

## 北斗组合动态定位算法稳定性分析

高法钦 谈展中

(北京航空航天大学电子信息工程学院 北京 100083)

**摘要:**该文针对北斗卫星定位系统和惯性导航系统提出组合导航卡尔曼滤波定位算法,对组合导航滤波算法的可控性、可观性进行了分析,并用数值分析方法从可观性定义出发分析了各个状态的可观测度,从稳定性的定义出发分析了组合算法的稳定性和渐进稳定性。由于双星时不能对钟差滤波,所以对滤波定位观测模型进行了改进,引入伪距率和惯性器件输出的加速度作为观测量。仿真表明改进方案大大提高了组合定位系统的工作稳定性,抗突发性误差的能力提高了一个数量级,而且双星的情况下可以对钟差滤波。

**关键词:** 卫星定位系统; 卡尔曼滤波; 稳定性; 可观性; 伪距率

**中图分类号:** TN967.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2007)10-2388-04

## The Stability Analyse of "BeiDou" Integrated Dynamic Positioning Algorithm

Gao Fa-qin Tan Zhan-zhong

(School of Electronic Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** A Kalman filter positioning algorithm applied in "BeiDou" and INS integrated navigation system is proposed. Then, the observability, controllability and stability of integrated navigation filter algorithm is analyzed. The observability of every state is analyzed using method of numerical value analysis. Because the clock-error state can not be filtered, otherwise the algorithm may be divergence, we make improvement on the filter algorithm model, using the change rate of pseudo-ranges and INS's acceleration as observations. Finally, it is explained in emulation mode that our improved integrated navigation algorithm model can improve the running stability of integrated navigation system effectively, its ability of resisting outburst error is enhanced effectively, and the clock-error state can be filtered even when the original location error is up to 13000 meter.

**Key words:** Satellite positioning system; Kalman filter; Stability; Observability; Change rate of pseudo-ranges

### 1 引言

我国的“北斗一号”卫星定位通信系统由 3 颗地球同步轨道卫星组成,具有有源定位等功能。但有源定位难以满足高动态用户的实时定位要求和军事上电磁隐蔽的要求<sup>[1]</sup>。为了充分利用我国卫星定位导航资源解决我国境内大机载体的远程航路导航问题,本课题研究了无源北斗/惯导组合导航系统,而本文则研究组合导航算法,目的是从分析组合算法卡尔曼滤波定位模型的可控性、可观性和稳定性入手,发现问题进而提出解决问题的方法。

所谓可控性,是指系统状态运动可以到达任何一个指定的状态,可观性是指系统状态是否可由观测量反映<sup>[2]</sup>。所谓滤波的稳定性,是指随着滤波时间的增长,状态和估计误差方差阵都各自不受其初值的影响。如果系统不可观测的状态是不稳定的,则建立的卡尔曼滤波模型就可能发散。所以本文着重研究可观性和稳定性这两个影响卡尔曼滤波

性能的重要因素。

### 2 数学模型

卡尔曼滤波器线性化模型如下:

状态方程

$$\mathbf{X}_k = \Phi_{k,k-1}\mathbf{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathbf{W}_{k-1} \quad (1)$$

观测方程

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (2)$$

其中  $\mathbf{X}$  为状态向量,  $\mathbf{Z}$  为观测向量,  $\mathbf{W}$  为系统噪声,  $\mathbf{V}$  为观测噪声,  $\Phi$  为系统转移矩阵,  $\mathbf{H}$  为观测矩阵,下标  $k$  表示第  $k$  步滤波。初始状态为  $\mathbf{X}_0$ 。

(1) 状态方程 状态量选用户在地心地固坐标系下的三维位置  $(x, y, z)$ , 三维速度  $(v_x, v_y, v_z)$ , 三维加速度  $(a_x, a_y, a_z)$  和用户接收机时钟的钟差、频漂  $(\Delta t, \delta)$ 。 $(\Delta t, \delta)$  应用于三星/惯导组合算法中,在双星/惯导组合算法中经初始化校正后被忽略。状态向量为  $\mathbf{X}_u = [\Delta t, \delta, x, v_x, a_x, y, v_y, a_y, z, v_z, a_z]$ 。

