

## OFDMA 系统中线性注水功率分配算法

张冬梅<sup>①</sup> 徐友云<sup>①②</sup> 蔡跃明<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)

<sup>②</sup>(上海交通大学电子工程系 上海 200030)

**摘要:** 功率分配是 OFDMA 系统资源调度中的一个重要研究问题。该文通过寻求快速确定不需分配功率的子载波方法,提出了一种线性注水功率分配算法,运算中不需多次迭代,就可完成功率注水过程。仿真结果表明,该算法的吞吐量逼近迭代注水功率分配算法。

**关键词:** OFDMA; 功率分配; 注水

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)06-1286-04

## Linear Water-Filling Power Allocation Algorithm in OFDMA System

Zhang Dong-mei<sup>①</sup> Xu You-yun<sup>①②</sup> Cai Yue-ming<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Institute of Communications Engineering, PLA Univ. of Sci. & Tech., Nanjing 210007, China)

<sup>②</sup>(Institute of Electronic Engineering, Shanghai JiaoTong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** Power allocation is an important issue of resource scheduling in OFDMA system. In this paper, an algorithm of linear water-filling power allocation is proposed through searching for a rapid means for confirming the sub-carriers which need not allocate power. It can finish the process of power water-filling without time after time iterative calculation. The simulation results show that the throughput of the proposed algorithm approaches the algorithm of iterated water-filling power allocation.

**Key words:** OFDMA; Power allocation; Water-filling

### 1 引言

OFDMA 系统利用子载波的正交特性来实现用户多址接入,系统中的资源调度模块可利用多用户分集和信道衰落特性,根据信道增益自适应地进行资源分配,可明显地提高系统吞吐量等性能。OFDMA 系统中的资源分配涉及子载波、功率、自适应调制、比特,几种资源的联合优化是一个复杂度极高的问题。已有研究中,主要采用分步优化的方法:第1步,分配子载波;第2步,确定各子载波的功率、调制方式和加载比特数。

分配子载波既可以直接根据信道增益和用户需求将子载波分配给用户,也可以先确定各用户可分的子载波数,再根据信道增益和用户需求进行分配。子载波分配算法的研究重点是如何保证用户间公平性能和各用户 QoS 性能,并且利用用户的信道差异获得尽可能大的系统总吞吐量。基于不同调度目标,形成了不同的子载波调度算法,通过研究发现系统总吞吐量与用户间公平性能是相互矛盾的,子载波分配算法的选取最重要的是根据系统的要求,在系统吞吐量与用户间公平性间寻求一个平衡点。

分配功率可以根据信道增益统一分配所有子载波,但此时极易改变子载波分配时的用户间公平性能,另一种方法是在用户间按用户占用的资源比例分配功率,用户内的功率分配就只需考虑尽量加大吞吐量,而不会影响整个系统的调度目标。在实际系统实现时,由于调制阶数的限制,加载的比特数只能取几个固定的值,因此功率分配要与自适应调制技术联合优化,才具有实际应用价值。本文主要讨论用户的功率分配问题,功率分配与自适应调制技术联合优化将是下一步要做的工作。

功率分配是一个经典的研究问题,迭代注水功率分配算法是理论上的最优解<sup>[1]</sup>,但需经多次迭代运算才能求出吞吐量最大化的最优解,目前研究主要集中在如何减少迭代次数和寻求运算量小的次优解<sup>[2,3]</sup>,文献[3]中给出了一种快速迭代算法。

文献[4,5]在研究了功率约束下系统吞吐量最大化时的功率分配问题,给出了在用户间速率成比例和高 SNR 限定条件下的线性功率分配算法。这种算法简化了运算,不需进行迭代运算,但这种算法要求过于苛刻,通过仿真发现平均 SNR > 25dB 时算法才能工作,文献[4]中取平均 SNR 为 38dB 进行仿真验证,这与实际系统条件相差较大。

平均功率分配算法是最简单、计算量最小的功率分配算法,但由于不考虑信道增益的变化,当信道的平均 SNR 较低时,吞吐量比迭代注水算法时要小得多。当信道的平均

2005-10-24 收到, 2006-05-08 改回

国家自然科学基金(60372080), 国家 863 计划(2003AA123310)和江苏省自然科学基金(BK2004014)资助课题

SNR 较高时,平均功率分配时的总吞吐量就能接近迭代注水时的结果。本文以平均功率分配时的吞吐量为基准,来比较各种注水功率分配算法的吞吐量增益。

本文在研究上述各种功率分配算法基础上,提出了一种线性注水功率分配算法,运算中不需多次迭代,但调度结果逼近迭代注水功率分配算法。

## 2 功率分配的公式化描述

在 OFDMA 系统资源分配中,用户间公平性能和用户 QoS 性能的保证主要是在分配子载波和功率给用户时考虑的问题。在将子载波分配给用户并确定了用户可用功率后,在用户内部给各子载波分配功率时以获取最大吞吐量为目标,不会影响用户间公平性能。此时的功率分配问题就是一个用户的功率分配问题。

