求解电场积分方程的高阶矩量法

王少刚　关鑫璞　王党卫　马兴义　粟　毅
(国防科技大学电子科学与工程学院　长沙　410073)

摘　要：高阶矩量法越来越多地用于求解目标散射问题。该文对高阶矩量法中的若干问题进行了分析。由于高阶矩量法需处理多重数值积分，该文提出了一种把多重数值积分转化为矩阵乘积的方法。对于矩量法阻抗矩阵的填充，每次只需计算积分节点上格林函数的值，大大缩短矩阵填充时间，提高了高阶距量法的效能。对奇异(准奇异)积分的不同处理方法做了总结，并对其优劣做了评价。

关键词：高阶方法；积分方程；矩量法；散射
中图分类号：O441　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2007)09-2265-04

Solution of the Electric Field Integral Equation Using Higher-Order Method of Moments

Wang Shao-gang　Guan Xin-pu　Wang Dang-wei　Ma Xing-yi　Su Yi
(*School of Electronic Science and Technology*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

Abstract: The Higher-Order Method of Moments (HO-MoM) is frequently used to calculate the electromagnetic scattering, because of its high efficient and accurate. Several issues are analyzed in this paper for using the HO-MoM. Firstly, multi-dimension numerical integrations calculated again and again, a novel method is presented in this paper to translate integrations to the product of matrices. When the matrix from MoM filled, it is only needed to calculated the Green's function at integral nodes. That will reduces CPU time and increase the efficiency of HO-MoM. Secondly, the different methods, used to treat with singular integral or quasi-singular integral, is summarized and estimated.

Key words: Higher-order methods; Integral equations; Method of Moments (MoM); Scattering

1　引言

频域矩量法是求解散射、辐射问题比较准确的数值方法。应用较多的为RWG基函数方法，根据求解的方程类型(面积分或体积分)，需把目标表面剖分为三角面片，或把目标体剖分为四面体，这种方法称为低阶矩量法，当结果精度要求较高时，计算时间和内存需求都迅速增大。近几年来，高阶矩量法[1,2]成为频域矩量法研究的热点。相应的目标面或体用高阶面或体元素模拟，大大降低了面或体元素数目。处理的积分方程用高阶基函数离散化，使得未知量数目减少。

高阶方法主要有两种，一种为Galerkin方法，这种方法的高阶基函数可归结为两类：高阶插值基函数[3] (interpolate basis functions)和高阶叠层基函数[2](hierarchical basis functions)。插值基函数在一系列插值点上记入场值，在一个插值点上只有一个基函数不为零。这使得基函数在目标网格上展开阶数为常数，且要求剖分的网格为等尺寸的几何元素。而叠层基函数要灵活得多，可以在不同的网格上展开不同阶数。另外一种高阶方法将未知电流用目标表面上的一些离散点处的电流取样来表示，而积分方程的求解则采用Nyström方法[4]。但是，该方法要用到局域修正技术：即需要利用LU分解或奇异值分解(SVD)方法求解相应的矩阵方程。在未知量相同的情况下，前一种高阶方法比后者计算精度要高。本文采用的是高阶叠层基函数。

高阶矩量法的实现，需要重复处理四重积分(面积分方程)和六重积分(体积分方程)。这些积分通常用 Gauss-Legendre 等数值方法计算。如果每次都直接计算这些多重积分数值积分，将大大增加矩阵填充时间，无法充分发挥高阶矩量法的优势。本文对此提出了一种快速有效的处理方法，把多重积分转化为矩阵乘积来处理，从而减少矩阵填充时间。此外，文章第 4 节对积分的奇异(准奇异)问题的不同处理方法做了总结，并分析了它们的效能。第 5 节对不同金属目标做了数值计算，验证了多重积分处理的有效性和奇异(准奇异)处理的正确性。

2　高阶矩量法原理

考虑包含任意形状金属物体的电磁散射系统。假设该系统被一时谐电磁场激励，复场强度为 $\boldsymbol{E}^i$ 和 $\boldsymbol{H}^i$，角频率为 ω。金属面上只有电流 $\boldsymbol{J}_S$，而磁流 $\boldsymbol{M}_S=0$。根据边界条件，建立电场方程：

$$\left[\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{J}_S,\varepsilon_1,\mu_1)\right]_{\tan}+\left[\boldsymbol{E}^i\right]_{\tan}=0 \tag{1}$$

