

## 一种新的基于数值积分的粒子滤波算法

梁军利 杨树元 曲超 高丽

(中国科学院声学研究所 北京 100080)

(中国科学院研究生院 北京 100039)

**摘要:** 该文提出了一种新的用于非线性非高斯系统状态估计的粒子滤波算法。首先通过基于数值积分的差商滤波器产生重要密度函数, 由于这些重要密度函数结合了最新的观测数据, 这样采样得到的样本更接近于系统状态的真实后验概率, 因此其性能优于标准的粒子滤波算法。最后给出了理论分析和仿真结果, 验证了该算法的有效性。

**关键词:** 数值积分; 差商滤波器; 粒子滤波; 贝叶斯滤波; 目标跟踪

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)06-1369-04

## A New Particle Filter Based on Numerical Integration Method

Liang Jun-li Yang Shu-yuan Qu Chao Gao Li

(Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract:** This paper introduces a new particle filter for nonlinear and non-Gaussian systems. The divided difference filter based on numerical integration is used for generating the importance density functions. As it integrates the new observations into system state transition density, which approximates to the state posterior density, the proposed particle filter has the better performance than the conventional one. Finally, the validity of this method is well verified by the computer simulations.

**Key words:** Numerical integration; Divided difference filter; Particle filtering; Bayesian filtering; Target tracking

### 1 引言

目标跟踪系统是声呐、雷达和机器人等系统的重要组成部分之一, 其主要功能是通过能够完成递归目标状态估计的滤波器在线确定目标的数量、位置和运动轨迹等, 以便完成实时监控、制导及避障等任务。因此滤波器的性能好坏直接制约着系统的性能。

Kalman 滤波器是由卡尔曼于 1960 年提出的一种基于最小均方误差准则适合高斯噪声线性系统状态估计的最优滤波器。而实际问题总是呈现出不同程度的非线性, 为此, 不少学者考虑采用扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)算法, 其基本思路就是用线性系统近似实际问题中的非线性系统, 仍遵循卡尔曼滤波经典框架(包含“预测和修正”两个关键部分, 利用系统状态和观测量的有关统计参量), 用截断的泰勒级数估计系统的有关统计参量(这些参量估计的精确度直接影响着系统的滤波性能)。尽管 EKF 在解决非线性系统的滤波问题方面取得了一定的成效, 但其仍存在明显的缺陷: 雅可比矩阵推导的复杂性使得许多应用实现困难; 当采样周期不足够小使得局部线性的假设不成立时, 会造成逼近精度急剧下降导致滤波器性能严重降低甚至引起滤波器发散。

因此, 各国的学者将目光转向了一种能够用于非线性非

高斯系统、通过序贯蒙特卡洛(Sequential Monte Carlo, SMC)重要采样模拟进行滤波的新型滤波器, 即粒子滤波器(Particle Filtering, PF), 并成功应用于目标跟踪、故障诊断、模型确定和参数估计等领域<sup>[1-11]</sup>。PF 不受系统状态函数、观测函数形式的影响, 而且并不像卡尔曼滤波那样严重依赖于后验概率的闭合解析式, 其主要的思路是通过重要函数产生带权样本(粒子)来逼近系统状态的真实后验概率分布, 但并不是每一个系统都能够从后验概率中直接采样, 因此需要设计重要函数尽可能接近系统状态真实后验概率<sup>[7,12,13]</sup>。

差商滤波器是一种以 Stirling 插值公式为基础构建的滤波器, 在序贯滤波中能准确地捕获并传递系统状态的真实分布, 这在文献[14-16]中已得到了证实。基于此, 本文提出了一种新的基于数值积分的粒子滤波器, 即使用差商滤波器<sup>[1,2]</sup>产生重要概率密度函数, 并从中进行序贯重要采样逼近系统状态后验概率, 依次得到系统在各个时刻的状态估计值。

### 2 问题描述与粒子滤波

#### 2.1 问题描述与贝叶斯滤波

为定义非线性滤波问题, 首先引入状态空间模型:

$$\mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = g_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \quad (2)$$

其中  $f_{k-1}(\cdot, \cdot)$  为系统在  $k-1$  时刻的状态函数,  $g_k(\cdot, \cdot)$  为系统在  $k$  时刻的观测函数,  $\mathbf{x}_k \in R^{d_x}$  是  $k$  时刻维数为  $d_x$  的系统状