考虑确定子载波状态的单用户条件下,由于 OFDM 系统的总吞吐量是各子载波吞吐量的和,则用户总吞吐量为

$$C = \frac{B}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 \left( 1 + \frac{\alpha_n^2 P_n}{N_0 B \Gamma / N} \right) = \frac{B}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 (1 + H_n P_n) \quad (1)$$

其中  $B$  为系统带宽;  $N$  为子载波个数;  $\alpha_n$  表示第  $n$  个子载波上的信道增益;  $P_n$  为第  $n$  个子载波的发送功率;  $N_0$  表示加性噪声的单边功率谱;  $\Gamma$  表示与物理层编码调制关联的冗余量,不考虑传输的误码率和物理层编码调制时  $\Gamma = 1$ ,此时容量为香农容量,考虑传输的误码率为 BER 和物理层编码调制方式为 MQAM 与格雷编码联合<sup>[6]</sup>时,  $\Gamma = -\ln(5\text{BER})/1.5$ ; 为了讨论方便,设  $H_n = \frac{\alpha_n^2}{N_0 B \Gamma / N}$ 。

总功率约束条件下的用户吞吐量最大化为目标的动态功率分配的优化问题可如下描述

$$\begin{aligned} C^* &= \max \frac{B}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 (1 + H_n P_n), \\ \text{s.t. } P_T &= \sum_{n=1}^N P_n \leq P \quad \text{且} \quad P_n \geq 0 \quad \forall n \end{aligned} \quad (2)$$

## 3 现有功率分配算法

迭代注水功率分配算法以用户吞吐量最大化为目标时,对于这个优化问题,根据式(2),利用 Lagrange 算法,构造 Lagrange 函数:

$$L = \sum_{n=1}^N \log_2 (1 + H_n P_n) - \lambda \left( \sum_{n=1}^N P_n - P \right) \quad (3)$$

求导  $\frac{\partial L}{\partial P_n} = 0$ , 则有

$$\frac{\partial L}{\partial P_n} = \frac{1}{\ln 2} \frac{H_n}{1 + H_n P_n} - \lambda = 0 \quad (4)$$

令  $\beta = \lambda \ln 2$ , 则可以计算出

$$\beta = H_n / (1 + H_n P_n) \quad (5)$$

可以推出

$$P_n = \left[ 1/\beta - 1/H_n \right]^+ \quad (6)$$

其中  $[x]^+$  表示当  $x > 0$  时, 值为  $x$ , 当  $x \leq 0$  时, 值为 0。

但此时不能由式(6)直接得到最优功率分配,需要利用迭代算法得到一个适当的注水水位  $\beta$ 。这种方法通常称为迭代注水算法。

如何快速确定适当的  $\beta$ , 是评价注水算法的关键,文献[3]提出了一种快速迭代算法,给出  $\beta$  的初始值和各次  $\beta$  的修正方法:

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \left[ P + \sum_{n=1}^N \frac{1}{H_n} \right] \quad (7)$$

$$\beta \leftarrow \beta + \mu \frac{1}{N_{\text{ON}}} \left[ P - \sum_{n=1}^N P_n \right] \quad (8)$$

其中  $0 < \mu < 1$  是调整步长,  $N_{\text{ON}}$  表示本次实际分配功率的子载波总数。这种快速注水算法主要是提供了一种  $\beta$  值快速收敛的方法,但每次迭代的运算量并不会减少。一次迭代运算需经  $2N$  次加法运算和  $N+2$  次乘法运算,其运算量为  $O(N)$ ,整个算法的运算量为  $O(kN)$ ,其中  $N$  为子载波个数,  $k$  为迭代次数。本文在算法仿真中采用了这种快速注水算法。