2006-05-11 收到，2006-09-29 改回

其中目标外部媒质的介电常数和磁导率为 ε_1 和 μ_1。式(1)，式(2)中，$\boldsymbol{J}_S$ 是未知量，通常采用矩量法求解。

若目标表面(包括介质和金属面)用参数曲面模拟，本文考虑四边形参数曲面。参数坐标系统 (u,v) 的定义为：$-1 \le u,v \le 1$，P 阶四边形的参数方程可写为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\sum_{i=0}^{P}\sum_{j=0}^{P}\boldsymbol{r}_{ij}\varphi_i(p,u)\varphi_j(p,v) \tag{2}$$

$\boldsymbol{r}_{ij}$ 是插值节点，$\varphi_i(P,u)$ 是 P 阶第 i 个 Lagrange 函数：

$$\varphi_i(P,u)=\sum_{k=0,k\ne i}^{P}\frac{u-u_k}{u_i-u_k}=\sum_{k=0,k\ne i}^{P}\frac{\frac{P}{2}(u+1)-k}{i-k} \tag{3}$$

每个四边形表面的电流密度可用基函数表示为

$$\boldsymbol{J}_s(u,v)=\sum_{i=0}^{N_u}\sum_{j=0}^{N_v-1}\beta_{uij}\boldsymbol{f}_{uij}(u,v)+\sum_{i=0}^{N_u-1}\sum_{j=0}^{N_v}\beta_{vij}\boldsymbol{f}_{vij}(u,v) \tag{4}$$

其中基函数

$$\boldsymbol{f}_{uij}(u,v)=\frac{P_i(u)v^j}{J(u,v)}\boldsymbol{a}_u(u,v) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{f}_{vij}(u,v)=\frac{u^iP_j(v)}{J(u,v)}\boldsymbol{a}_v(u,v) \tag{6}$$

$$P_i(u)=\begin{cases}1-u, & i=0\\ 1+u, & i=1\\ u^i-1, & i\ge 2,\ \text{偶数}\\ u^i-u, & i\ge 3,\ \text{奇数}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_u(u,v)=\frac{\partial\boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u},\qquad \boldsymbol{a}_v(u,v)=\frac{\partial\boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v} \tag{7}$$

这里，$-1\le u,v\le 1$，N_u，N_v 是多项式电流展开阶数，β_{uij}，β_{vij} 是未知量。式(1)中电流用式(4)的形式展开，并采用Galerkin检验方法，得到矩阵方程 $\boldsymbol{ZI}=\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{V}$ 是激励向量，$\boldsymbol{I}$ 是 β_{uij}、β_{vij} 组成的未知量向量，$\boldsymbol{Z}$ 中元素化简可写为[2]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(i_m,j_m,i_n,j_n)=&-j\omega\mu\sum_{k_m=1}^{p^{(m)}}\sum_{l_m=0}^{p^{(m)}}\sum_{k_n=1}^{p^{(n)}}\sum_{l_n=0}^{p^{(n)}}k_mk_n\boldsymbol{r}_{k_ml_m}^{(m)}\cdot\boldsymbol{r}_{k_nl_n}^{(n)}\\&\cdot\xi(i_m+k_m-1,j_m+l_m,i_n+k_n-1,j_n+l_n)\\&-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\zeta(i_m-1,j_m,i_n-1,j_n)\end{aligned} \tag{8}$$

其中下标或上标 m 表示第 m 个面片，n 表示第 n 个面片，且

$$\begin{aligned}&\xi(i_m,j_m,i_n,j_n)\\&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u_m^{i_m}v_m^{j_m}u_n^{i_n}v_n^{j_n}g\cdot(R)\mathrm{d}u_n\mathrm{d}v_n\mathrm{d}u_m\mathrm{d}v_m\end{aligned} \tag{9}$$

