

## 扩展目标跟踪Student's t逆Wishart平滑算法

陈辉<sup>\*①</sup> 张丁丁<sup>①</sup> 连峰<sup>②</sup> 韩崇昭<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(兰州理工大学电气工程与信息工程学院 兰州 730050)

<sup>②</sup>(西安交通大学自动化科学与工程学院 西安 710049)

**摘要:** 脉冲干扰和离群量测信息等因素通常会导致异常的厚尾噪声, 这使得以高斯假设为前提的扩展目标跟踪(ETT)估计器的性能急剧降低, 针对该问题该文提出一种基于扩展目标随机矩阵模型(RMM)的Student's t逆Wishart平滑(StIWS)算法。首先, 将目标的运动状态以及过程噪声和量测噪声建模为Student's t分布以表征异常噪声对扩展目标概率分布的影响, 将目标扩展状态建模为服从逆Wishart分布的随机矩阵。然后, 在Student's t贝叶斯平滑框架下, 详细推导了能在扩展目标的多重特征动态演变的过程中有效估计目标状态的StIWS算法。最后, 通过扩展目标跟踪的仿真实验结果和真实场景实验结果验证了所提算法的有效性。

**关键词:** 扩展目标跟踪; Student's t平滑; 逆Wishart分布; 厚尾噪声

中图分类号: TN911.7; TP274

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2024)YU-0001-10

DOI: 10.11999/JEIT231145

## Student's t Inverse Wishart Smoothing Algorithm for Extended Target Tracking

CHEN Hui<sup>①</sup> ZHANG Dingding<sup>①</sup> LIAN Feng<sup>②</sup> HAN Chongzhao<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(School of electrical engineering and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

<sup>②</sup>(School of Automation Science and Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** Elements such as pulse interference and outlier measurement information usually lead to abnormal heavy-tailed noise, which sharply reduces the performance of the Extended Target Tracking (ETT) estimator based on the Gaussian hypothesis. To address this problem, a Student's t Inverse Wishart Smoothing (StIWS) algorithm based on the Random Matrix Model (RMM) is proposed. Firstly, the kinematic state of the target, process noise and measurement noise are modeled as a Student's t distribution to characterize the effect of anomalous noise on the probability distribution of extended target, and the extended state of target is modeled as a random matrix which obeys inverse Wishart distribution. Then, in a Student's t bayesian smoothing frame, the StIWS algorithm is derived in detail, which can effectively estimate target state in the process of the dynamic evolution of multiple characteristics of extended target. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is verified by the simulation experiment and the engineering experiment of extended target tracking.

**Key words:** Extended target tracking; Student's t smoothing; Inverse wishart distribution; Heavy-tailed noise

### 1 引言

随着传感器分辨率的不断提高, 利用动态目标

表面呈现空间结构分布的散射中心提取形状等状态信息的扩展目标跟踪 (Extended Target Tracking, ETT)成为现代工程应用领域中不可或缺的关键性技术<sup>[1-7]</sup>。作为目标状态估计的重要工具, 贝叶斯平滑算法可以充分融合量测信息, 进而实现对期望最大化算法的最优逼近<sup>[8-10]</sup>。因此, 能够同时精确估计目标位置和形状轮廓的扩展目标平滑算法具有极其重要的研究意义。

然而, 在很多实际的工况场景中, 量测值异常、目标机动以及模型线性化误差掺杂等现象频发很容易导致系统的过程噪声和量测噪声的分布特性呈现出明显的“厚尾特性”, 从而给高斯噪声假设

收稿日期: 2023-10-24; 改回日期: 2024-01-24; 网络出版: 2024-02-26

\*通信作者: 陈辉 huich78@hotmail.com

基金项目: 国家自然科学基金(62163023, 62366031, 62363023, 61873116), 甘肃省教育厅产业支撑计划项目(2021CYZC-02), 2023年甘肃省军民融合发展专项资金项目, 2024年甘肃省重点人才项目  
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (62163023, 62366031, 62363023, 61873116), Gansu Province Education Department Industrial Support Project (2021CYZC-02), Special Fund Project for Civil-Military Integration Development of Gansu Province in 2023, Key Talent Project of Gansu Province in 2024