时钟模型为

$$\Delta \dot{t} = \delta, \quad \dot{\delta} = -\alpha\delta + \omega_f(t) \quad (3)$$

其中  $\alpha$  为相关时间,  $\omega_f(t)$  为白噪声。

本文将加速度这一指数相关色噪声看作是白噪声激励下的线性系统的输出, 由此, 可得 Singer 模型如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_x, \dot{v}_x = a_x, \dot{a}_x = -\beta a_x + \omega_{ax}(t), \dot{y} = v_y, \dot{v}_y = a_y, \\ \dot{a}_y &= -\beta a_y + \omega_{ay}(t), \dot{z} = v_z, \dot{v}_z = a_z, \dot{a}_z = -\beta a_z + \omega_{az}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $\beta$  为相关时间。将式(3)、式(4)所述状态方程表示为矩阵形式, 并对其离散化可得离散化的状态方程: 式(1)。

(2) 观测方程 本文采用北斗接收机测量得到的伪距  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , 高度表高度  $h$  做为观测量。经过整理可得如下观测方程组:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i - \hat{r}_i - c\Delta\hat{t} &= e_{i1}(x - \hat{x}) + e_{i2}(y - \hat{y}) + e_{i3}(z - \hat{z}) + c\Delta\hat{t} \\ &\quad + w_{\rho_i}, \quad i = 1, 2, 3 \\ h - \frac{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}{\cos\hat{\varphi}} + \hat{R}_N &= \frac{\hat{x}}{\cos\hat{\varphi}\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}(x - \hat{x}) + \frac{\hat{y}}{\cos\hat{\varphi}\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}} \\ &\quad \cdot (y - \hat{y}) + w_h \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中  $\hat{r}_i$  为用户到第  $i$  颗星的估计距离,  $e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}$  为用户到第  $i$  颗星的方向余弦估计值,  $\hat{\lambda}, \hat{\varphi}$  为位置估计值  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  经坐标转换得到的经、纬度坐标,  $c\Delta\hat{t}, c\Delta\hat{t}$  分别为估计的用户接收机钟差等效距离误差及其残差,  $w_{\rho_i}, w_h$  分别为伪距和高度观测误差。式(5)的左端是滤波新息  $\tilde{Z}_p$ , 由式(5)可以确定观测矩阵  $H_k$ 。

### 3 稳定性相关的基本概念

#### 3.1 可控性的基本概念及其判别方法

对于式(1)和式(2)所示的随机系统, 因为其一步转移矩阵  $\Phi$  为定常矩阵, 所以有如下的随机可控判别式<sup>[3, 4]</sup>

$$\text{rank}(Q_c) = \text{rank} \begin{bmatrix} \Phi^{n-1}\Gamma Q^2 & \Phi^{n-2}\Gamma Q^2 & \dots & \Gamma Q^2 \end{bmatrix} = n \quad (6)$$

#### 3.2 稳定性的基本概念

卡尔曼滤波理论中的稳定性的定义<sup>[2]</sup>如下。设  $X_k^1, X_k^2$  是系统对应不同初始状态  $X_0^1, X_0^2$  在  $k$  时刻的状态。

**定义 1 (稳定性和一致稳定性)** 对于式(1)和式(2)所示系统, 如果任意给定  $\varepsilon > 0$ , 总可找到  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , 当  $\|X_0^1 - X_0^2\| < \delta$  时,  $\|X_k^1 - X_k^2\| < \varepsilon$  恒成立, 则系统是稳定的。如果  $\delta$  的取值与初始时刻  $t_0$  无关, 则系统是一致稳定的。其中  $\|X\|$  是向量  $X$  的 2 范数。