态向量;  $\mathbf{v}_{k-1} \in R^{d_v}$  是在  $k$  时刻维数为  $d_v$  的系统过程噪声;  $\mathbf{y}_k \in R^{d_y}$  是在  $k$  时刻得到的维数为  $d_y$  的观测样本;  $\mathbf{w}_k \in R^{d_w}$  是在  $k$  时刻维数为  $d_w$  的系统观测噪声; 过程噪声与观测噪声相互独立, 已知  $p(\mathbf{x}_0)$  为系统状态向量的初始概率。滤波的目的就是从依次得到的观测样本  $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$  中递归得到对应时刻的系统状态  $\mathbf{X}_k = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ 。

贝叶斯(Bayes)滤波<sup>[5,13]</sup>根据观测样本  $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$  递推计算状态  $\mathbf{x}_k$  取不同值时的置信度  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$  (即后验概率), 然后获得当前状态  $\mathbf{x}_k$  在最小均方误差准则下的最优估计:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\text{MMSE}} \triangleq E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k\} = \int \mathbf{x}_k \cdot p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \quad (3)$$

## 2.2 粒子滤波

粒子滤波符合上述贝叶斯滤波思想, 其不同之处在于: 根据概率分布  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$  进行序贯蒙特卡洛重要采样, 抽取  $N$  个带权的样本  $\{(\mathbf{x}_k^i, \omega_k^i), i = 1, \dots, N\}$ , 这里  $\sum_i \omega_k^i = 1$ , 这样在  $k$  时刻可以得到后验概率密度的加权近似:

$$\hat{p}(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{Y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{X}_{0:k} - \mathbf{X}_{0:k}^i) \quad (4)$$

$\delta$  为 Dirac 函数, 这样式(3)的估计更改为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\text{MMSE}} \triangleq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \mathbf{x}_k^i \quad (5)$$

式(5)的有效性可以通过大数定律来保证, 即要求  $N$  为一个较大的数。而在  $k+1$  时刻的采样值可以从  $k$  时刻的采样值和式(1)获得, 同时修改  $k+1$  时刻各采样点的权值。由于存在退化现象, 所以需要借助再采样的方法进行样本选择, 由于再采样是独立同分布的, 这样样本的权值被重新设置为  $\omega_k^i = 1/N$ 。

## 3 基于数值积分的粒子滤波器

### 3.1 改进思路

从后验概率  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  直接采样可以使得滤波的结果具有最小的均方误差; 但是, 一般从后验概率直接采样是不可能的, 这样我们只能从一个已知、且容易采样的建议分布  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  进行采样。因此如何选择重要密度函数就成为一个至关重要的问题。

将最新观测数据纳入到重要密度函数中, 减小从重要密度函数得到的采样样本与从后验概率直接采样的样本的误差, 从而可以提高采样的准确性, 进而改善滤波的性能。基本思路就是通过一个能够在单个粒子的滤波中更为准确地捕获系统当前状态均值和方差的滤波器进行再采样, 得到更优的采样样本。

### 3.2 差商滤波<sup>[14-16]</sup>

**3.2.1 差商滤波机理** 类似于EKF, 差商滤波器<sup>[14-16]</sup>亦遵循Kalman滤波的经典框架(包含“预测和修正”两个关键部分, 利用系统状态和观测量的有关统计参量), 但不同之处在于:

差商滤波器是一种以Stirling插值公式为基础构建的滤波器, 其采用偏差分算子构建多项式(核心是计算一组给定“样本点”的函数值)逼近非线性方程的导数以避免求导运算, 此外由于其在近似系统相关统计参量的过程中考虑了系统状态等随机变量的统计特性(用于生成“样本点”), 因此该方法可以获得更高的逼近精度, 另外该滤波器不需要进行雅可比矩阵的推导和计算, 仅需要计算有限个数的函数值, 计算简单, 但是又能够用较少的差商阶次来逼近泰勒函数的高阶。

差商滤波器滤波过程为: 通过上一时刻状态估计的有关统计量(状态估计值和协方差矩阵)生成一组确定的样本点(由状态估计值及协方差矩阵 Cholesky 分解得到的向量线性叠加组成), 计算状态预测值及相应的预测协方差矩阵, 完成“预测”部分; 在“修正”步骤中, 通过状态预测值及预测协方差矩阵产生样本点, 计算观测预测值、互协方差矩阵、卡尔曼增益矩阵及“新息”, 更新状态估计值及协方差矩阵, 重复上述过程, 完成整个观测时间内的滤波功能。