下的平滑算法性能带来难以忽视的不利影响<sup>[11-14]</sup>。目前,这类问题主要有3种处理方法:第1种方法利用鲁棒统计量加强非高斯噪声下平滑算法的鲁棒性<sup>[15,16]</sup>;第2种方法以最大相关熵判据或最小误差熵判据作为代价函数,进而达到抑制非高斯噪声“厚尾特性”的目的<sup>[17,18]</sup>;第3种方法利用服从厚尾分布的厚尾噪声有效表征非高斯噪声<sup>[19-23]</sup>。因前两种方法处理厚尾噪声的能力受限于高斯假设的前提,又考虑到Student's t分布可以很好地模拟厚尾噪声,文献<sup>[24]</sup>提出一种基于Student's t分布的贝叶斯平滑算法,但该算法遗漏了一些潜在的修正项。Huang等人<sup>[13,21]</sup>提出了对厚尾噪声具有鲁棒性的Student's t容积分平滑算法,但该方法重复使用矩匹配,可能带来近似Student's t密度过窄等不良影响。此外,用于厚尾噪声下点目标跟踪的状态平滑估计已经在很多文献中得到广泛讨论,但深入研究厚尾噪声下扩展目标状态平滑的文献却寥寥无几<sup>[9,25]</sup>。综上,现有Student's t平滑算法存在修正项遗漏,矩匹配过度使用,以及无法精确估计目标形状等亟待解决的问题。

平滑估计扩展目标的状态,需要选择合适的目标扩展模型对目标表面不同的散射中心分布状况进行描述。常见的目标扩展模型分为两类,其中一类包括用于星凸型扩展目标量测源建模的随机超曲面模型(Random Hypersurface Model, RHM)<sup>[26]</sup>和高斯过程回归模型(Gaussian Process Regression Model, GPRM)<sup>[27]</sup>,以及用于非星凸型扩展目标跟踪的水平集随机超曲面模型(Level-set RHM)<sup>[28]</sup>;另一类形状扩展模型以随机矩阵模型(Random Matrix Model, RMM)<sup>[29,30]</sup>为代表,将扩展目标的形状近似为椭圆。RHM, GPRM和Level-set RHM等针对星凸形和非星凸形扩展目标的形状建模方法对量测的质量和数目提出了更高的要求,当从扩展目标表面获得的量测数量较少时,这些模型的性能会大幅下降。由于现实环境中雷达等传感器获得的量测集较为稀疏,所以能够利用稀疏量测集有效提取扩展目标基本轮廓特征的RMM在扩展目标跟踪中适应性更强<sup>[31,32]</sup>。

有鉴于此,本文提出一种新的Student's t平滑算法,利用Student's t分布为扩展目标的运动状态、过程噪声以及量测噪声建模,同时鉴于RMM的简易性和通用性,利用逆Wishart分布为形状扩展状态建模,运用贝叶斯递推获得能够同时估计扩展目标运动状态和扩展状态的Student's t逆Wishart平滑(Student's t Inverse Wishart Smoothing, StIWS)算法。最后,通过仿真实验结果和真实场景实验结果验证了所提平滑算法在厚尾噪声系统中的有效性。

## 2 系统建模

令 $\xi_k$ 表示 $k$ 时刻的扩展目标状态, $\mathbf{Z}_k$ 表示 $k$ 时刻的量测集,并令 $\mathbf{Z}_{1:k}$ 表示从初始时刻到 $k$ 时刻的所有量测的集合。在随机矩阵模型中,扩展目标状态表示为 $\xi_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) \in R^{n_x} \times S_{++}^d$ ,向量 $\mathbf{x}_k \in R^{n_x}$ 表示目标的位置及运动特性(如速度和方向);矩阵 $\mathbf{X}_k \in S_{++}^d$ 表示目标的扩展,其中 $d$ 为目标形状扩展的维度。若对称正定矩阵 $\mathbf{X}_k$ 服从自由度参数为 $\nu$ ,参数矩阵为 $\mathbf{V}$ 的逆Wishart分布,则其概率密度函数可表示为 $p(\mathbf{X}_k) = \text{IW}(\mathbf{X}_k; \nu, \mathbf{V})$ 。

### 2.1 Student's t分布

设均值为 $\mu$ ,尺度矩阵为 $\Sigma$ ,自由度参数为 $\nu$ 的随机变量 $\rho$ 服从Student's t分布,并利用 $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示高斯分布, $\mathcal{G}(\cdot)$ 表示伽马分布, $\varpi$ 表示服从伽马分布的潜在变量,则 $\rho$ 的概率密度可表示为

$$p(\rho) = \text{ST}(\rho; \mu, \Sigma, \nu) = \int \mathcal{N}\left(\rho; \mu, \frac{1}{\varpi} \Sigma\right) \mathcal{G}\left(\varpi; \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) d\varpi \quad (1)$$