## 4 改进的功率分配算法

由式(6)可知,注水算法是根据各子载波的信道状态来分配功率的,状态好的多分,状态差的少分甚至不分。分析文献[4, 5]中提出的线性分配算法必须要求高 SNR 的原因,发现在计算功率时 SNR 低的子载波会出现负值,而这些低 SNR 的子载波在迭代注水算法时是不分配功率的。通过仿真发现如果能确定不分配功率的子载波,在剩余子载波中即使采用平均功率分配也能明显提高用户吞吐量,一般将这种选取部分子载波平均分配功率的算法称为开关注水功率分配算法。为了寻找快速确定不分配功率的子载波方法,下面分析 Lagrange 算法,由式(5)可以推出

$$H_m / (1 + H_m P_m) = H_n / (1 + H_n P_n) \quad (9)$$

其中  $m, n = \{1, 2, \dots, N\}$ , 则有

$$P_n = P_m + \frac{H_n - H_m}{H_m H_n} = P_m + \frac{1}{H_m} - \frac{1}{H_n} \quad (10)$$

由式(10)知,只要能确定某一个子载波的功率,就可以求出其它子载波的功率,同时所有子载波的功率和为

$$P_T = \sum_{n=1}^N P_n = N \left( P_m + \frac{1}{H_m} \right) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{H_n} \quad (11)$$

由式(2)的约束条件知  $P_T \leq P$ , 则

$$P_m \leq \frac{1}{N} \left( P - \frac{N}{H_m} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{H_n} \right) \quad (12)$$

由式(12)就可确定各个子载波的功率,但此时求出的功率并不一定满足式(2)中的另一个约束条件  $P_m \geq 0$ 。若求出  $P_m < 0$  时取  $P_m = 0$ , 则  $P_T > P$ , 同样不能满足式(2)的约

束条件。因此在迭代注水中需经多次迭代运算,选取适当的注水水位。

若将子载波的信道状态值  $H_n$  顺序排列,则可得到子载波功率  $P_n$  的排列顺序。在将某个状态值小的子载波功率  $P_i$  设为 0 的同时,也应将子载波的信道状态值从  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{H_n}$  中剔除,即用  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H_i}$  代替。可以考虑计算功率时按从小到大的次序,同时剔除不分配功率的子载波。为了简化讨论,假设  $H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_N$ , 则有  $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_N$ 。根据式(12)有

$$P_1 = \frac{1}{N} \left( P - \frac{N}{H_1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{H_n} \right) \quad (13)$$

若  $P_1 \leq 0$ , 将这个子载波的功率设为 0, 剔除这个子载波, 给第二个子载波分配功率

$$P_2 = \frac{1}{N} \left( P - \frac{N-1}{H_2} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{H_n} \right) \quad (14)$$

直到找到  $P_m > 0$ , 然后根据式(10)求出后续子载波的功率。采用这种算法避免了迭代注水算法每次求出所有子载波功率后再修正  $\beta$  重新计算,可以很大程度地减少运算量。与文献[4, 5]中的线性功率分配相比,又避免了不切实际的约束条件限制。这种线性注水功率分配算法的运算量主要包括 2 个部分,第 1 部分是所有子载波的状态值排序,其运算量为  $O(N \log_2 N)$ , 对于单用户系统是必须要考虑的运算量,但对于多用户系统中在子载波分配时实际已完成了子载波状态排序工作;第 2 部分是根据式(13),式(14)确定将被剔除子载波,根据式(10)计算各子载波的功率,共有  $(2+2N+M)$  次加法运算和  $(2+M)$  次乘法运算,其中  $M$  为被剔除的子载波数目,其运算量也为  $O(N)$ , 与迭代注水时一次迭代的运算量相当。算法仿真结果显示系统吞吐量与迭代注水算法的相差很小。

## 5 仿真结果

功率分配算法是在确定子载波后执行的,因此可用单用户情况时功率分配后吞吐量的变化来对比分析各种算法的性能。在仿真中,考虑单小区的 OFDMA 系统的下行链路数据传输,系统带宽为 1MHz,划分为 64 个子载波。由于功率分配算法是在确定子载波后执行的,因此可用单用户情况时功率分配后吞吐量的变化来对比分析各种算法的性能。无线信道模型是 COST207 中的坏城区模型<sup>[7]</sup>,时延扩展  $\gamma = 2.5\mu\text{s}$ 。假设移动用户对信道状态的估计是准确的,并且瞬时信道状态信息是可用的。考虑  $\text{BER} = 10^{-3}$  和  $\text{BER} = 10^{-5}$  两种业务仿真条件。在仿真中对比平均功率分配(EP)、迭代注水功率分配(IWFP)、提出的线性注水功率分配(LWFP)和开关注水功率分配(OWFP)4 种算法。为了直观地说明仿真结果,仿真图中以同等条件下平均功率分配时的吞

