定义1的三阶累积量 $c_{3s}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) = 0$ 。下面, 对于按定义1的三阶累积量, 本文建立复数线性非高斯过程的高阶累积量投影定理(定理1)。

定理 1 模型(1)中复数线性非高斯过程 $v(m, n)$ 满足下面的投影定理

$$c_{2v}(\tau_1, \tau_2) = \alpha_{23} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_4=-\infty}^{\infty} c_{3v}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) \tag{5}$$

其中 c_{3v} 按定义1; $c_{2v}(\tau_1, \tau_2) = E(v(m, n)v^*(m, n))$ 是复数过程 $v(m, n)$ 的自相关; $\alpha_{23} = \gamma_{2e}/\gamma_{3e} H_v(0, 0)$, γ_{2e} 和 γ_{3e} 是AS2 中 iid 过程 $e(m, n)$ 的二阶和三阶累积量; $H_v(\omega_m, \omega_n)$ 是AS2 中线性系统冲激响应 $h_v(m, n)$ 的傅里叶变换。

证明 由 AS2 中 $v(m, n) = \sum_{\tau_m} \sum_{\tau_n} e(\tau_m, \tau_n)$

$h_v \cdot (m - \tau_m, n - \tau_n)$, $h_v(m, n)$ 绝对可和, $v(m, n)$ 按定义1的三阶累积量为

$$\begin{aligned} c_{3v}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) &= \text{cum}(v(m, n), v^*(m + \tau_1, n + \tau_2), v(m + \tau_3, n + \tau_4)) \\ &= \text{cum}\left(\sum_{\tau_{m_0}} \sum_{\tau_{n_0}} e(\tau_{m_0}, \tau_{n_0}) h_v(m - \tau_{m_0}, n - \tau_{n_0}), \sum_{\tau_{m_1}} \sum_{\tau_{n_1}} e(\tau_{m_1}, \tau_{n_1}) h_v^*(m + \tau_1 - \tau_{m_1}, n + \tau_2 - \tau_{n_1}), \sum_{\tau_{m_2}} \sum_{\tau_{n_2}} e(\tau_{m_2}, \tau_{n_2}) h_v(m + \tau_3 - \tau_{m_2}, n + \tau_4 - \tau_{n_2})\right) \end{aligned}$$

由于 $e(m, n)$ 为 iid 过程

$$\begin{aligned} &= \sum_{\tau_{m_0}} \sum_{\tau_{n_0}} \sum_{\tau_{m_1}} \sum_{\tau_{n_1}} \sum_{\tau_{m_2}} \sum_{\tau_{n_2}} h_v(m - \tau_{m_0}, n - \tau_{n_0}) h_v^*(m + \tau_1 - \tau_{m_1}, n + \tau_2 - \tau_{n_1}) h_v(m + \tau_3 - \tau_{m_2}, n + \tau_4 - \tau_{n_2}) \\ &\quad \cdot \gamma_{3e} \delta(\tau_{m_1} - \tau_{m_0}, \tau_{n_1} - \tau_{n_0}) \delta(\tau_{m_2} - \tau_{m_0}, \tau_{n_2} - \tau_{n_0}) \\ &= \gamma_{3e} \sum_{\tau_{m_0}} \sum_{\tau_{n_0}} h_v(m - \tau_{m_0}, n - \tau_{n_0}) h_v^*(m + \tau_1 - \tau_{m_0}, n + \tau_2 - \tau_{n_0}) h_v(m + \tau_3 - \tau_{m_0}, n + \tau_4 - \tau_{n_0}) \\ &= \gamma_{3e} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} h_v(p, q) h_v^*(p + \tau_1, q + \tau_2) h_v(p + \tau_3, q + \tau_4) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_4=-\infty}^{\infty} c_{3v}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) \\ &= \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_4=-\infty}^{\infty} \gamma_{3e} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} h_v(p, q) h_v^*(p + \tau_1, q + \tau_2) \cdot h_v(p + \tau_3, q + \tau_4) \\ &= \gamma_{3e} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} h_v(p, q) h_v^*(p + \tau_1, q + \tau_1) \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_4=-\infty}^{\infty} h_v(p + \tau_3, q + \tau_4) \\ &= \frac{\gamma_{3e}}{\gamma_{2e}} \gamma_{2e} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} h_v(p, q) h_v^*(p + \tau_1, q + \tau_2) H(0, 0) \\ &= \frac{\gamma_{3e}}{\gamma_{2e}} H(0, 0) c_v(\tau_1, \tau_2) \end{aligned}$$