需注意的是,当 $\nu \rightarrow \infty$ 时,伽马密度趋于狄拉克脉冲,这将导致 $\text{ST}(\rho; \mu, \Sigma, \nu)$ 收敛于 $\mathcal{N}(\rho; \mu, \Sigma)$ <sup>[33]</sup>。

### 2.2 状态空间模型

可将线性状态空间建模为

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{F}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} \quad (2a)$$

$$\mathbf{z}_k = (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k \quad (2b)$$

其中, $\mathbf{x}_k$ 是 $k$ 时刻的 $n_x$ 维运动状态向量; $\mathbf{z}_k$ 是 $k$ 时刻的 $d_z$ 维量测, $k$ 时刻的量测个数 $q_k$ 服从均值为 $\lambda$ 的泊松分布; $\mathbf{F}_{k|k-1}$ 是状态转移矩阵; $\mathbf{H}_k$ 表示量测矩阵; $\mathbf{I}_d$ 为 $d \times d$ 维单位矩阵; $\otimes$ 为克罗内克积; $\mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{e}_k$ 分别是均值为零的过程噪声和量测噪声。设 $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{e}_k$ 相互独立且服从Student's t分布

$$p(\mathbf{x}_0) = \text{ST}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{0|0}, \mathbf{P}_0, \eta_0) \quad (3a)$$

$$p(\mathbf{u}_k) = \text{ST}(\mathbf{u}_k; 0, \mathbf{Q}_k, \gamma) \quad (3b)$$

$$p(\mathbf{e}_k) = \text{ST}(\mathbf{e}_k; 0, \varepsilon \mathbf{X}_k + \mathbf{R}_k, \delta) \quad (3c)$$

其中,缩放因子 $\varepsilon$ 表示目标形状扩展对量测分布情况的影响程度。

对于似然函数的联合密度有

$$p(\mathbf{Z}_k, q_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = p(\mathbf{Z}_k | q_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) p(q_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) \quad (4)$$

假设量测独立,可获得如式(5)所示的量测Student's t似然表达式

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{Z}_k | q_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) \\
& \propto \text{ST} \left( \mathbf{z}_k; (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_k, \frac{\varepsilon \mathbf{X}_k + \mathbf{R}_k}{q_k}, \delta \right) \\
& \quad \times \text{LW}(\bar{\mathbf{Z}}_k; q_k - 1, \varepsilon \mathbf{X}_k + \mathbf{R}_k) \quad (5)
\end{aligned}$$

其中,  $z_k^j$  表示  $k$  时刻的第  $j$  个量测,  $\text{LW}(\bar{\mathbf{Z}}_k; q_k - 1, \varepsilon \mathbf{X}_k + \mathbf{R}_k)$  正比于自由度为  $q_k - 1$  的Wishart分布。量测质心和对应的散射矩阵为

$$\mathbf{z}_k = \frac{1}{q_k} \sum_{j=1}^{q_k} \mathbf{z}_k^j, \bar{\mathbf{Z}}_k = \sum_{j=1}^{q_k} (\mathbf{z}_k^j - \mathbf{z}_k) (\mathbf{z}_k^j - \mathbf{z}_k)^T \quad (6)$$

### 3 Student's t逆Wishart滤波

Student's t平滑之前, 需要先得到扩展目标状态的预测和滤波结果, 进而通过向后递归获得StIWS算法。StIWS算法推理基于一些在很多真实场景中都适用的条件假设。

**假设1** 目标扩展状态的时间演变独立于目标的运动状态, 即

$$p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) \approx p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{X}_k) \quad (7)$$

**假设2** 目标形状扩展的变化是随着时间缓慢发生的, 即

$$\mathbf{X}_k \approx \mathbf{A} \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}^T \quad (8)$$

其中,  $d \times d$  维可逆参数矩阵  $\mathbf{A}$  总结了目标扩展状态时间更新时发生所有的变化。

**假设3** 扩展目标的运动状态转移过程是马尔可夫过程, 即

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \quad (9)$$

#### 3.1 预测过程

根据式(7)–式(9), 可将预测密度表示为

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) \\
&\quad \times p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) \\
&= \text{ST}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1} \\
&\quad \otimes \mathbf{X}_k, \eta_{k-1}) \\
&\quad \times \text{IW}(\mathbf{X}_k; v_{k|k-1}, \mathbf{X}_{k|k-1}) \quad (10)
\end{aligned}$$