吐量为基准值,给出了其它 3 种算法相对于基准值的增益比例。

图 1 给出了  $\text{BER} = 10^{-3}$  时各种算法吞吐量增益与平均 SNR 的关系;图 2 给出了  $\text{BER} = 10^{-5}$  时各种算法吞吐量增益与平均 SNR 的关系。

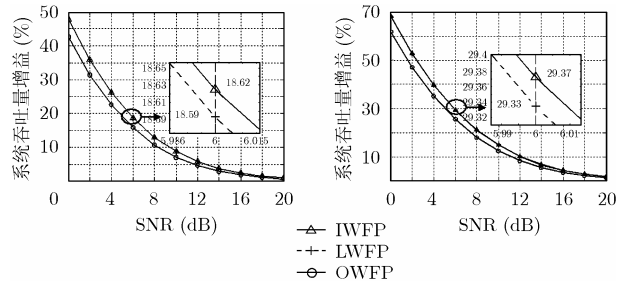


图 1  $\text{BER} = 10^{-3}$  时系统吞吐量增益与平均 SNR 的关系 图 2  $\text{BER} = 10^{-5}$  时系统吞吐量增益与平均 SNR 的关系

从上述两图中可以看出,同等条件下,线性注水算法的吞吐量增益完全逼近迭代注水算法,在低 SNR 时比平均功率分配算法有明显吞吐量提高,在高 SNR 时平均功率分配算法已逼近迭代注水算法。开关注水算法由于在选用子载波中采用平均功率分配,因此吞吐量增益相比迭代注水算法略有损失,但在低 SNR 时同样有明显的吞吐量增益。图 2 中  $\text{BER} = 10^{-5}$  时的吞吐量增益高于图 1 中  $\text{BER} = 10^{-3}$  时的吞吐量增益。

线性注水算法是一种注水效果很好的功率分配算法,但相比迭代注水算法需多次迭代运算,线性迭代注水算法在执行前需将子载波状态进行排序。因此对于单用户系统线性注水算法与迭代注水算法没有运算量上的优势,甚至随着  $N$  的增大,运算量还明显高于迭代注水算法。但对于多用户系统,在功率分配前已完成了子载波向用户的分配,在同一个用户内部,所有子载波是按降序分配的,可以直接执行线性注水算法,此时与迭代注水算法的多次迭代相比就有了运算量上的优势。

## 6 结束语

本文研究 OFDMA 系统资源调度中的功率分配问题,通过对已有功率分配算法的研究,提出了线性运算量的注水算法,其吞吐量性能与迭代注水算法基本相当,多用户系统在完成子载波和功率到用户的分配后,采用这种线性功率分配算法在用户内部完成子载波的功率分配,其运算量小,并且不会改变用户间的公平性能。当然,本文并没有考虑比特加载的实现问题,下一步将结合自适应调制技术,考虑功率的按级分配问题,以形成完整的资源分配算法。

## 参考文献

- [1] Knopp R and Humblet P. Information capacity and power control in single cell multiuser communications. in Proc. IEEE International Conference on Communications (ICC'95), Seattle, USA, June 1995: 331-335.

- [2] Jang J and Lee K B. Transmit power adaptation for multiuser OFDM systems. *IEEE J. on Selected Areas in Communications*, 2003, 21(2): 171–178.
- [3] Jang J, Lee K B, and Lee Y H. Transmit power and bit allocations for OFDM systems in a fading channel. in Proc. IEEE Global Communications Conference, San Francisco, CA, Dec. 2003: 283–288.
- [4] Wong I C, Shen Z k, and Evans B L, *et al.* A low complexity algorithm for proportional resource allocation in OFDMA systems. IEEE International Signal Processing Systems Workshop, Oct 13–15, 2004: 1–6.
- [5] Shen Z, Andrews J G, and Evans B L. Optimal power allocation in multiuser OFDM systems. in Proc. IEEE Global Communications Conference, San Francisco, CA, Dec. 2003: 337–341.
- [6] Goldsmith A J and Chua S G. Variable-rate variable-power MQAM for fading channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 1997, 45(10): 1218–1230.
- [7] 杨大成. 移动传播环境. 北京: 机械工业出版社, 2003.
- 张冬梅: 女, 1972 年生, 讲师, 硕士, 主要研究方向为移动通信、无线资源管理等.
- 徐友云: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为移动通信、战术无线通信网、信道编码与调制、网络信息论、B3G 移动通信技术等.
- 蔡跃明: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为下一代移动通信.