

小波变换实现图像导向滤波

李军侠 水鹏朗 郑勇

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘要: 导向滤波器是一类能够实现图像方向滤波的滤波器组, 它比方向滤波器计算量小并且可以实现各个方向的滤波处理。该文把小波函数和多分辨关系引入到导向滤波处理过程中, 实现了图像的方向滤波。实验验证了小波可以从图像中提取更多方向的信息, 表明新导向滤波的有效性。

关键词: 小波变换; 方向滤波; 导向滤波; 方向特征提取

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)11-2657-04

Wavelet Transform Implement Image Steerable Filter

Li Jun-xia Shui Peng-lang Zheng Yong

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Steerable filters are a class of filter banks that can implement oriented filtering, and they have less computation quantity than usual oriented filters and can obtain omni-oriented filtering. This paper introduces the wavelet functions and the multiresolution relationship into the process of the steerable filters, and achieves image's oriented filtering. The wavelets can extract more orientation information from images, and the experiments verify the steerable filter, which is designed from the wavelet transform.

Key words: Wavelet transform; Oriented filter; Steerable filter; Orientation feature extraction

1 引言

图像处理和视频分析中, 方向信息是非常重要的, 比如在边缘检测, 纹理分析, 图像增强以及运动分析中方向信息被大量地提取和应用。方向滤波器作为一种简单快速的处理方式常常被用来提取各个方向的信息。导向滤波器^[1]是一种计算效率更高且能提取方向信息的滤波器组, 它满足这样的条件: 任意方向滤波器可以由一组作为基的滤波器线性累加而成。导向滤波器有自身的特点, 可以实现任意方向滤波。导向滤波器对图像的边缘检测^[2,3]和去噪^[4]仍然是当前研究的热点。

小波^[5]作为一种多分辨分析工具已经在图像处理领域中广泛地应用, 它除了具有多尺度特性外, 还有较好的光滑性和紧支撑性。正是由于小波这样的优点, 本文结合小波设计导向滤波器, 使用这种基于小波的导向滤波器获取图像的方向信息。

本文结构安排如下: 第 2 节给出在离散域实现导向滤波的算法和近似小波函数离散采样值的方法; 第 3 节给出利用小波变换实现图像导向滤波的完整流程; 接下来, 第 4 节给出实验结果并做相应的解析。最后一节为结束语。

2 导向滤波器与近似采样小波函数

2.1 导向滤波器

导向滤波器是指方向滤波器 $F_{\theta}(m, n)$ 满足这样的重构

公式:

$$F_{\theta}(m, n) = \sum_{k=1}^N b_k(\theta) A_k(m, n) \quad (1)$$

这里 θ 是旋转角度, 用它来确定方向滤波器的方向; $b_k(\theta)$ 为插值函数, 它可以调整旋转角度 θ ; 而 $A_k(m, n)$ 被称为基滤波器, 它构成方向滤波器空间中的一组基。由式(1)可以卷积实现图像 $I(m, n)$ 对应于旋转角度 θ 的方向滤波:

$$I(m, n) * F_{\theta}(m, n) = \sum_{k=1}^N b_k(\theta) (I(m, n) * A_k(m, n)) \quad (2)$$

导向滤波器的方向滤波结构如图 1 所示:

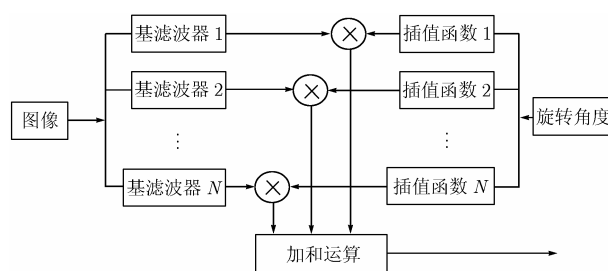


图 1 导向滤波器结构示意图

给定方向滤波器 $F_{\theta}(m, n)$, 导向滤波器可以通过奇异值分解方法来获得完整的结构^[6], 即求得基滤波器 $A_k(m, n)$ 和插值函数 $b_k(\theta)$ 。首先, 对方向滤波器 $F_{\theta}(m, n)$ 离散采样方向 θ , 获得一组方向滤波器 $\{F_i(m, n)\}$; 然后计算内积矩阵 R , 矩阵 R 的每个元素为一个内积:

2006-05-08 收到, 2006-12-25 改回
国家自然科学基金(60472986)和博士点基金(No. 20050701014)资助课题

$$r_{ij} = \langle F_i(m, n), F_j(m, n) \rangle \quad (3)$$

这里 $\langle F_i(m, n), F_j(m, n) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_i(m, n) F_j(m, n)$ 。内积矩阵 \mathbf{R} 显然是一个实对称矩阵，我们对它进行特征值分解：

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \quad (4)$$

这里 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$ 是正交矩阵，它的列矢量 \mathbf{u}_i 为特征向量。 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 为特征值矩阵。这样基滤波器 A_k 就可以由特征向量 \mathbf{u}_k 和方向滤波器 $\{F_i(m, n)\}$ 得到：

$$A_k = \sum_i u_{i,k} F_i \quad (5)$$

插值函数 $b_k(\theta)$ 为方向滤波器 $F_\theta(x, y)$ 向归一化基滤波器 A_k 的投影：

$$\begin{aligned} b_k(\theta) &= \frac{\langle F_\theta(m, n), A_k(m, n) \rangle}{\langle A_k(m, n), A_k(m, n) \rangle} \\ &= \frac{\langle F_\theta(m, n), A_k(m, n) \rangle}{\lambda_k} \end{aligned} \quad (6)$$

这样就得到了导向滤波器的各个部分 $A_k(m, n)$ 和 $b_k(\theta)$ 。

$$\begin{aligned} F_\theta(m, n) &= \sum_{k=1}^N b_k(\theta) \frac{A_k(m, n)}{\langle A_k(m, n), A_k(m, n) \rangle} \langle A_k(m, n), A_k(m, n) \rangle \\ A_k(m, n) &= \sum_{k=1}^N b_k(\theta) \frac{A_k(m, n)}{\langle A_k(m, n), A_k(m, n) \rangle} \lambda_k \end{aligned} \quad (7)$$

导向滤波器算法的几点说明：

(1) 通常意义上，特征值矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 中特征值的大小决定相应基滤波对原始方向滤波器的近似程度，如果 $\lambda_{k_1} > \lambda_{k_2}$ ，则对方向滤波器的近似基 $A_{k_1}(m, n)$ 优于基 $A_{k_2}(m, n)$ ；

(2) $\{A_k(m, n)\}$ 是相互正交的矩阵，但它没有归一化。即 $\langle A_{k_1}(m, n), A_{k_2}(m, n) \rangle = c\delta(k_1 - k_2)$ ，这里未必满足 $c = 1$ ；

(3) $b_k(\theta)$ 为实的频率调和项^[7]，并且满足 $b_k(\theta) = b_k(\theta + 2\pi)$ ；根据此算法获得的单频率调频项 $e^{jm\omega}$ 幅度不完全是 1。第 4 节的仿真结果也验证了此结论；

(4) 公式(1)两端同时对方向角度 θ 进行傅里叶变换，得到这样的表达式 $\text{FT}(F_\theta(m, n)) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k,l} \text{FT}(e^{-jl\omega_\theta}) A_k(m, n)$ ，提取直流分量即 $\omega_\theta = 0$ 的分量，可以得到式子：

$$\text{FT}(F_\theta(m, n))|_{\omega_\theta=0} = \sum_{k=1}^N c_{k,0} A_k(m, n) \quad (8)$$

这样就得到了一个与方向角 θ 无关的滤波器 $\text{FT}(F_\theta(m, n))|_{\omega_\theta=0}$ ，它是一个二维的无向滤波器。