其参数为

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = (\mathbf{F}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_{k-1|k-1} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k-1} &= \frac{(U_k - 2) \eta_{k-1}}{U_k (\eta_{k-1} - 2)} \\
&\quad \cdot (\mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k|k-1}^T + \mathbf{D}_{k|k-1}) \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{k|k-1} &= d + 1 + \left( 1 + \frac{v_{k-1|k-1} - 2d - 2}{n_{k-1}} \right)^{-1} \\
&\quad \cdot (v_{k-1|k-1} - d - 1) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_{k|k-1} = \left( 1 + \frac{v_{k-1|k-1} - d - 1}{n_{k-1} - d - 1} \right) \mathbf{A} \mathbf{X}_{k-1|k-1} \mathbf{A}^T \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{D}_{k|k-1}$  是质心运动过程噪声参数,  $U_k = \min(\eta_{k-1}, \gamma)$ 。自由度  $n_{k-1} \geq d$  表示目标扩展状态时间转移的不确定性。

#### 3.2 更新过程

结合量测似然函数的分解运算求取似然函数和预测密度的乘积, 进而获得滤波密度

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{Z}_k | q_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) \\
& \propto \text{ST}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k, \eta_k) \\
& \quad \times \text{IW}(\mathbf{X}_k; v_{k|k}, \mathbf{X}_{k|k}) \quad (15)
\end{aligned}$$

其中

$$\eta_k = \min(U_k, \delta) + dz \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + (\mathbf{K}_k \otimes \mathbf{I}_d) (\mathbf{z}_k - (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_{k|k-1}) \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \frac{U_k + \Delta_z^2}{U_k + dz} (\mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{K}_k^T) \quad (18)$$

$$v_{k|k} = v_{k|k-1} + q_k \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_{k|k} = \mathbf{X}_{k|k-1} + \mathbf{N}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Z}}_k \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{k|k-1} &= \mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{z}_k - (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_{k|k-1}) \\
&\quad \cdot (\mathbf{z}_k - (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_{k|k-1})^T \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_z^2 &= (\mathbf{z}_k - (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_k)^T \\
&\quad \cdot \mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{z}_k - (\mathbf{H}_k \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_k) \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + 1/q_k \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} \quad (24)$$

### 4 Student's t逆Wishart平滑算法

根据第2节给出的扩展目标状态和厚尾噪声的基本建模, 并利用第3节得到的Student's t逆Wishart预测和滤波结果, 本节对用于异常噪声下椭圆扩展目标跟踪的StIWS算法进行了详细推导。

扩展目标状态的平滑概率密度为

$$p(\xi_k | \mathbf{Z}_{1:K}) = \int p(\xi_k, \xi_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:K}) d\xi_{k+1} \quad (25a)$$

$$= \int p(\xi_k | \xi_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k}) p(\xi_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:K}) d\xi_{k+1} \quad (25b)$$

$$= p(\xi_k | \mathbf{Z}_{1:k}) \int \frac{p(\xi_{k+1} | \xi_k) p(\xi_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:K})}{p(\xi_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:k})} d\xi_{k+1} \quad (25c)$$

其中 $K$ 是最后的时间步。

首先, 利用最终的滤波结果 $\mathbf{x}_{K|K}$ ,  $\mathbf{P}_{K|K}$ ,

$v_{K|K}$ 和 $\mathbf{X}_{K|K}$ 对贝叶斯平滑进行初始化。

对于式(25b)中的积分核函数 $p(\xi_k | \xi_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k})$ 有

$$\begin{aligned} p(\xi_k | \xi_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k}) &= p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k}) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k})}{\int p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k}) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k} \\ &= \frac{p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_{k+1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k})}{\int p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_{k+1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k}) d\mathbf{x}_k} \times \frac{p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k})}{\int p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) d\mathbf{X}_k} \end{aligned} \quad (26)$$

将式(26)带入式(25), 可将平滑密度表示为

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:K}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K}) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:K}) \quad (27)$$

由此可见, 平滑密度的目标运动状态部分和形状扩展部分可以分开讨论。

#### 4.1 目标运动状态平滑

目标运动状态平滑的概率密度函数形式为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K}) = \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K}) d\mathbf{x}_{k+1} \quad (28a)$$

$$= \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k}) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K}) d\mathbf{x}_{k+1} \quad (28b)$$