一般地，取 $N_u=N_v=M$，则 $0\le i_m,j_m,i_n,j_n\le M$。$g(R)=e^{-jkR}/R$ 为标量格林函数。

3 数值积分快速计算方法

高阶矩量法的实现需要重复计算形如式(9)的数值积分。式(9)的直接计算将占用大量的矩阵填充时间，对数值积分做处理，将增加计算效率。

如果源面片(第 n 个面片)和场面片(第 m 个面片)不是同一个面片，则式(9)可用Gauss-Legendre数值积分求解。由于每重积分之间自变量各不相关，取每重数值积分节点数分别为 N_{Gum}，N_{Gvm}，N_{Gun}，N_{Gvn}。欲得到精确的积分结果，节点数满足条件[5]：$N_{\mathrm{Gum}}\ge M+1$，$N_{\mathrm{Gvm}}\ge M+1$，$N_{\mathrm{Gun}}\ge M+1$，$N_{\mathrm{Gvn}}\ge M+1$。本文取积分节点数：$N_{\mathrm{Gum}}=N_{\mathrm{Gvm}}=N_{\mathrm{Gun}}=N_{\mathrm{Gvn}}=M+1$。单重积分节点用向量表示为 $[x_k]_{(M+1)\times 1}$，对应的系数向量为 $[A_k]_{(M+1)\times 1}$。

式(9)用 Gauss-Legendre 数值积分法表示为

$$\begin{aligned}\xi(i_m,j_m,i_n,j_n)=&\sum_{c=0}^{M}\sum_{d=0}^{M}\sum_{e=0}^{M}\sum_{f=0}^{M}A_cA_dA_eA_fu_{mc}^{i_m}v_{md}^{j_m}u_{ne}^{i_n}v_{nf}^{j_n}\\&\cdot gR(u_{mc},v_{md},u_{ne},v_{nf})\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $u_{mc},v_{md},u_{ne},v_{nf}\in[x_k]_{(M+1)\times 1}$，$A_c,A_d,A_e,A_f\in[A_k]_{(M+1)\times 1}$。填充矩阵时，Gauss-Legendre 积分节点和系数都不变，只有标量格林函数 $g(R)$ 需重新计算。因此，定义矩阵 Z_{uv}，预先存储积分系数。矩阵元素为

$$\boldsymbol{Z}_{uv}(p,q)=A_cA_dA_eA_fu_{mc}^{i_m}v_{md}^{j_m}u_{ne}^{i_n}v_{nf}^{j_n} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}p=&i_m(M+1)(M+1)(M+1)\\&+j_m(M+1)(M+1)+i_n(M+1)+j_n\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}q=&c(M+1)(M+1)(M+1)\\&+d(M+1)(M+1)+e(M+1)+f\end{aligned} \tag{13}$$

定义向量 $\mathbf{GR}$，长度为 $(M+1)(M+1)(M+1)(M+1)$，存储每对面片对积分节点上的标量格林函数值。向量元素为

$$\mathbf{GR}(q)=e^{-jkR_q}\big/R_q \tag{14}$$

其中 q 由式(13)决定，$q=1,2,\cdots,(M+1)(M+1)\cdot(M+1)(M+1)$。$R_q(u_{mc},v_{md},u_{ne},v_{nf})=\left|\boldsymbol{r}_{mq}-\boldsymbol{r}_{nq}\right|$，双线性四边形面片下，场点 $\boldsymbol{r}_{mq}$ 和源点 $\boldsymbol{r}_{nq}$ 分别表示为

$$\boldsymbol{r}_{mq}=\boldsymbol{r}_{cm}+u_{mc}\boldsymbol{r}_{um}+v_{md}\boldsymbol{r}_{vm}+u_{mc}v_{md}\boldsymbol{r}_{uvm} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r}_{nq}=\boldsymbol{r}_{cn}+u_{ne}\boldsymbol{r}_{un}+v_{nf}\boldsymbol{r}_{vn}+u_{ne}v_{nf}\boldsymbol{r}_{uvn} \tag{16}$$

定义向量 $\boldsymbol{T}$，令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Z}_{uv}\mathbf{GR}$，则向量 $\boldsymbol{T}$ 的第 p 个元素为

$$\boldsymbol{T}(p)=\xi(i_m,j_m,i_n,j_n) \tag{17}$$

其中 p 由式(12)决定。

数值积分转化为矩阵乘积，大大缩减矩量法阻抗矩阵填充时间。使之仅取决于积分节点处标量格林函数的计算。当未知量较大时，矩阵填充时间远小于方程组求解所花费时间，这比低阶矩量法要优越。

