

基于 DCT 的实值离散 Gabor 变换

魏道昀 祝美龙 陶亮

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室 合肥 230039)

摘要: 该文提出了一种基于离散余弦变换(DCT)的实值离散 Gabor 变换(RDGT), 不仅适用于临界抽样条件而且适用于过抽样条件, 并证明了变换的完备性条件。由于这种变换仅涉及实值计算, 并且可利用快速 DCT, IDCT 算法来加速运算, 因此比传统复值离散 Gabor 变换在计算和实现方面更为简单, 必将有效地提高非平稳信号与图像的分析、处理速度和效率。

关键词: 离散余弦变换(DCT); 离散 Gabor 变换; Gabor 变换系数

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)11-2783-04

Real-valued Discrete Gabor Transform Based on DCT

Wei Dao-yun Zhu Mei-long Tao Liang

(Key Laboratory of Intelligence Computing and Signal Processing of the Ministry of Education,
Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: A Real-valued Discrete Gabor Transform (RDGT) based on DCT for finite sequences is proposed in this paper, which can be applied to both the critical sampling condition and the over-sampling condition. And the biorthogonal relationship between the analysis window and synthesis window for the transform is also proved in this paper. Because the DCT-based RDGT only involves real operations and can utilize fast DCT and IDCT algorithms for fast computation, it is easier in computation and implementation by hardware or software compared to the traditional DFT-based complex-valued discrete Gabor transform. The proposed transform can be used to improve the speed and efficiency in analyzing and processing nonstational or time-varying signals.

Key words: DCT; Discrete Gabor transform; Coefficients of Gabor transform

1 引言

自 1946 年, Gabor 通过引入可移窗将 Fourier 变换改造成复值 Gabor 变换^[1]以来, Gabor 变换已被公认为是通信和信号处理中信号与图像表示的最好的方法之一。然而, Gabor 变换的计算复杂性很高, 实时应用受到很大限制。随着计算机技术的发展, 在实际应用中, 人们逐步认识到需要将 Gabor 变换离散化来解决这一问题。直到近二十年来离散 Gabor 变换提出后, 计算 Gabor 变换系数方法才有所突破。Gabor 变换的研究方法也就逐步丰富起来, 主要有以 Bastiaans、Wexler 和 Qian 等人为代表的双正交分析法, Morris 等人为代表的框架理论, Daugman 等人提出的神经网络方法, Teuner 和 Ibrahim 等人提出的自适应学习算法以及 Lu 等人提出的并行格型结构实现块时间递归 Gabor 变换算法等。

纵观上述 Gabor 变换的研究历史, 我们注意到半个世纪以来对 Gabor 变换的研究和应用实际上是以基于 Fourier 变换

的复值 Gabor 变换为主导地位的, 对实值 Gabor 变换的研究几乎空白。尽管 Gabor 于 1946 年在文献[1]中已提出了在连续余弦变换基础上引入实值 Gabor 变换, 1995 年文献[2]又将其离散化, 但对这种基于离散余弦变换(DCT)^[3]的实值 Gabor 变换的研究还很不充分, 例如, 所提出的变换仅局限于临界抽样条件, 其综合窗与分析窗的双正交条件如何问题也一直没有得到解决。为了解决这些问题, 本文将基于 DCT 的实值离散 Gabor 变换理论进行了拓展, 使其不仅适用于临界抽样条件而且适用于过抽样条件, 并证明了该变换的综合窗与分析窗的双正交条件。针对实值信号, 该变换由于仅涉及实值运算, 并可利用快速 DCT, IDCT 算法来加速变换, 因此比传统复值离散 Gabor 变换在计算、实现方面更为简单。

2 基于 DCT 的有限长序列实值离散 Gabor 变换

设 $x(k)$ 表示由一个有限长实序列拓展成周期为 L 的实序列, 实值离散 Gabor 展开定义为

$$x(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a(m, n) \tilde{h}_{m, n}(k) \quad (1)$$

展开系数 $a(m, n)$ 可从式(2)获得:

2006-03-23 收到, 2006-08-07 改回

国家自然科学基金(60572128), 安徽省人才开发资金(2005Z029), 安徽大学人才队伍建设项目和创新团队基金资助课题

$$a(m, n) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \tilde{\gamma}_{m, n}(k) \quad (2)$$

此式定义为实值离散Gabor变换(RDGT)^[4], 因此, 实值离散Gabor展开为实值离散Gabor变换的逆变换, 展开式(1)即为信号的重建式。上式中

$$\tilde{h}_{m, n}(k) = \tilde{h}(k - m\bar{N}) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2\text{mod}(k, N) + 1]\text{mod}(n, N)\pi}{2N} g_n \quad (3)$$

$$\tilde{\gamma}_{m, n}(k) = \tilde{\gamma}(k - m\bar{N}) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2\text{mod}(k, N) + 1]\text{mod}(n, N)\pi}{2N} g_n \quad (4)$$

$$g_n = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\text{mod}(n, N)$, $\text{mod}(k, N)$ 分别代表 n, k 对 N 的求余运算; $L = \bar{N}M = N\bar{M}$, M 和 N 分别为时频域中的抽样点数, \bar{M} 和 \bar{N} 分别为频率和时间的抽样间隔。类似于复值离散 Gabor 变换^[5,6], 稳定的重建条件是 $\bar{N}\bar{M} \leq L$ (或 $MN \geq L$)。临界抽样出现在 $\bar{N}\bar{M} = NM = L$ ($a(m, n)$ 的个数等于 $x(k)$ 的样点数) 时刻, 在欠抽样条件 ($MN < L$) 下会丢失信息。注意 $\tilde{h}(k)$ 和 $\tilde{\gamma}(k)$ 分别是综合窗 $h(k)$, 窗 $\gamma(k)$ 的周期延伸, 即

$$\tilde{h}(k) = \sum_i h(k + iL) = \tilde{h}(k + L) \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma}(k) = \sum_i \gamma(k + iL) = \tilde{\gamma}(k + L) \quad (7)$$

另外, 设 $\tilde{h}(k)$ 具有单位能量, 即

$$\sum_{k=0}^{L-1} |\tilde{h}(k)|^2 = 1 \quad (8)$$

RDGT 系数 $a(m, n)$ 此刻也是实的, 并且是以 m 和 n 为变量的周期函数,

$$a(m+iM, n+jN) = a(m, n) \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (9)$$

$\tilde{h}(k)$ 与 $\tilde{\gamma}(k)$ 的双正交条件等价于下式(证明参见附录 A):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{h}(k + mN) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2\text{mod}(k, \bar{N}) + 1]\text{mod}(n, \bar{N})\pi}{2\bar{N}} g_n \tilde{\gamma}(k) \\ = \sqrt{\frac{L}{M}} \delta(m) \delta(n), \end{aligned}$$

$$0 \leq m \leq \bar{M} - 1, 0 \leq n \leq \bar{N} - 1 \quad (10)$$

这里 $\delta(k)$ 表示 Kronecker delta。式(10)也可以写成下列矩阵的形式,

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nu} \quad (11)$$

式中 $\boldsymbol{\nu} = \{\sqrt{L/M}, 0, 0, \dots, 0\}^T$ 是一长度为 $\bar{M}\bar{N}$ 的矢量, $\boldsymbol{\gamma} = \{\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1), \dots, \tilde{\gamma}(L-1)\}^T = \{\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(L-1)\}^T$, \mathbf{H} 是一 $(\bar{M}\bar{N}) \times L$ 的实矩阵, 结构为

$$\begin{aligned} H(m\bar{N} + n, k) = \tilde{h}(k + mN) \\ \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2\text{mod}(k, \bar{N}) + 1]\text{mod}(n, \bar{N})\pi}{2\bar{N}} g_n \quad (12) \end{aligned}$$

此时 $\boldsymbol{\gamma}$ 变成了由式(11)描述的线性方程组的解。在临界抽样条件下, 即 $M = \bar{M}$ 和 $N = \bar{N}$ (或 $L = \bar{M}\bar{N}$), 若 \mathbf{H} 是非