式(28b)密度积中的第1个因子(即积分函数核)可以通过求取联合预测Student's t密度 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k})$ 的条件密度得到。牺牲 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k})$ 和 $p(\mathbf{u}_k)$ 之间的独立性, 可将联合预测Student's t密度表示为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:k}) &= \text{ST} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k|k} \\ \mathbf{x}_{k+1|k} \end{bmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k+1|k} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{X}_k, \eta'_k \right) \end{aligned} \quad (29)$$

根据Student's t密度的定义式(1)可知, 自由度参数会随着滤波迭代递增, 这将导致状态分布和噪声分布逐渐收敛于高斯分布。为避免厚尾特性的消失, 可令 $\eta'_k = U_{k+1}$ , 预测密度 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k})$ 的修正参数如式(11)、式(12)所示。给定 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k})$ 后, 可以得到条件概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k})$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k}) = \text{ST} \left( \mathbf{x}_k; \tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{P}}_k \otimes \mathbf{X}_k, \tilde{\eta}_k \right) \quad (30)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_{k|k} + (\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{I}_d) (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k}) \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}'_k = \mathbf{P}_{k|k} - \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_k^T \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_k &= \frac{\eta'_k + (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k})^T \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k})}{\eta'_k + n_{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{P}}'_k \\ &= \tilde{\eta}_k = \eta'_k + n_{\mathbf{x}} = \min(\eta_k, \gamma) + n_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{\eta}_k = \eta'_k + n_{\mathbf{x}} = \min(\eta_k, \gamma) + n_{\mathbf{x}} \quad (34)$$

平滑增益矩阵为 $\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1}$ ,  $n_{\mathbf{x}}$ 为 $\mathbf{x}_{k+1}$ 的维度, 参数 $\mathbf{P}_{k|k}$ ,  $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 和 $\eta_k$ 由之前运行的Student's t逆Wishart滤波器 (Student's t Inverse Wishart Filter, StIWF) 提供。

对于式(28b)密度积中的第2个因子, 可假设 $k+1$ 时刻的平滑密度为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:K}) &= \text{ST} \left( \mathbf{x}_{k+1}; \mathbf{x}_{k+1|K}, \mathbf{P}_{k+1|K} \otimes \mathbf{X}_k, \eta_{k+1|K} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

此时应选择合适的自由度, 使得式(30)和式(35)可以分别通过对联合Student's t密度 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K})$ 的条件作用和边缘化获得, 因此可以令 $\eta_{k+1|K} = \eta'_k$ 。在线性Student's t状态空间模型中, 式(30)和式(35)的乘积形成式(28a)中的联合Student's t密度 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K})$ , 联合Student's t密度的 $\mathbf{x}_k$ 参数即为平滑结果。利用联合Student's t分布与条件Student's t分布的相关性质, 并结合式(30)一式(35), 可将联合平滑Student's t密度表示为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K}) &= \text{ST} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1|K} \\ \mathbf{x}_{k|K} \end{bmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k+1|K} & \mathbf{P}_{k+1|K} \mathbf{G}_k^T \\ \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k+1|K} & \mathbf{P}_{k|K} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{X}_k, \eta'_k \right) \end{aligned} \quad (36)$$

参考文献[34]可知, 关于 $\mathbf{x}_k$ 的边缘概率密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K})$ 保留了联合平滑Student's t密度的自由度参数 $\eta'_k$ 。式(36)关于 $\mathbf{x}_{k+1}$ 积分即可得到平滑密度

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:K}) = \text{ST} \left( \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|K}, \mathbf{P}_{k|K} \otimes \mathbf{X}_k, \eta_{k|K} \right) \quad (37)$$

其参数为

$$\mathbf{x}_{k|K} = \mathbf{x}_{k|k} + (\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{I}_d) (\mathbf{x}_{k+1|K} - \mathbf{x}_{k+1|k}) \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k' = \mathbf{P}_{k|k} - \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_k^T \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k = \frac{\eta_k' + (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k})^T \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k})}{\eta_k' + n_x} \tilde{\mathbf{P}}_k' \quad (40)$$

$$\mathbf{P}_{k|K} = \tilde{\mathbf{P}}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k+1|K} \mathbf{G}_k^T \quad (41)$$

$$\eta_k' = \min(\eta_k, \gamma) \quad (42)$$

$$\eta_{k|K} = \min(\eta_{k+1|K}, \eta_k') \quad (43)$$

其中，为了获得较为精确的平滑结果，可令式(40)中的 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k+1}$ 。