2.2 小波的离散采样值

小波是一种多尺度分析工具，具有完全重构的特点，但它不存在解析表达式(这里主要是指常用的正交系列和双正交系列^[5])数字信号处理中，利用多速率滤波器组实现小波函数与尺度函数以及尺度函数与尺度函数的多尺度关系。可以通过滤波器组来近似获得一个大尺度上小波函数的离散采样值。另外，小波函数或尺度函数在各个尺度之间具有相似性，因此可以下采样实现各个尺度小波函数或尺度函数的近

似离散采样。本文算法所采用的离散小波系数就是由这个相似关系经过下采样获得的。

一组小波和尺度滤波器组由分析滤波器和合成滤波器两部分组成，图 2 是它的结构示意图。分析滤波器分成低通 $h_0(n)$ 和高通 $h_1(n)$ 两个滤波器支路，合成滤波器是由低通滤波器 $g_0(n)$ 和高通高通滤波 $g_1(n)$ 两个支路合并构成。滤波器通过级联方式产生不同支路，形成不同速率的信号。对分析滤波器而言，信号自身相当于在尺度函数 $\varphi(t/S_i - i)$ 上投影，通过分析滤波器中的尺度滤波器相当于在更粗尺度的尺度函数 $\varphi(t/S_{i+1} - i)$ 上投影；同样，通过小波滤波器相当于在相邻的更大尺度小波函数基 $\psi(t/S_{i+1} - i)$ 下投影。反之，应用合成滤波器结构，相当于在一个相邻的较小尺度的尺度函数基 $\varphi(t/S_{i-1} - i)$ 下投影。对于常用的 2 带小波，相邻尺度应该满足这样的关系式子：

$$S_i = 2 \times S_{i-1} \quad (9)$$

这里 S_i 表示大尺度， S_{i-1} 表示相邻的小尺度。

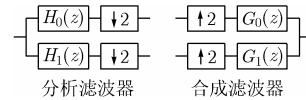


图 2 实现小波变换的滤波器组

基于上述滤波器组和小波函数之间的对应关系，可以产生小波系数来近似对小波函数的离散采样值：在某尺度 S 小波投影系数上置为 1，其它其它位置取值为 0，然后利用合成滤波器级联 j 级，合成的信号为小波函数在尺度 $S/2^j$ 的离散采样值。同样方式，可以获得尺度函数的离散采样值。利用张量积的形式，可以得到二维方向滤波器，以它为初始方向滤波器模板它实现导向滤波。本节给出导向滤波和小波采样值生成算法，第 3 节指出两者是如何紧密结合起来的并给出本文算法的详细流程。

3 小波变换实现导向滤波的算法流程

根据第 2 节导向滤波器的结构示意图图 1，实现图像的导向滤波需要输入图像，旋转角度，并且知道基滤波器以及插值函数。其中输入图像和旋转角度作为输入量，而基滤波器和插值函数是根据方向滤波器和它的方向采样参数 $\{l\}$ 获得的。这里的方向滤波器是通过小波变换来实现的，它的实现需要确定初始滤波器的尺度 S 以及下采样率 M 。因此对于整个算法，输入参数是图像 $I(m, n)$ ，一组旋转角度 θ 和方向采样参数 $\{l\}$ 以及小波基，滤波器的尺度 S 和下采样率 M 。

完整的小波变换实现导向滤波算法流程如下：

(1) 利用给定的小波基采用 2.2 的算法进行小波逆变换，近似得到一个较大尺度 S 的小波函数 $\psi(m/S - i)$ 或尺度函数的离散采样值 $\varphi(m/S - i)$ ；

(2) 根据小波函数或尺度函数的采样值，张量产生一个相同尺度 S 下的二维(2D)滤波器 $H_\theta(m, n)$ (实验中设初始角

$\theta=0^\circ$);