奇异的, $\boldsymbol{\gamma}$ 具有唯一解。在过抽样条件下, 即 $\bar{M}\bar{N} < L$, 式(11)中 $\boldsymbol{\gamma}$ 的解为多解。类似于复值离散Gabor变换^[5,6], 这里选最小范数条件下,

$$\min_{\boldsymbol{\gamma}: \mathbf{H}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nu}} \sum_{k=0}^{L-1} |\tilde{\gamma}(k)|^2 \quad (13)$$

的解 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 作为式(11)的解, 即

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \boldsymbol{\nu} \quad (14)$$

一旦求出了 $\boldsymbol{\gamma}$, 就可利用快速的DCT^[7,8]计算式(2)中的 $a(m, n)$:

$$\begin{aligned} a(m, n) &= \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \tilde{\gamma}(k - m\bar{N}) \sqrt{\frac{2}{N}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2\text{mod}(k, N) + 1]\text{mod}(n, N)\pi}{2N} g_n \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{\bar{M}-1} R_m(iN + j) \right) \sqrt{\frac{2}{N}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2\text{mod}(j, N) + 1]\text{mod}(n, N)\pi}{2N} g_n \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{\bar{M}-1} R_m(iN + j) \right) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2j+1)n\pi}{2N} g_n \quad (15) \end{aligned}$$

式中 $R_m(k) = x(k) \tilde{\gamma}(k - m\bar{N})$, $k = iN + j$ 。很显然式(15)可利用 N 点 DCT 的快速算法进行计算。

进而可进行信号的重建, 将式(1)重写为

$$\begin{aligned} x(k) &= \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(k - m\bar{N}) \sum_{n=0}^{N-1} a(m, n) \sqrt{\frac{2}{N}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2\text{mod}(k, N) + 1]\text{mod}(n, N)\pi}{2N} g_n \end{aligned}$$

令 $k = qN + k_0$, $q = 0, 1, \dots, \bar{M} - 1$, $k_0 = 0, 1, \dots, N - 1$, 则上式变为

$$\begin{aligned} x(qN + k_0) &= \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(qN + k_0 - m\bar{N}) \sum_{n=0}^{N-1} a(m, n) \sqrt{\frac{2}{N}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2\text{mod}(k_0, N) + 1]\text{mod}(n, N)\pi}{2N} g_n \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(qN + k_0 - m\bar{N}) \sum_{n=0}^{N-1} a(m, n) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2k_0 + 1)n\pi}{2N} g_n \quad (16) \end{aligned}$$

这里, 第 2 个求和项也是一 N 点的 IDCT, 同样可以用 IDCT 的快速算法进行计算, 信号重建的复杂性比复值离散 Gabor 变换的信号重建简单的多。

3 模拟实验

在实验中, 首先利用式(14)计算出对应于一维双边指数综合窗

$$h(k) = \exp(-0.2|k-31.5|)$$

的 3 个正交分析窗(图 1 所示), 定义过抽样率为 $\beta = L/(\bar{M}\bar{N})$, 由图 1 可看出, β 越大, 双正交分析窗的形状越接近于双边指数综合窗。然后分别将这 3 个正交分析窗用于几种信号的真实离散Gabor变换计算, 如幅度为 1 的矩形脉冲信号等。实验表明重建的信号与原信号的均方误差: 临界抽样(图 1(b))

时为 10^{-14} 数量级; 过抽样(图 1(c), 图 1(d))为 10^{-16} 数量级。该误差实际上是由于计算机浮点计算有效位数有限引起的, 已微乎其微, 因此, 该实验结果也表明所提出的变换是完备的。