**3.2.2 借助差商算子估计非线性函数统计特性** 由3.2.1节可以看出, 差商滤波的核心是利用偏差分算子估计非线性变换的统计特性。关于差商滤波的详细描述见文献[14, 16]。本小节以  $d_x$  维随机变量  $\mathbf{x}$  (均值  $\bar{\mathbf{x}}$  和协方差阵  $\mathbf{P}_x$  已知) 为例, 描述如何求  $\mathbf{x}$  的非线性变换  $\mathbf{z} = F(\mathbf{x})$  的统计特性<sup>[14,16]</sup>。定义  $\mathbf{x}$  的非线性变换  $\mathbf{z} = F(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  的 2 阶插值形式(这里限制到 2 阶多项式近似)为

$$\mathbf{z} \approx F(\bar{\mathbf{x}}) + \tilde{D}_{\Delta x} F + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta x}^2 F \quad (6)$$

其中 1 阶, 2 阶差商算子为

$$\tilde{D}_{\Delta x} F = \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{d_x} (\boldsymbol{\mu}_p (\boldsymbol{\delta}_p (F(\bar{\mathbf{x}})))) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\Delta x}^2 F &= \frac{1}{h^2} \sum_{p=1}^{d_x} (\boldsymbol{\delta}_p (\boldsymbol{\delta}_p (F(\bar{\mathbf{x}})))) \\ &+ \sum_{p=1}^{d_x} \sum_{q=1, q \neq p}^{d_x} (\boldsymbol{\mu}_p (\boldsymbol{\delta}_p (\boldsymbol{\mu}_q (\boldsymbol{\delta}_q (F(\bar{\mathbf{x}})))))) \end{aligned} \quad (8)$$

设  $h$  为步长,  $\mathbf{e}_{x,p}$  为协方差矩阵  $\mathbf{P}_x$  进行 Cholesky 分解后因子矩阵的第  $p$  个列向量, 定义在  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  的偏差分算子  $\boldsymbol{\delta}_p$ ,  $\boldsymbol{\mu}_p$  分别为

$$\boldsymbol{\delta}_p = F\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_{x,p}\right) - F\left(\bar{\mathbf{x}} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_{x,p}\right) \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{1}{2} \left[ F\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_{x,p}\right) + F\left(\bar{\mathbf{x}} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_{x,p}\right) \right] \quad (10)$$

对于随机变量  $\mathbf{x}$  的非线性变换  $\mathbf{z} = F(\mathbf{x})$ , 无法直接计算均值及协方差矩阵, 借助以上的差商算子和偏差分算子可以近似  $\mathbf{z} = F(\mathbf{x})$  的均值和协方差矩阵:

$$\bar{\mathbf{z}} \approx \frac{h^2 - d_x}{h^2} F(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{d_x} (F(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{e}_{x,p}) + F(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{e}_{x,p})) \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 P_z = & \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^{d_x} [F(\bar{x} + he_{x,p}) - F(\bar{x} - he_{x,p})][F(\bar{x} + he_{x,p}) \\
 & - F(\bar{x} - he_{x,p})]^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{p=1}^{d_x} [F(\bar{x} + he_{x,p}) \\
 & + F(\bar{x} - he_{x,p}) - 2F(\bar{x})] \times [F(\bar{x} + he_{x,p}) + F(\bar{x} - he_{x,p}) \\
 & - 2F(\bar{x})]^T \quad (12)
 \end{aligned}$$

3.3 基于数值积分的粒子滤波

在  $k$  时刻基于数值积分的粒子滤波算法的一次循环步骤表述为

步骤 1 重要采样步骤 For  $i = 1, \dots, N$  对粒子  $\mathbf{x}_k^i$  进行差商滤波, 得到其均值和方差估计值:  $\hat{\mathbf{x}}_k^i, \hat{\mathbf{S}}_k^i$ ; 即以均值为  $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ , 方差为  $\hat{\mathbf{S}}_k^i$  对应的高斯分布作为重要概率密度函数, 根据该重要函数进行采样, 得到服从该高斯分布的预测样本为  $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = N(\hat{\mathbf{x}}_k^i, \hat{\mathbf{S}}_k^i)$ ;

For  $i = 1, \dots, N$  计算每个粒子  $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$  的权值:

$$\hat{\omega}_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}) p(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k})}$$

并计算归一化权值:  $\omega_k^i = \frac{\hat{\omega}_k^i}{\sum_{i=1}^N \hat{\omega}_k^i}$ 。

步骤 2 再采样 再采样的目的在于减少权值较小的样本, 而把注意力集中在大权值的样本上。其思想类似于图像处理中的直方图均衡化, 通过对后验概率密度  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})$  再采样  $N$  次, 产生新的样本, 但仍保持原来样本的概率分布。由于再采样是独立同分布的, 权值被重新设置为  $1/N$ 。