4 奇异性积分的处理

当场面片和源面片比较近时，式(9)出现近似奇异性(准奇异性)，可采用增加积分节点的方法来处理。若场面片和源面片是同一个面片，式(9)出现奇异性，必须做奇异处理，即处理形如式(18)的积分：

$$\xi_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^iv^jg(R(u,v,u_0,v_0))\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{18}$$

若 $u=u_0$，$v=v_0$，则 $R(u,v,u_0,v_0)=0$。处理方法主要有两类，一类是基于Duffy变换的数值积分法[6]，一类是奇异提取解析求解法[7]。

4.1　数值积分法

在本地坐标系下，以 $u=u_0$ ， $v=v_0$ 为界线，把四边形分成 4 块，并做变量替换，式(18)变化为

$$\xi_2=\sum_{i=1}^{4}\int_0^1\int_0^1 f_i(\tau,\eta)g(R_i(\tau,\eta))J_i\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta \tag{19}$$

其中 J_i 为线性变换雅克比。应用变换 $\tau=\alpha^2$ ， $\eta=\beta^2$ ，式(19)写为

$$\xi_2=\sum_{i=1}^{4}\int_0^1\int_0^1 f_i(\alpha^2,\beta^2)g(R_i(\alpha^2,\beta^2))J_i 4\alpha\beta\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta \tag{20}$$

式(20)只在 $(\alpha,\beta)=(0,0)$ 有奇异，但是标量格林函数的奇异性被 $\alpha\beta$ 项抵消，因此可用 Gauss-Legendre 数值积分求解。

4.2　奇异提取解析法

式(18)被积函数中，引入一个与 $g(R(u,v,u_0,v_0))$ 奇异性相同的奇异项 $\dfrac{1}{R_0}$ 来消去其中的奇异性，而 $\dfrac{1}{R_0}$ 可用解析公式计算。 R_0 为经过点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 曲面切平面上的动点 $\boldsymbol{r}(u',v')$ 到 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 之间的距离[8]：

$$R_0=\sqrt{g_{11}(u'-u_0)^2+g_{22}(v'-v_0)^2+2g_{12}(u'-u_0)(v'-v_0)} \tag{21}$$

其中，度量系数为：

$$g_{11}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_0}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_0},\quad g_{22}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v_0}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v_0},\quad g_{12}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_0}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v_0}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R_0}\mathrm{d}u'\mathrm{d}v'=&\left\{\frac{u'-u_0}{\sqrt{g_{22}}}\ln\left[R_0+\sqrt{g_{22}}(v'-v_0)\right.\right.\\&\left.+\frac{(u'-u_0)g_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\right]+\frac{v'-v_0}{\sqrt{g_{11}}}\ln\left[R_0+\sqrt{g_{11}}(u'-u_0)\right.\\&\left.\left.+\frac{(v'-v_0)g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\right]\right\}\Bigg|_{u'=-1}^{u'=1}\Bigg|_{v'=-1}^{v'=1}\end{aligned} \tag{22}$$

式(18)可变化为

$$\begin{aligned}\xi_2=&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(u^iv^jg(R(u,v,u_0,v_0))-u_0^iv_0^j\frac{1}{R_0}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&+u_0^iv_0^j\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R_0}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+u_0^iv_0^j\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R_0}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{23}$$

式(23)第 1 项可用 Gauss-Legendre 数值积分求解，第 2 项用式(22)求解。

5　数值计算及结果

该部分计算了 3 个导体目标，验证了本文提出算法的有效性，评价了不同奇异处理方法在高阶矩量法应用的差异。所有计算均在 CPU 1.6GHz，内存 512M 的 PC 机上实现。

5.1　平板

考虑如图 1 所示理想导体正方形平板，单位幅度 x 负方向极化电场的平面波垂直入射，入射波长 $\lambda=0.3\mathrm{m}$ 。平板尺寸为 $1\lambda\times1\lambda$ 。