由 $\alpha_{23} = (\gamma_{2e}/\gamma_{3e}) H_v(0, 0)$ 即可得式(5)。定理得证。

类似定义1, 注意共轭的取法, 按照上面的推导, 容易拓展得到非高斯有色噪声任意不同阶次高阶累积量间的投影定理。

但是, 当谐波信号中存在二次相位耦合时, 信号的三阶累积量不为零; 另外, 实际中有时会遇到对称非高斯分布噪声, 如Laplace分布、Cauchy分布、均匀分布和混合高斯分布等, 这些噪声的三阶累积量为零。因此, 我们可以得出结

论, 当谐波信号中存在二次相位耦合或噪声为对称非高斯分布时, 上述基于三阶累积量的方法就失效了。幸运的是, 本文通过定义一种特殊的四阶累积量成功地解决了这个问题。

定义 2 模型(1)中 $x(m, n)$ 的四阶累积量定义为

$$\begin{aligned} c_{4x}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4; \tau_5, \tau_6) \\ = \text{cum}(x(m, n), x^*(m + \tau_1, n + \tau_2), \\ x(m + \tau_3, n + \tau_4), x(m + \tau_5, n + \tau_6)) \end{aligned} \quad (6)$$

复数谐波信号的四阶累积量的定义方式有 $2^4 = 16$ 种, 定义2是其中的一种。同样, 由信号和噪声相互独立, 则

$$\begin{aligned} c_{4x}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4; \tau_5, \tau_6) = c_{4s}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4; \tau_5, \tau_6) \\ + c_{4v}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4; \tau_5, \tau_6) \end{aligned}$$

易知, 复数谐波信号按定义2的四阶累积量 $c_{4s}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4; \tau_5, \tau_6) = 0$ 。另外, 即使谐波信号中存在二次相位耦合时, 代入定义2所求得的信号四阶累积量也为零。

类似地, 对按定义2的四阶累积量, 建立复数线性非高斯过程的累积量投影定理(定理2)。

定理 2 模型(1)中复数线性非高斯过程 $v(m, n)$ 满足下面的投影定理

$$\begin{aligned} c_{2v}(\tau_1, \tau_2) = \alpha_{24} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_4=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_5=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_6=-\infty}^{\infty} c_{4v}(\tau_1, \\ \tau_2; \tau_3, \tau_4; \tau_5, \tau_6) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 c_{4v} 按定义2; $\alpha_{24} = \frac{\gamma_{2e}}{\gamma_{4e}} [H_v(0, 0)]^{-2}$, γ_{2e} 和 γ_{4e} 是AS2

中 iid 过程 $e(m, n)$ 的二阶和四阶累积量; $c_{2v}(\tau_1, \tau_2)$ 和 $H_v(\omega_m, \omega_n)$ 同定理1。

定理2的证明方法同定理1, 本文在此不再详述。

4 二维谐波频率估计

在谐波恢复的噪声子空间方法中, 背景噪声假定为白色, 对噪声的分布情况没有要求, 即, 只要是白噪声, 不论它是高斯还是非高斯分布, 该方法都适用。所以, 利用噪声的自相关估计对非高斯有色噪声进行白化后, 即可应用噪声子空间方法进行谐波参量估计。本文通过求解一个广义特征值问题来实现对噪声空间的预白化, 这相当于旋转向量空间以消除或减弱有色噪声的影响, 然后使用MUSIC方法进行二维谐波频率估计。

复数含噪谐波信号 $x(m, n)$ 的自相关矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_v = E(x(m, n)x^H(m, n)) \\ = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 \mathbf{P} 为幅度阵; \mathbf{A} 为谐波阵; σ_v^2 是噪声方差, \mathbf{V} 是归一化噪声自相关矩阵。

若 \mathbf{V} 为单位矩阵, 则 $v(m, n)$ 为白噪声, 使用传统MUSIC方法即可恢复谐波信号。若 $v(m, n)$ 为有色噪声, 当其归一化自相关矩阵 \mathbf{V} 已知时, 则可通过下面的方法进行白化变换^[8]。