(3) 使用该二维滤波器 $H_0^\circ(m, n)$ 作为原始的滤波器模板, 由方向采样参数 $\{l\}$ 得到一组方向滤波器组 $\{H_l(m, n)\}$ 。具体为滤波器 $H_0^\circ(m, n)$ 经过不同方向 $\{l\}$ 的旋转得到一组滤波器 $\{H_l(m, n)\}$;

(4) 由获得的方向滤波器组 $\{H_l(m, n)\}$, 下 M 采样得到一个 S/M 尺度上的二维方向滤波器 $\{F_l(m, n)\}$;

(5) 由上面方向滤波器组 $\{F_l(m, n)\}$, 根据奇异值分解算法中的式(9)得到导向滤波器的基滤波器 A_k ;

(6) 对需要滤波的旋转角度 θ , 下 M 采样方向滤波器 $H_\theta(m, n)$ 得到二维方向滤波器 $F_\theta(m, n)$ 。方向滤波器 $F_\theta(m, n)$ 向归一化的基滤波器 A_k 投影, 由式(6)得到插值函数 $b_k(\theta)$;

(7) 这样我们可以使用导向滤波器的结构, 获得图像 $I(m, n)$ 的方向滤波结果为 $\sum_{k=1}^N b_k(\theta)(I(m, n) * A_k(m, n))$ 。

相对于原始的导向滤波器计算方法, 充分利用了小波变换的尺度相似性, 合理地处理了下采样, 具体操作体现在步骤(4)和步骤(6)。对方向滤波器 $H_0^\circ(m, n)$ 进行旋转下采样获得 $F_\theta(m, n)$, 而不是对下采样后的 $F_0^\circ(m, n)$ 进行旋转, 提高了小波函数采样值的近似精度。这里的下采样操作是对二维信号进行操作, 因此可以根据需要分别对行和列进行不同速率的采样。

需要说明的是方向滤波器使用小波变换得到近似的离散小波函数采样值, 它不能完全重构原始信号。另外, 这里小波函数的尺度不同于小波变换中 $S_j = S_0 \times 2^j$, 这里可以为 $S = S_j / M$, M 为下采样率。具体使用的数值和结果分析在第 4 节仿真实验部分中给出。

4 仿真和实验结果

本文通过导向滤波处理普通光学图像来验证算法的有效性。实验采用的小波是双正交 9-7 小波, 此小波是线性相位的, 能够较好地保持图像的对称几何结构; 分别经过 $\{0, \pi/11, \dots, 6\pi/11\}$ 旋转后下采样获得一组方向滤波器 $\{H_l(m, n)\}$ 。这里使用的图像为普通光学图像, 各个方向的分辨率是相同的, 因此使用在水平和垂直方向具有相同尺度的小波。具体讲, 首先获得一个在 2^5 尺度上的二维方向滤波器, 它的水平和垂直方向分别是尺度函数和小波函数的离散采样值, 然后经过下 M 采样(该实验中为下 7 采样), 这样实现尺度为 $32/7$ 的方向滤波。

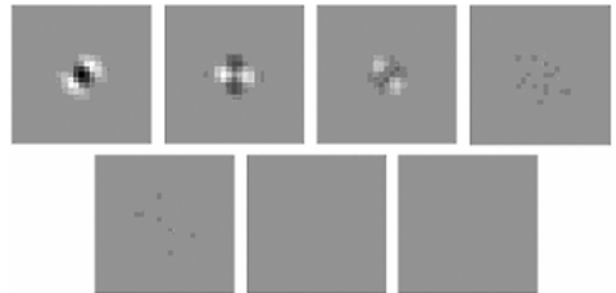
图 3 是本文获得的基滤波器组, 从显示结果可以看出它们具有方向性; 另外, 它们的能量具有明显的差异, 因为它们对应的特征值大小是依次降低的。图 4 为本文得到的插值函数, 它们分别为对应于基滤波器 A_1, A_2, A_3 的插值函数 b_1, b_2, b_3 。可以看到它们是一些频率单一的正余弦函数。插值