**定义 2 (渐进稳定性和一致渐进稳定性)** 对于式(1)和式(2)所示系统, 如果系统不但是稳定的, 而且对任意初始状态  $X_0^1, X_0^2$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k^1 - X_k^2\| \rightarrow 0 \quad (7)$$

即任意给定  $\mu > 0$ , 总能找到  $T = T(\mu, t_0) > 0$ , 当  $t_k > t_0 + T$  时,  $\|X_k^1 - X_k^2\| < \mu$  恒成立, 则称系统是渐进稳定的。如果  $T$  的取值与  $t_0$  无关, 则系统是一致渐进稳定的。

### 4 组合导航算法可控性、可观性和稳定性分析

本文仿真算法设定的飞行状态: 初始位置为东经  $116^\circ$  和北纬  $40^\circ$ , 时速  $1000\text{km}$ , 航向角为  $45^\circ$ , 海拔高度  $10000\text{m}$ , 伪距测量误差为  $10\text{m}$ , 高度测量误差为  $40\text{m}$ , 时钟稳定度为  $10^{-10}$ 。滤波周期为  $0.25\text{s}$ 。

#### 4.1 可控性和可观测性分析

本文用式(6)判断系统的一致可控性, 方法: 导航定位计算的同时也计算式(6)中可控性矩阵  $Q_c$  的特征值, 只要可控性矩阵所有特征值都大于零, 那么式(6)成立, 系统是随机可控的。经仿真, 组合导航算法是一致随机可控的。

#### 4.2 状态的可观测度分析

因为双星组合时时钟误差状态不可观测, 所以组合导航算法不满足一致完全可观测性。下面本文提出一种状态可观性分析方法, 并用来分析滤波器哪些状态是可观的, 哪些状态是不可观测的, 以确定需要的状态是否能够被准确的估计。

**4.2.1 本文的状态可观度分析方法** 不考虑随机噪声时, 将系统状态方程代入观测方程得:

$$\begin{cases} Z_0 = H_0 X_0 \\ Z_1 = H_1 \Phi_0 X_0 \\ \vdots \\ Z_k = H_k \prod_{i=0}^{k-1} \Phi_i X_0 \end{cases} \quad \text{记 } Q_{o,k} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \Phi_0 \\ \vdots \\ H_k \prod_{i=0}^{k-1} \Phi_i \end{bmatrix}, \quad \text{则 } Q_{o,k} X_0 = Z$$

因为  $Q_{o,k}$  未必满秩, 所以常用最小二乘法解上述方程:

$$Q_{o,k}^T Q_{o,k} X_0 = Q_{o,k}^T Z \quad \text{即 } X_0 = (Q_{o,k}^T Q_{o,k})^{-1} Q_{o,k}^T Z \quad (8)$$

为了便于分析, 将式(8)简写为

$$O_k x = b \quad (9)$$

其中  $O_k = Q_{o,k}^T Q_{o,k}$ ,  $b = Q_{o,k}^T Z$ ,  $x$  即为初始状态  $X_0$ 。显然矩阵  $O_k$  是实对称矩阵, 由矩阵理论<sup>[5]</sup>可知:  $U O_k U^T = \Lambda$ , 于是  $O_k = U^T \Lambda U$ 。因此, 由式(9)可得:  $U^T \Lambda U x = b$ , 若记  $x' = Ux$ ,  $b' = Ub$ , 则有

$$\Lambda x' = b' \quad (10)$$

方程(10)的解为

$$x'_i = b'_i / \lambda_i \quad (11)$$

因此, 状态  $x'_i$  的可观测性与观测误差放大倍数  $1/\lambda_i$  有关,  $1/\lambda_i$  越大,  $x'_i$  的可观测性越差。但是, 只凭特征值不能完全反映可观性, 还需要考虑向量  $b'$  的影响。因此, 定义  $X_{ki}'$  的可观测度为:  $s'_i = \text{abs}(\lambda_i / b'_i)$ , 并设状态  $X_k'$  的可观测度向量为  $s'$ , 状态  $x$  的可观测度为  $s$ :

$$s = \text{abs}(U^T s') = \text{abs}(U^T \text{abs}([\lambda_1 / b'_1, \lambda_2 / b'_2, \dots, \lambda_n / b'_n]^T)) \quad (12)$$