步骤 3 系统状态估计 根据式(5)即可获得系统的状态估计, 同时将步骤 2 产生的新样本作为  $k+1$  时刻新的采样值, 转入步骤 1。

4 实验结果及分析

4.1 实验 1

选择单变量非平稳生长模型<sup>[10]</sup>(Univariate Nonstationary Growth model, UNG)作为实验模型; UNG模型是一个高度非线性、双模模型, 该模型的动态状态空间 (Dynamic State Space, DSS)方程可以描述为

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25 \frac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8 \cos(1.2(k-1)) + u_{k-1} \quad (13)$$

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + w_k, \quad k = 1, \dots, T \quad (14)$$

其中  $u_k \sim N(0, \sigma_u^2), w_k \sim N(0, \sigma_w^2)$ , 从式(14)可以看出, 当给定  $y_k$  时,  $x_k$  有两种可能取值(双模); 式(13), 式(14)中都存在二次函数。这样的模型是一个较难解决的问题。取  $x_0 = 0.1, \sigma_u^2 = 0.01, \sigma_w^2 = 0.01$ , 产生观测数据  $y_{1:T}, T = 60$ , 取步长  $h = \sqrt{3}$ , 粒子数  $N = 200$ 。

系统状态的估计采用均值估计器, 即

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_k^j \quad (15)$$

一次独立实验的均方误差定义为

$$\text{MSE} = \left( \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\hat{x}_k - x_k)^2 \right)^{1/2} \quad (16)$$

取状态的初始估计值为  $\hat{x}_0 = 0$  对  $x_k$  进行估计。我们基于 MATLAB 对本文提出的 PF-DDF 算法针对该模型进行了 50 次独立的仿真, 为便于比较, 我们对扩展卡尔曼滤波 (EKF), 粒子滤波 (PF), 基于 UKF 产生重要密度函数的粒子滤波器 (PF-UKF) 在相同的条件下也进行了 50 次独立实验。这 3 种滤波器均方误差的均值和方差, 如表 1 所示, 其中的一次独立实验如图 1 所示。

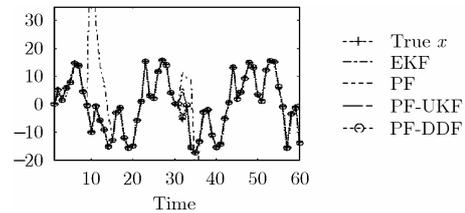


图 1 一次独立的系统状态估计

表 1 均方误差的均值和方差

算 法	均方误差	
	均值	方差
EKF	1.823	0.593
PF	0.350	0.055
PF-UKF	0.247	0.029
PF-DDF	0.212	0.021

4.2 实验 2

使用本文建议算法对非线性、非高斯系统状态进行估计。采用与文献[7,12]相同的系统模型:

$$x_k = 1 + \sin(0.4\pi(k-1)) + 0.5x_{k-1} + u_k \quad (17)$$

$$y_k = \begin{cases} 0.2x_k^2 + w_k, & k \leq 30 \\ 0.5x_k - 2 + w_k, & k > 30 \end{cases}, \quad k = 1, \dots, T \quad (18)$$

其中, 过程噪声  $u_k \sim \text{Gamma}(3,2)$ , 观测噪声  $w_k \sim N(0, 0.00001)$ , 采用两个不同阶次观测模型对系统状态进行观测, 观测时间为  $T = 60$ 。取  $x_0 = 1$ , 产生观测数据  $y_{1:T}$ , 在实验中, 取状态的初始估计值为  $\hat{x}_0 = 1$  对  $x_k$  进行估计, 取步长  $h = \sqrt{3}$ , 粒子数  $N = 200$ 。我们基于 MATLAB 对本文提出的 PF-DDF 算法针对该模型进行了 50 次独立的仿真, 为便于比较, 我们分别采用扩展卡尔曼滤波 (EKF), Unscented 卡尔曼滤波 (UKF), 差商滤波器 (DDF), 高斯-厄米特滤波器 (GHF), 粒子滤波器 (PF) 及基于 EKF<sup>[13]</sup>, UKF<sup>[12]</sup>, GHF<sup>[7]</sup> 产生重要密度函数的新粒子滤波算法在相同的条件下也进行了 50 次独立实验, 得到这几种滤波器均方误差的均值和方差, 如表 2 所示; 其中的一次独立实验中基于 PF, PF-EKF, PF-UKF, PF-DDF 的实验结果如图 2 所示。