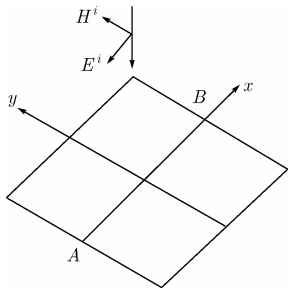


图 1　垂直入射平面波激励下的平板

电流展开不同阶数 M 下，未知量数目为 N_{unk} 。若面片数为 N_Q ，公共棱的个数为 N_E ，则 $N_{\mathrm{unk}}=2N_Q(M-1)M+N_EM$ 。采用的 Gauss-Legendre 积分节点数 N_G ，矩阵填充时间如表 1 所示，其中 T_{D} 是数值积分直接计算耗时，T_{mat} 为采用本文提出方法的耗时。

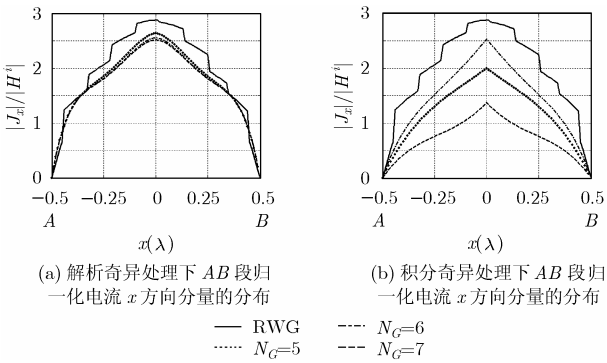
从表 1 可以看到，随着电流展开阶数的增大，数值积分直接计算时的矩阵填充时间 T_{D} 迅速增大。可以预知，当面片剖分数目较多时，矩阵填充时间将令人无法忍受的。采用本文提出的方法，数值积分用矩阵乘积实现，矩阵填充时间 T_{mat} 要小得多。

表 1　不同阶数下的未知量、积分节点数目及矩阵填充时间

M	N_{unk}	N_G	T_D (s)	T_{mat} (s)
1	2	2	1	≈ 0
2	24	3	8	1
3	60	4	77	2
4	112	5	443	4

图 2(a)，2(b)为不同奇异处理方法下平板上沿 AB 段的电流分布，图中直线为平板剖分为 490 个三角面片，采用 RWG 基函数的计算结果。电流展开阶数 $M=4$ 。

从图 2(a)看到，在不同数值积分节点下，采用奇异提取解析方法求解的电流分布差别不大。这里与RWG方法不同，由于平板剖分的面片数比较少，平板边界棱的影响不可忽略，因此，高阶方法比RWG方法结果差些。欲得到更精确的结果，需对边界电流模型做特殊处理[9]，或者增加面片数目(见 5.2 节中圆盘算例)。图 2(b)中，数值积分节点数较少时($N_G=5$)，结果精度较低。当增加积分节点数目($N_G=6$)，有可能得到近似正确的结果(除去边界孤立棱的



(a) 解析奇异处理下 AB 段归一化电流 x 方向分量的分布

(b) 积分奇异处理下 AB 段归一化电流 x 方向分量的分布

图 2

影响)，但要比采用较少积分节点的奇异提取解析法(图 2(a) $N_G=5$ 情况)结果差。继续增加积分节点($N_G=7$)，由于受奇异点的影响，结果精度又开始降低。

5.2 圆盘

如图 3 所示理想导体圆盘，单位幅度 y 正方向极化电场的平面波垂直入射，入射频率 $f=4\text{GHz}$ 。圆盘直径为 0.3m。采用奇异提取解析法做奇异处理。图 4 为 $\varphi=0°$ 时电流不同展开阶数下的双站 RCS 与剖分 1059 个三角面片 RWG 方法的比较。RWG 法耗时 $7'13''$ ，M=3 时本文方法耗时 $1'26''$ 。

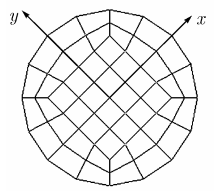


图 3 垂直入射平面波激励下

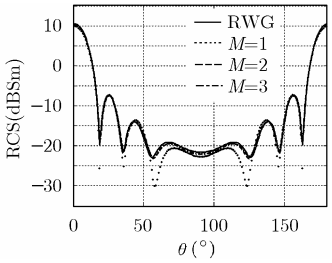


图 4 不同阶数导体球双站 RCS

计算结果可以看到，虽然圆盘表面仍有边界棱存在，未对边界电流模型做特殊处理，但由于剖分的面片数目比较多，边界棱对圆盘整体电流分布影响不大，仍可以得到精度较高的结果。