因此, 只要计算出观测相关矩阵  $O_k$  的特征值和特征向量, 就可由式(12)对每一个状态进行可观性分析。

#### 4.2.2 状态的可观测度分析结果

(1) 可以收到 3 颗星的信号时。由式(12)计算出状态  $X_u$  的可观测度向量如表 1 所示。可见, Singer 组合模型的各个

表 1 各个状态的可观测度

状态	$\Delta t$	$\Delta f$	$x$	$y$	$z$	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$a_x$	$a_y$	$a_z$
$s_i$	0.16	0.147	0.295	-0.195	0.088	0.234	-0.169	0.102	0.215	-0.162	0.107

状态都是可观测的,其中  $Z$  轴向的位置、速度和加速度状态的可观测度相对其它两个轴向来说较低。

(2)只能收到 2 颗星的信号且不考虑钟差的影响时。钟差于频漂状态不可观测,其余状态与上面的结论基本相同。

#### 4.3 卡尔曼滤波稳定性分析

分析卡尔曼滤波的稳定性,需要将状态方程和观测方程综合在一起考虑。由卡尔曼滤波递推公式,可得如下表达式:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_k &= \Phi_k \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \Phi_k \hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \Phi_k \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{Z}_k = \Psi_k \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{Z}_k\end{aligned}\quad (13)$$

其中  $\mathbf{K}_k$  为滤波增益阵,  $\Psi_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \Phi_k$ 。可视式(13)为一时变线性系统,下一定理讨论了其稳定性问题。

**定理 1** 设式(1)和式(2)所示系统为一致完全可控和一致完全可观,则其最优线性滤波器式(13)是一致渐进稳定的。

双星组合时组合导航算法不是一致完全随机可观测的,因此不能用定理(2)分析组合导航算法的稳定性。本文从稳定性的定义出发来分析卡尔曼滤波的稳定性。由式(13)可得:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_k &= \Psi_k \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{Z}_k = \Psi_k \Psi_{k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-2} + \Psi_k \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{Z}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{Z}_k \\ &= \dots = \prod_{i=1}^k \Psi_i \hat{\mathbf{X}}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{i=j+1}^k \Psi_i \mathbf{K}_j \mathbf{Z}_j + \mathbf{K}_k \mathbf{Z}_k\end{aligned}\quad (14)$$

设  $\mathbf{X}_k^1, \mathbf{X}_k^2$  是对应不同初始状态  $\mathbf{X}_0^1, \mathbf{X}_0^2$  在  $k$  时刻的值:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}_k^1 - \mathbf{X}_k^2\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \prod_{i=1}^k \Psi_i (\hat{\mathbf{X}}_0^1 - \hat{\mathbf{X}}_0^2) \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \|\Psi_i\| \\ &* \left\| (\hat{\mathbf{X}}_0^1 - \hat{\mathbf{X}}_0^2) \right\| \xrightarrow{\text{当}\Psi_i\text{的范数小于等于1,且仅在有限情况下等于1时}} 0\end{aligned}\quad (15)$$

方阵的谱半径(或谱范数)是方阵范数的下界,因此可用谱半径计算上述表达式。方阵  $\Psi_i$  的谱半径为:  $\rho(\Psi_i) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$ , 其中:  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ , 为矩阵  $\Psi_i$  的特征值。

**引理 1** 由定义 2、式(15)可知,当  $\Psi_i, i=1, \dots, k, \dots, \infty$  的最大特征值绝对值都小于等于 1,且只有有限时刻下  $\Psi_i$  的最大特征值绝对值等于 1(或略大于 1),则系统是渐进稳定的。