设 $y = \mathbf{V}^{-1/2}x$, 则变换后的 y 的自相关矩阵为

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{R}_x \mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{T}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{A}$, \mathbf{T} 的各列 $\mathbf{T}_i = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{A}_i, i = 1, \dots, p$ 。式(9)表明变换后, 有色噪声已被白化。

在变换后的向量空间中, 对应 L 个最大特征值的特征向量张成信号子空间, 其余的特征向量张成(变化后)噪声子空间, 假定 e_i 和 λ_i 代表 \mathbf{R}_y 的特征向量和特征值, 那么

$$\mathbf{R}_y e_i = \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{R}_x \mathbf{V}^{-1/2} e_i = \lambda_i e_i \quad (10)$$

设 $e_i = \mathbf{V}^{-1/2} e'_i$, 则式(10)变为

$$\mathbf{R}_x e'_i = \lambda_i \mathbf{V} e'_i \quad (11)$$

这是一个广义特征值问题, 可通过SVD方法得到特征向量, 然后通过MUSIC方法获得谐波信号频率。注意到求解式(11)需要 \mathbf{V} 而不是 σ_v^2 , 这刚好使投影定理能满足这一要求, 因为在式(5)和式(7)中 α_{23} 及 α_{24} 是无法估计到的, 而 \mathbf{V} 通过累积量投影定理后归一化即可得到。

5 仿真实验

计算机仿真实验中非高斯有色噪声 $v(m, n)$ 由非高斯 iid 过程 $e(m, n)$ 通过 AR(2) 模型 $v(m, n) + 0.9025v(m-2, n-2) = e(m, n)$ 来产生的。含噪观测值由下式产生

$$\begin{aligned} x(m, n) = \exp(j(\omega_{11}m + \omega_{21}n + \theta_1)) \\ + \exp(j(\omega_{12}m + \omega_{22}n + \theta_2)) + v(m, n) \end{aligned} \quad (12)$$

实验 1 考虑谐波信号中不存在二次相位耦合和非高斯有色噪声为非对称分布时的情形。

在式(12)中, $\omega_{11} = -0.9, \omega_{12} = 1.2, \omega_{21} = -0.4, \omega_{22} = 0.7$, $e(m, n)$ 为指数分布 iid 过程, 指数分布是一种非对称分布。实验结果如图1所示。

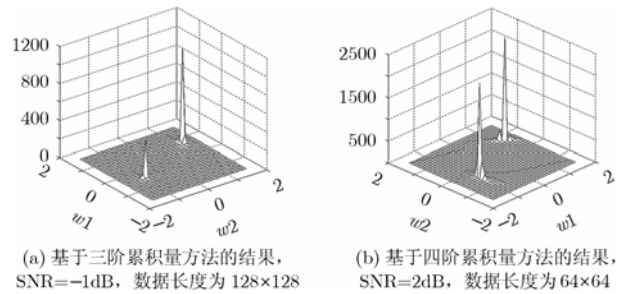


图1 谐波信号中不存在二次相位耦合和非高斯有色噪声为非对称分布时, 模型(1)中的二维频率估计

实验 2 考虑谐波信号中存在二次相位耦合时的情形。

式(12)中, $\omega_{11} = 0.6, \omega_{12} = 2\omega_{11} = 1.2, \omega_{21} = -0.4, \omega_{22} = 2\omega_{21} = -0.8, \theta_1 = \pi/6, \theta_2 = 2\theta_1 = \pi/3$; $e(m, n)$ 同实验1; 信噪比 $\text{SNR} = 3\text{dB}$, 数据长度为 64×64 。实验结果如图2所示。这里仅给出谐波信号中存在两个谐波分量时的结果, 对于三个或更多谐波分量情形, 结果完全相同。

实验 3 考虑非高斯有色噪声为对称分布时的情形。

式(12)中, $\omega_{11} = -0.6, \omega_{12} = 1.2, \omega_{21} = 1.0, \omega_{22} = 0.4$, 信噪比 $\text{SNR} = -2\text{dB}$, 数据长度为 64×64 。 $e(m, n)$ 为均匀分