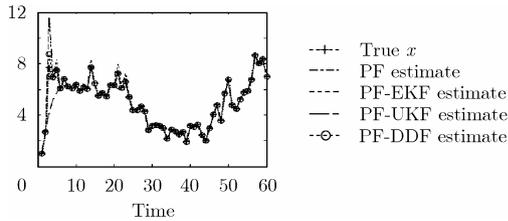


图 2 一次独立的系统状态估计

表 2 均方误差的均值和方差

算 法	均方误差	
	均 值	方 差
EKF	0.374	0.0151
UKF	0.340	0.0137
GHF	0.315	0.0125
DDF	0.328	0.0132
PF	0.282	0.0453
PF-EKF	0.271	0.0164
PF-UKF	0.074	0.0083
PF-DDF	0.027	0.0035
PF-GHF	0.023	0.0029

从以上的实验可以看出, 在非线性和非高斯场合, 粒子滤波算法明显好于一般的滤波算法, 如扩展卡尔曼滤波(EKF), Unscented 卡尔曼滤波(UKF), 差商滤波器(DDF), 高斯-厄米特滤波器(GHF); 而基于EKF, UKF, DDF, GHF产生重要密度函数的粒子滤波算法由于利用了最新的观测数据, 因此对状态的估计精度要好于标准的粒子滤波算法, 但随之也增加了算法的复杂度, 适合对估计精度要求较高的场合, 其中基于差商滤波器(DDF)的新粒子滤波算法的滤波效果优于基于EKF, UKF产生重要密度函数的粒子滤波算法, 缘于其能够通过简单的差商数值积分捕获更接近于真实状态的均值和各类方差值, 从而提高了滤波的效果; 本文建议算法与基于GHF产生重要密度函数的粒子滤波算法<sup>[7]</sup>滤波能力相当。

## 5 结束语

本文提出一种基于差商滤波器产生重要密度函数的新的粒子滤波算法。由于差商滤波器能够更准确地捕获和传递非线性变换的均值和方差, 因此基于该方法产生的重要密度函数更能准确地逼近系统状态的真实后验概率, 从而提高粒子滤波算法估计系统状态的准确性, 适于在非线程度较高和重尾噪声场合中及非高斯系统中使用。下一步的研究将结合浅海中目标跟踪背景, 考虑采用本文建议算法用于浅海中目标的跟踪。

## 参 考 文 献

- [1] Lee D S and Chia N K K. A particle algorithm for sequential Bayesian parameter estimation and model selection [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(2): 326-336.
- [2] Hue C and Cadre L. Sequential Monte Carlo methods for multiple target tracking and data fusion [J]. *IEEE Trans. on*

- [3] Djuric P M, Kotecha J H, and Zhang J, *et al.* Particle filtering [J]. *IEEE Singal Processing Magazine*, 2003, 20(9): 19-38.
- [4] Orton M and Fitzgerald W. A Bayesian approach to tracking multiple targets using sensor arrays and particle filters [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(2): 216-223.
- [5] Arulampalam M S, Maskell S, and Gordon N, *et al.* A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174-188.
- [6] 莫以为, 萧德云. 基于粒子滤波算法的混合系统监测与诊断 [J]. *自动化学报*, 2003, 29(5): 641-648.
- [7] 袁泽剑, 郑南宁, 贾新春. 高斯-厄米特粒子滤波器[J]. *电子学报*, 2003, 31(7): 970-973.
- [8] Storvik G. Particle filters for state-space models with the presence of unknown static parameters[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(2): 281-289.
- [9] Kotecha J H and Djuric P M. Gaussian particle filtering [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2592-2601.
- [10] Kotecha J H and Djuric P M. Gaussian sum particle filtering [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2602-2612.
- [11] Larocque J R, Rielly J P, and William N. Particle filters for tracking an unknown number of sources[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(2): 2926-2937.
- [12] Merve R V d and Doucet A. The unscented particle filter, Technical Report. Available from: <http://www.cs.ubc.ca/~nando/software.html>.
- [13] Douce A t. On sequential simulated-based methods for Bayesian filtering. Technical Report. Available from: <http://www.researchindex.com>
- [14] Nørgaard M, Poulsen N K, and Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [15] Ito K and Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910-927.
- [16] Nørgaard M, Poulsen N K, and Ravn O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear system, Technical Report. available from: <http://www.iau.dtu.dk/research/autonom/ebkf.html>.

梁军利: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为目标跟踪及微弱信号检测。

杨树元: 男, 1942年生, 研究员, 博士生导师, 主要研究方向为数字信号处理、阵列信号处理、图像处理与识别。

曲超: 男, 1977年生, 博士生, 研究方向为微弱信号检测及目标跟踪。

高丽: 女, 1978年生, 博士生, 研究方向为图像处理与信号处理。