## 4.2 形状扩展平滑

形状扩展状态的平滑概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:K}) &= \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k}) \\ &\quad \cdot p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:K}) d\mathbf{X}_{k+1} \\ &= p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) \\ &\quad \times \int \frac{p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:K})}{p(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{Z}_{1:k})} \\ &\quad \cdot d\mathbf{X}_{k+1} \end{aligned} \quad (44)$$

为求解式(44)，需引入引理2，引理3。

### 引理2

$$\begin{aligned} &\int W(\mathbf{X}; v, \mathbf{V}) IW(\mathbf{X}; w, \mathbf{V}) d\mathbf{V} \\ &= \text{GB}^{\text{II}}\left(\mathbf{X}; \frac{v}{2}, \frac{w-d-1}{2}, \mathbf{W}, \mathbf{O}_{d \times d}\right) \end{aligned} \quad (45)$$

其中： $W(\cdot)$ 表Wishart分布， $\text{GB}^{\text{II}}(\cdot)$ 表广义贝塔二型分布， $\mathbf{O}_{d \times d}$ 为 $d \times d$ 维零矩阵， $\mathbf{X}$ 为 $d \times d$ 维矩阵， $\frac{v}{2}$ 和 $\frac{w-d-1}{2}$ 为标量参数， $\mathbf{W}$ 为参数矩阵。

**引理3** 通过匹配期望值 $E[\mathbf{X}]$ 和 $E[\mathbf{X}^{-1}]$ ，可以获得如式(46)的近似

$$\begin{aligned} &\text{GB}^{\text{II}}\left(\mathbf{X}; \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \mathbf{A}, \mathbf{O}_{d \times d}\right) \\ &\approx IW(\mathbf{X}; v, \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (46)$$

其中， $v = \frac{(a+d+1)(b+d+1) - 2(d+1)^2}{a+b-d-1}$ ， $\mathbf{V} = \frac{(a-d-1)a}{a+b-d-1} \mathbf{A}$ 。

根据引理2和引理3，并结合Wishart概率密度函数和逆Wishart概率密度函数的定义，对式(44)进行推导计算，可获得服从逆Wishart分布的形状扩展状态平滑密度

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:K}) = IW(\mathbf{X}_k; v_{k|K}, \mathbf{X}_{k|K}) \quad (47)$$

相应的平滑逆Wishart参数为

$$v_{k|K} = v_{k|k} + \omega_k^{-1} \left( v_{k+1|K} - v_{k+1|k} - \frac{2(d+1)^2}{n_k} \right) \quad (48)$$

$$\mathbf{X}_{k|K} = \mathbf{X}_{k|k} + \eta^{-1} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_{k+1|K} - \mathbf{X}_{k|k}) \mathbf{A}^{-T} \quad (49)$$

$$\omega_k = 1 + \frac{v_{k+1|K} - v_{k|k} - 3(d+1)}{n_k} \quad (50)$$

综上，对联合平滑概率密度函数有

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:K}) &= \text{ST}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|K}, \mathbf{P}_{k|K} \otimes \mathbf{X}_k, \eta_{k|K}) \\ &\quad \times IW(\mathbf{X}_k; v_{k|K}, \mathbf{X}_{k|K}) \end{aligned} \quad (51)$$

其中，贝叶斯平滑后的扩展目标运动状态参数由式(38)—式(43)给出，形状扩展参数由式(48)—式(50)给出。

## 5 实验分析论证

### 5.1 仿真场景构建

通过与经典的高斯逆Wishart滤波器 (Gaussian Inverse Wishart Filter, GIWF)、高斯逆Wishart平滑器 (Gaussian Inverse Wishart Smoother, GIWS)以及StIWF进行对比，验证本文所提StIWS算法在厚尾噪声条件下跟踪扩展目标的有效性和优越性。该实验采用匀速运动模型，目标运动状态向量 $\mathbf{x}_k = [p_k^x, p_k^y, v_k^x, v_k^y]^T$ ，其中 $\mathbf{p}_k$ 表示 $k$ 时刻的质心位置， $\mathbf{v}_k$ 表示 $k$ 时刻的质心速度；参数矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{I}_d$ ，目标运动状态向量的维度 $n_x = 4$ ，扩展状态的维度 $d = 2$ ，采样时间 $T = 1$ ，总的采样次数 $N = 100$ 。系统模型参数为