布 iid 过程, 它是一种对称分布。实验结果如图3所示。

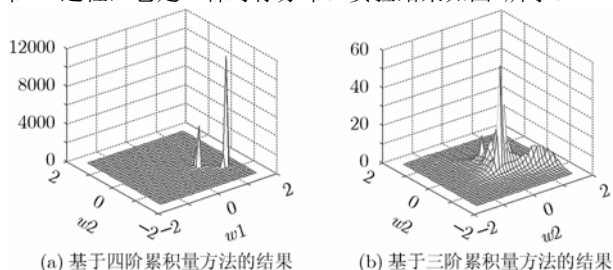


图2 谐波信号存在二次相位耦合时, 模型(1)中的二维频率估计

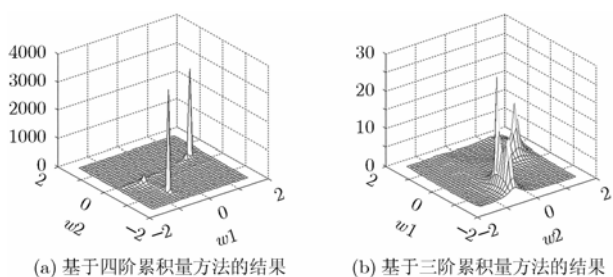


图3 对称分布非高斯噪声时, 模型(1)中的二维频率估计结果

对基于四阶累积量的方法和三阶累积量的方法进行了比较, 从实验结果可以看出, 当谐波信号中不存在二次相位耦合和非高斯有色噪声为非对称分布时, 两者均能很好地估计出二维谐波频率, 且后者比前者对信噪比要求低; 但当谐波信号中存在二次相位耦合和非高斯有色噪声为对称分布时, 前者仍然具有很好的性能, 而后者已经失效。

6 结束语

对称分布非高斯有色噪声或谐波信号中存在二次相位耦合时的二维谐波恢复是一个重要的研究问题。本文通过建立二维复数线性非高斯过程的累积量投影定理, 利用复数观测值的一种特定的四阶累积量来估计噪声的自相关, 然后求解一个广义特征值问题对噪声空间进行预白化, 最后结合噪声子空间方法MUSIC提取了二维谐波信号频率。该方法成功地解决了二维AR、MA或ARMA模型的非高斯有色噪声中的二维谐波频率估计问题, 不论非高斯有色噪声为对称还是非对称分布, 或者谐波信号是否存在二次相位耦合, 都能得到满意的结果。本文将累积量投影定理推广到二维谐波信号估计中, 有助于它在其他问题中的应用。

参考文献

- [1] Hosnym Ibrahim and Reda R Gharieb. Estimating two dimensional frequencies by a cumulant-based fblp method [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1999, 47(1): 262-266.
- [2] Gharieb R R. Cumulant-based LP method for two-dimensional spectral estimation [J]. *IEE Proc-Vis Singal Process*, 1999, 146 (6): 307-312.
- [3] 汪飞, 王树勋, 窦慧晶. 色噪声背景下的二维谐波频率估计. *电子学报*, 2004, 32(6): 973-976.
Wang Fei, Wang Shu-xun, and Dou Hui-jing. Estimating two-dimensional frequencies by extended ESPRIT Type Method. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(6): 973-976.
- [4] Wang Fei, Wang Shu-xun, and Dou Hui-jing. Estimating two-dimensional frequency pairs by extended ESPRIT-type method. 2003 International Conference on Communication Technology (ICCT2003), Beijing, China, April, 9-11, 2003.
- [5] Giannakis G and Delopoulos A. Non-parametric estimation of autocorrelation and spectra using cumulants and polyspectra In: *Proc SP IE'90 (San Diego, CA)*. 1990: 503-517.
- [6] Sadler B and Giannakis G. Noise subspace techniques in non-Gaussian noise using cumulants. *IEEE Transon. on AES*, 1995, 31: 1009-1018.
- [7] 张严, 王树勋. 非高斯有色噪声中谐波恢复的累积量投影方法. *通信学报*, 1998, 19(11): 30-37.
Zhang Yan and Wang Shu-xun. Cumulant projection method for harmonic retrieval in colored non-gaussian Noise". *Journal of China Institute of Communications*, 1998, 919(11): 30-37.
- [8] Therrien W. *Discrete random signals and statistical signal processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.

张坤雷: 男, 1983年生, 硕士生, 研究方向为高阶统计量理论及其在二维谐波恢复和矢量传感器阵列信号处理中的应用。

王树勋: 男, 1946年生, 教授、博士生导师, 主要研究方向为高阶统计量在数字信号处理中的应用及微计算机应用, 已出版著作3部, 发表论文二百余篇。

汪飞: 男, 1976年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为高阶统计量理论及二维循环平稳时间序列分析。