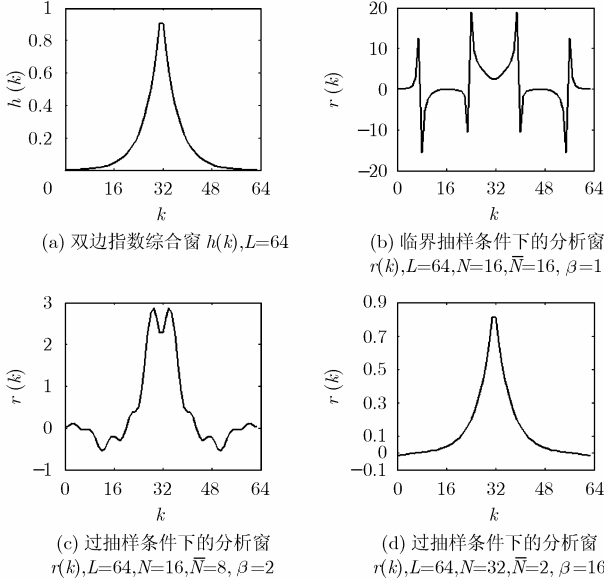


图 1 双边指数综合窗(a)及相应的分析窗(b)、(c)和(d)

4 结束语

本文采用双正交分析方法, 定义了一种基于 DCT 的实值离散 Gabor 变换, 证明了该变换中综合窗与分析窗的双正交条件(即证明了变换的完备性), 该实验结果也验证了变换的完备性。对于实值序列, 由于该变换仅涉及实值计算, 并且可利用快速 DCT, IDCT 算法来加速运算, 因此在计算方面比传统复值离散 Gabor 变换更为简单。在实际应用中, 将更方便于软件和硬件的实现。

附录 A 双正交条件的证明

将式(2)代入式(1)得到下式(变换完备性条件):

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}_{mn}(k) \cdot \tilde{\gamma}_{mn}(k') = \delta(k - k') \quad (\text{A1})$$

用 $f(k, k')$ 表示式(A1)的左边式, 并重写成下式

$$\begin{aligned} f(k, k') &= \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(k - m\bar{N}) \cdot \tilde{\gamma}(k' - m\bar{N}) \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{2}{N}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2 \bmod(k, N) + 1] \bmod(n, N) \pi}{2N} g_n \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2 \bmod(k', N) + 1] \bmod(n, N) \pi}{2N} g_n \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

将下列 DCT 函数正交性关系式

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2 \bmod(k, N) + 1] \bmod(n, N) \pi}{2N} g_n \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2 \bmod(k', N) + 1] \bmod(n, N) \pi}{2N} g_n \\ &= \sum_i \delta(k - k' - iN) \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

代入式(A2)后得

$$\begin{aligned} f(k, k') &= \sum_i \delta(k - k' - iN) \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(k' + iN - m\bar{N}) \\ &\quad \cdot \tilde{\gamma}(k' - m\bar{N}) \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

将下面的式(B5)代入式(A4)后得

$$\begin{aligned} f(k, k') &= \sum_i \delta(k - k' - iN) \\ &\quad \cdot \left\{ \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{\bar{N}-1} \left[\sum_{k''=0}^{L-1} \tilde{h}(k'' + iN) \cdot \tilde{\gamma}(k'') \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2 \bmod(k'', \bar{N}) + 1] \bmod(j, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_j \right\} \\ &\quad \cdot \left. \cos \frac{[2 \bmod(k', \bar{N}) + 1] \bmod(j, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_j \right\} \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

再将双正交性条件式(10)代入式(A5)方括号中得

$$\begin{aligned} f(k, k') &= \sum_i \delta(k - k' - iN) \\ &\quad \cdot \left\{ \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{\bar{N}-1} \sqrt{\frac{L}{M}} \delta(i) \delta(j) \right. \\ &\quad \cdot \left. \cos \frac{[2 \bmod(k', \bar{N}) + 1] \bmod(j, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_j \right\} \\ &= \delta(k - k') \text{ 当 } j=0 \text{ 时, } g_j = 1/\sqrt{2} \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

式(A6)说明了如果分析窗 $\gamma(k)$ 存在, 式(10)就隐含了式(A1), 于是证明了 $\tilde{h}(k)$ 与 $\tilde{\gamma}(k)$ 的双正交性条件式(10)成立。