$$\mathbf{F}_k = [1, T; 0, 1] \quad (52)$$

$$\mathbf{D}_k = \sigma_a^2 [T^4/4, T^3/2; T^3/2, T^2] \quad (53)$$

$$\mathbf{H}_k = [1 \ 0] \quad (54)$$

其中，加速度 $\sigma_a = 0.1$ 。

目标动力学过程噪声和过程噪声输入阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_a &= \begin{bmatrix} \sigma_a^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & T^2/2 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

其中，转角率 $\sigma_w = 0$ ，过程噪声协方差阵为 $\mathbf{Q} = \mathbf{G} \mathbf{Q}_a \mathbf{G}^T$ 。



令目标扩展的主轴与目标的速度矢量对齐, 椭圆主轴与横坐标轴的正向夹角 $\theta_k$ 表示扩展目标的方向。在每个时间步 $k$ , 通过采样检测概率 $P_D$ 来模拟检测过程, 即检测到目标的概率为 $P_D$ , 设置 $P_D = 0.85$ 。设置 $\lambda = 10$ 。

## 5.2 仿真实验

设扩展目标是短轴为20 m, 长轴为50 m的椭圆。 $n_k = 100$ , 目标初始运动状态向量为 $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 140, 80]^T$ , 初始协方差函数为 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}[10^2, 10^2, 50^2, 50^2]^T$ 。目标初始方向为0, 方向的初始协方差为 $\pi/180$ , 方向随时间变化且可手动调整, 最大转弯率设为 $\pi/18$ 。扩展状态的参数初始化为: $v_0 = 7, \mathbf{X}_0 = \text{diag}[5^2, 12.5^2]^T$ 。此外, 为保护Student's t分布的厚尾特性, 将自由度参数 $(\eta_0, \gamma, \delta)$ 皆设置为3。

根据式(56)生成厚尾过程噪声和量测噪声

$$\mathbf{u}_k \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}), & \text{w.p.} 0.85 \\ \mathcal{N}(0, 1 \times 10^5 \mathbf{Q}), & \text{w.p.} 0.15 \end{cases} \quad (56a)$$

$$\mathbf{e}_k \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \mathbf{R}), & \text{w.p.} 0.9 \\ \mathcal{N}(0, 1 \times 10^3 \mathbf{R}), & \text{w.p.} 0.1 \end{cases} \quad (56b)$$

其中,  $\mathbf{R} = \text{diag}([1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-8}]^T)$ 。式(56a)表示过程噪声有15%来自协方差为 $1 \times 10^5 \mathbf{Q}$ 的高斯噪声。

利用StIWS, GIWS, StIWF以及GIWF对扩展目标进行跟踪, 并选用均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)和高斯瓦瑟斯坦距离(Gaussian Wasserstein Distance, GWD)<sup>[35,36]</sup>评估4种算法的估计性能。图1为100次蒙特卡罗仿真实验后得到的分别利用4种算法跟踪扩展目标的轨迹图。为了能够更清晰对4种估计器跟踪扩展目标时的精度进行对比, 图2给出了图1跟踪轨迹初始时段(图2(a))、中间时段(图2(b))以及终止时段(图2(c))的放大图。

通过对图2的观察可以看出, 由于运动学初始先验信息未知, 各算法在初始时刻对目标的位置估

计不够精确。随着时间迭代, StIWS对目标运动状态的估计精度稳步提高, 并在第3个时间步实现了对目标位置的精确估计。在中间时段和终止时段, 尤其是因厚尾噪声的存在使扩展目标发生机动时, 相较于GIWS, StIWF以及GIWF, StIWS可更为稳定地对扩展目标的运动状态和形状扩展状态进行跟踪估计, 表现出对复杂噪声更好的抗干扰性。

由于4种估计器之间的细微差别难以通过直接观察获得, 因此需利用度量尺标进行性能评价。图3、图4和图5分别利用100次蒙特卡罗仿真后的质心位置、形状长短轴以及方向的均方根误差衡量4种跟踪算法对目标状态的估计精度。