函数与其相应的基滤波器之间的关系, 体现在插值函数曲线的频率成分, 相位, 以及幅度上。对于直流成分 $e^{j0\omega}$ 的需注意: 它对应于不含有方向性信息的特征矩阵。值得说明的是: 插值函数对应于较少的特征值它们的频率成分复杂些, 这主要是因为小波函数和尺度函数是有限支撑的, 它们的频率成分比较丰富占据整个频率空间。

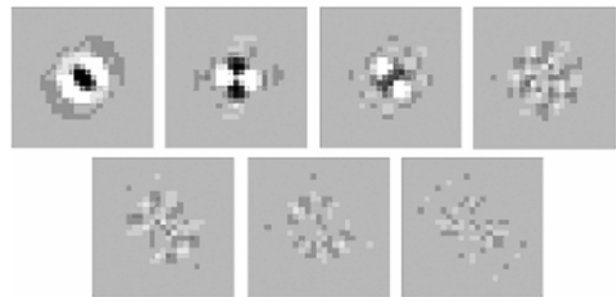
图 5 是直流成分对应的滤波器 $D^N(m, n)$, 它的计算公式为

$$D^N(m, n) = \sum_{k=1}^N A_k(m, n) \cdot \text{mean}(b_k(\theta)) \quad (10)$$

这里 $\text{mean}(b_k(\theta))$ 表示插值函数的均值, 也就是它直流成分的幅度值。图 5 分别是 $N = 1, 2, \dots, 7$ 获得的滤波器结果, 从图 5 可以看到第一二个滤波器具有明显的方向性, 而后面的滤波器没有明显的方向性。这个结果和第 2 节导向滤波器的理论(d)是吻合的。



(a) 原始的基滤波器



(b) 基滤波器取 log 运算增强后显示的结果

图 3 仿真得到的一组基滤波器(图中滤波器依次对应 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$ 等基滤波器)

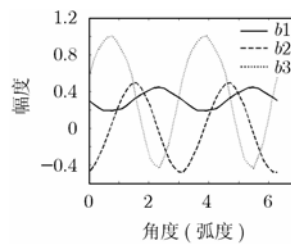


图 4 插值函数曲线

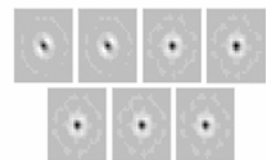


图 5 直流分量对应的滤波器(图中滤波器分别为 D^1, D^2, \dots, D^7 滤波器)