5.3 导体球

球体半径 0.06m。为了得到剖分质量较高的网格，首先建立一个正方体，使得正方体中心与球心重合。然后，剖分正方体表面为许多正方形，正方形的 4 个顶点投影到球面上，作为在球面上剖分的双线性四边形。如图 5 示，共剖分 96 个双线性四边形。

入射平面波为 x 正方向极化，向 z 正方向传播，频率为 $f=5.0\text{GHz}$ 。采用不同电流展开阶数计算的 $\varphi=0°$ 时双站 RCS 与 Mie 级数计算结果如图 6 示。

在入射波频率下，球体半径为 1λ ，平均每个面元的边长为 0.4λ (图 5)， $M=2$ 的求解结果已近似于解析值。

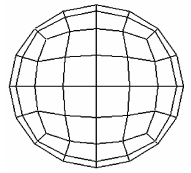


图 5 导体球剖分示意图

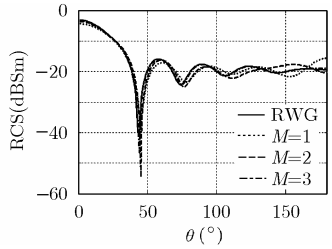


图 6 不同阶数导体球双站 RCS

6 结束语

本文分析了求解电磁散射的高阶矩量法，对其实现中的若干问题进行了分析。提出了一种多维数值积分的快速高效实现方法，提高了高阶矩量法的效率。对不同的奇异积分处理技术在高阶矩量法中的应用做了效能评价，数值积分的奇异处理方法对积分节点数目较敏感，奇异提取解析方法较准确。从圆盘及导体球算例中都可看到，当面片尺寸为 0.5λ 时，二阶矩量法即可得到较精确的结果。

参 考 文 献

[1] Jørgensen E, Volakis J L, and Meincke P, *et al.*. Higher order hierarchical legendre basis functions for electromagnetic modeling. *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 2004, 52(11): 2985–2995.

[2] Djordjevic M and Notaroš B M. Double higher order method of moments for surface integral equation modeling of metallic and dielectric antennas and scatters. *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 2004, 52(8): 2118–2129.

[3] Graglia R D, Wilton D R, and Peterson A F. Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1997, 45(3): 329–342.

[4] Canino L S, Ottusch J J, Stalzer M A, Visher J L, and Wandzura S. Numerical solution of the Helmholtz equation in 2D and 3D using a high-order Nyström discritization. *J. Comput. Phys.*, 1998, 146: 627–663.

[5] Notaroš B M and Popovic B D. Optimized entire-domain moment-method analysis of 3D dielectric scatterers. *Int. J. Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 1997, 10(5-6): 177–192.

[6] Duffy M G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal of Numerical Analysis,* 1982, 19: 1260–1262.

[7] Seppo J, Matti T, and Pasi Y O. Singularity subtraction technique for high-order polynomial vector basis functions on planar triangles, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 2006, 54(6): 42–49.

[8] Song J M and Chew W C. Moment method solution using parametric geometry. *J. of Electromagnetic Wave and Appl.*, 1995, 9(1/2): 71–83.

[9] Kolundzija B M. On the inclusion of edge effects into surface vector basis functions. Proceedings of the 1998 AP-S Symposium, 1998: 282–285.

王少刚： 男，1979年生，博士生，从事电磁场数值计算、超宽带雷达目标特性的研究.

关鑫璞： 男，1980年生，博士生，从事电磁场数值计算、超宽带雷达目标特性的研究.

王党卫： 男，1977年生，博士生，从事信号处理、超宽带雷达目标特性的研究.

马兴义： 男，1972年生，博士生，从事电磁场数值计算、超宽带雷达目标特性的研究.

粟 毅： 男，1961 年生，教授，博士生导师，从事信号处理、雷达系统、遥感信息处理的研究.