只要实时计算矩阵  $\Psi_i$  的特征值,就能运用引理 1 判断算法的稳定性。下面运用上述方法分析组合定位算法的稳定性:

(1)三星时 通过仿真计算,矩阵  $\Psi_i, i=1, \dots, k$  的最大特征值都小于 1,另外,当用户的位置处于约北纬  $33^\circ$  以南时,除在第 10~50s 内矩阵  $\Psi_i$  最大特征值略大于 1 外,其它时刻下矩阵  $\Psi_i$  最大特征值都小于 1,由引理 1 可知组合定位算法是一致渐进稳定的。

(2)双星时 仿真时需要忽略钟差。除了在第 10~50s 内矩阵  $\Psi_i$  的最大特征值略大于 1(没有超过 1.1)外,其它时刻下

矩阵  $\Psi_i$  的最大特征值都等于 1。由定义 2 可知,组合导航算法不是渐进稳定的;由式(15)和定义 1 可知,组合导航算法是一致稳定的。

## 5 改进滤波定位模型

为了克服双星时不能对钟差状态滤波的弊端,本文改进了观测方程,加入伪距率作为观测量,经推导可得相应的观测方程(略)。改进观测方程后的仿真结果(飞行状态同第 4 节):

(1)三星时 用 4.1 节所述方法分析,得知改进后的组合导航算法是一致随机可控的,也是一致随机可观测的,由定理(2)可知组合导航算法是一致渐进稳定的。另外,运用引理 1 即 4.3 节所述方法分析组合算法的稳定性,也可得到相同的结论。此时,经仿真验证,滤波定位过程中的突发性误差只要小于等于初始误差  $3 \times 10^{11} \text{m}$ ,组合导航算法都能很快恢复正常工作。如图 1 所示。

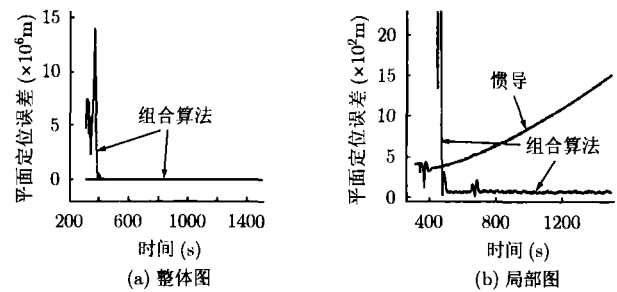


图 1 平面定位误差图(三星)

(2)双星时 可以对钟差滤波,且初始误差小于 13000m 时都能稳定工作,参见图 2 所示。用前述方法进行仿真分析,可知组合导航算法是一致随机可控的,但不是随机可观测的;组合导航算法不是一致渐进稳定的,而只是一致稳定的。

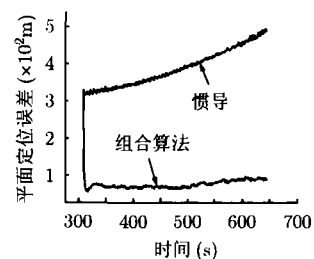


图 2 平面定位误差(双星)

## 参考文献

- [1] 言中,丁子明. 卫星无线电导航. 北京:国防工业出版社. 1989.7.

- 第七章.
- [2] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990, 第三章.
- [3] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998, 第四章.
- [4] Deng Zi-Li and Zhang Huan-Shui, *et al.* Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems[J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 199-216.
- [5] 陈祖明等. 矩阵论引论[M], 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998, 第三章.
- [6] 董绪荣, 张守信, 华仲春. GPS/INS 组合导航定位及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998, 13~16 页.
- 高法钦: 男, 1974 年生, 博士生, 研究方向为卫星组合导航与数据融合.
- 谈展中: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为卫星导航与组合导航系统、机载导航设备自动测试系统、战术综合电子系统.