图 7 的结果是对图 6 中 Barbara 图像的部分区域方向滤

波后获得的。方向滤波器的方向间隔为 $\pi/10$ ，角度范围为

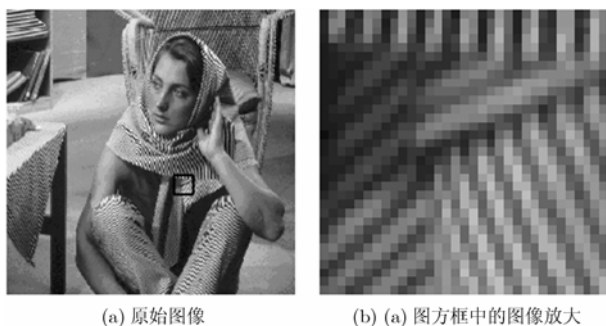


图 6 原始图像 Barbara 及用于方向提取的纹理区域

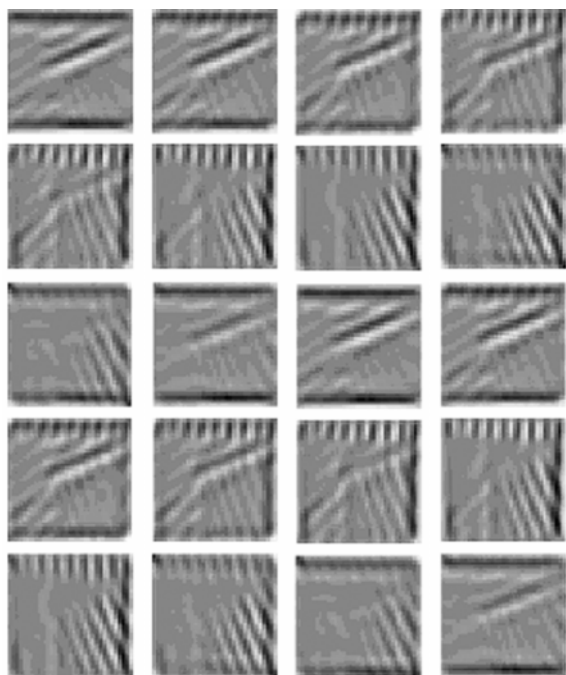


图 7 Barbara 导向滤波后结果(方向角范围是 $0 \sim 2\pi$ ，角度间隔为 $\pi/10$)

$0 \sim 2\pi$ 。从原始图像图 6 明显看到选定区域有 4 类不同方向的纹理，而从图 7 可以看到不同方向的滤波呈现不同的纹理。这表明小波采样值方法实现的导向滤波器能够较好的实现整个方向的滤波，而小波变换只能获得 3 个方向的方向信息。同时这里使用小波提取方向信息，小波滤波后的结果在图 8 中给出。比较图 7 和图 8 的结果，可以看到尽管两者使用了同样的原始滤波器，但导向滤波结构的滤波器具有较好的方向分辨率。从计算量上讲，导向滤波器和小波变换的计算量都是 $O(n)$ ，但是导向滤波器可以获得任意方向的滤

波结果。

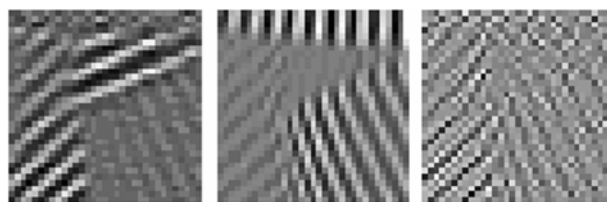


图 8 静态小波实现图像的导向滤波，使用的小波基为 $9 \sim 7$ 小波

5 结束语

本文算法利用小波变换实现了导向滤波，同时可以保证导向滤波具有一定的尺度特性。从实验结果看，采用小波函数作为方向滤波器能够较好地实现导向滤波。本文的后续研究将致力于如何更好地结合小波的特性分析导向滤波器，并且会将它与方向多尺度几何图像处理如曲线波，脊状波以及带形波等比较。

参考文献

- [1] Freeman W and Adelson E. The design and use of steerable filters. *IEEE Trans. on IP*, 1991, 13(9): 891-906.
- [2] Jacob M and Unser M. Design of steerable filters for feature detection using Canny-like criteria. *IEEE Trans. on PAMI*, 2004, 26(8): 1007-1019.
- [3] Yu W, Daniilidis K, and Sommer G. Approximate orientation steerability based on angular Gaussians. *IEEE Trans. on IP*, 2001, 10(2): 193-205.
- [4] Portilla J, Strela V, Wainwright M, and Simoncelli E. Image denoising using Gaussian scale mixture in the wavelet domain. *IEEE Trans. on IP*, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [5] Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing (Second Edition)*. Academic Press, 1999, Chapter 7.
- [6] Sommer G, Michaelis M, and Herpers R. The SVD approach for steerable filter design. *ISCAS'98, IEEE*, 1998, Vol. 5: 349-353.
- [7] Perona P. Deformable kernels for early vision. *IEEE Trans. on PAMI*, 1995, 17(5): 488-499.

李军侠：男，1978 年生，博士生，研究方向为 SAR 图像后处理。
水鹏朗：男，1967 年生，教授，博士生导师，研究方向为多速率滤波器组，图像处理及时频分析。