附录 B 离散泊松(Poisson)求和公式

设 $\{a(n)\}$ 是一周期为 $L = M\bar{N}$ 的序列, 其 DCT 变换为 $A(k) = \text{DCT}[a(n)]$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} a(n) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{[2 \bmod(n, L) + 1] \bmod(k, L) \pi}{2L} g_k \quad (\text{B1})$$

由 $\{a(n)\}$ 构成另一周期为 \bar{N} 的序列 $\{\hat{a}(n)\}$:

$$\hat{a}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} a(n - m\bar{N}), \quad \hat{a}(n) = \hat{a}(n + \bar{N}) \quad (\text{B2})$$

对 $\hat{a}(n)$ 进行 DCT 变换得

$$\begin{aligned} \hat{A}(k) &= \text{DCT}[\hat{a}(n)] = \sum_{n'=0}^{\bar{N}-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} a(n' - m\bar{N}) \right] \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2}{\bar{N}}} \cos \frac{[2 \bmod(n', \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \\ &= \sum_{n'=0}^{\bar{N}-1} \left[\sum_{m'=0}^{M-1} a[n' + (M - m)\bar{N}] \right] \sqrt{\frac{2}{\bar{N}}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2 \bmod(n' + (M - m)\bar{N}, \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \\ &= \sum_{n'=0}^{\bar{N}-1} \left[\sum_{m'=0}^{M-1} a[n' + m'\bar{N}] \right] \sqrt{\frac{2}{\bar{N}}} \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2 \bmod(n' + m'\bar{N}, \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} a(n) \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2 \bmod(n, \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \quad (\text{B3}) \end{aligned}$$

对式(B3)进行 DCT 逆变换(IDCT)得

$$\begin{aligned} \hat{a}(n) &= \text{IDCT}[\hat{A}(k)] \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{\bar{N}-1} \hat{A}(k) \cos \frac{[2 \bmod(n, \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

将式(B3)代入式(B4)后得

$$\begin{aligned} \hat{a}(n) &= \sum_{m'=0}^{M-1} a(n - m'\bar{N}) = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\sum_{k=0}^{\bar{N}-1} \sum_{n'=0}^{L-1} a(n') \right. \\ &\quad \cdot \left. \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{[2 \bmod(n', \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \right] \\ &\quad \cdot \cos \frac{[2 \bmod(n, \bar{N}) + 1] \bmod(k, \bar{N}) \pi}{2\bar{N}} g_k \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

此式即为 DCT 函数形式的离散泊松(Poisson)求和公式。

参 考 文 献

- [1] Gabor D. Theory of communication. *J. Inst. Electr. Eng.*, 1946, 93: 429-457.
- [2] Stewart D F, Potter L C, and Ahalt S C. Computationally attractive real gabor transforms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(1): 77-84.
- [3] Ahmed N T, Natarajan, and Rao K R. Discrete cosine transform. *IEEE Trans. on Comput.*, 1974, 23(1): 90-93.
- [4] Tao L and Kwan H K. Real discrete gabor expansion for finite and infinite sequences. Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Geneva, Switzerland, 2000, vol. 4: 637-640.
- [5] Wexler J and Raz S. Discrete Gabor expansions. *Signal Processing*, 1990, 21(3): 207-220.
- [6] 陶亮, 张德龙, Kwan H K. 实值离散 Gabor 变换的最优双正交分析窗函数. *电路与系统学报*, 2000, 5(4): 48-52.
- [7] 王中德. 快速变换的历史与现状. *电子学报*, 1989, 17(5): 103-111.
- [8] 蒋增荣等. 快速算法. 国防科技大学出版社, 1998: 415-434.

魏道昀: 男, 1981 年生, 硕士生, 研究方向为多维信号处理.

祝美龙: 男, 1982 年生, 硕士生, 研究方向为多维信号处理.

陶 亮: 男, 1963 年生, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向为数字信号与图像处理、模式识别.