由图3、图4和图5可以看出StIWS对目标位置, 形状扩展以及方向的估计在总体上最为精确, GIWF对目标形状扩展和方向的跟踪效果在总体上最差。图3、图4和图5分别评测了目标的运动状态, 形状扩展状态以及方向的跟踪性能, 均没有实现对算法性能的综合评价。文献[35]通过对6种度量方法的比较研究, 表明在跟踪估计椭圆形状的扩展目标时, GWD度量是最优的性能评估指标, 可同时衡量算法的运动状态估计精度和形状扩展估计精度。

为了量化评估4种扩展目标跟踪器的综合性能, 本文给出的图6利用100次蒙特卡罗仿真的GWD统计定量评估4种算法的估计精度。

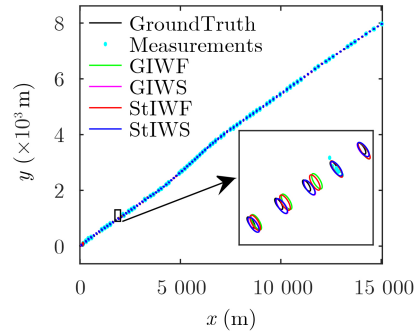


图1 扩展轨迹跟踪图

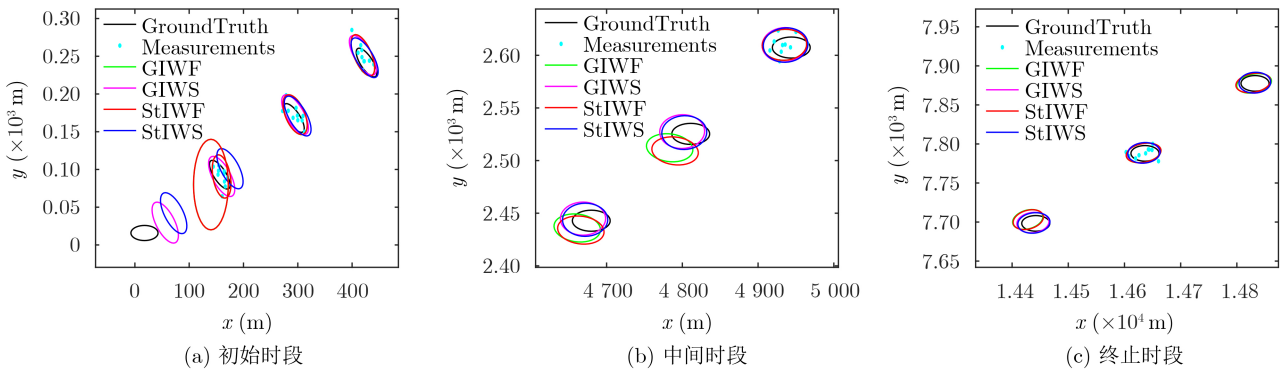


图2 不同时段轨迹跟踪放大图

通过观察图6可知,综合考虑目标质心位置和形状扩展等多重特征后,本文设计的StIWS跟踪椭圆扩展目标时的GWD在总体上低于GIWS, StIWF以及GIWF,且基本维持在一个较为稳定的值域,这表明StIWS相较于其他算法表现出更好的跟踪性能和稳定性。结合图3、图4和图5可以分析得到,目标的运动状态跟踪效果对综合跟踪估计精度的影响较大。

需要注意的是,为清晰地呈现4种算法对扩展目标的跟踪精度,图3和图6的纵轴是对数坐标。

### 5.3 真实场景

本文利用真实量测数据对4种算法进行真实场景下车辆扩展目标跟踪测试。该真实场景利用空中摄像机捕捉移动车辆的图像,每1 s采样1次,总采样周期为105 s。该场景中,目标车辆会发生可被视为过程跳变的机动,即出现了非高斯过程噪声;此外,目标车辆在运动过程中的某些时刻受到了树枝和树叶的遮挡,这将导致量测值的异常。这些现象频发会导致过程噪声和量测噪声的分布特性呈现出明显的“厚尾特性”。获得监控区域内的图像

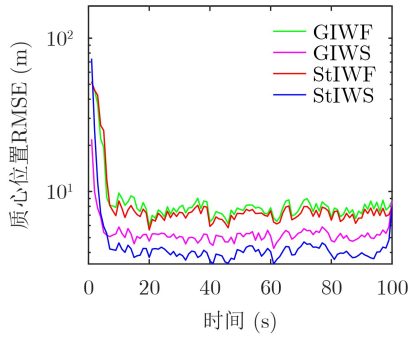


图3 质心位置均方根误差

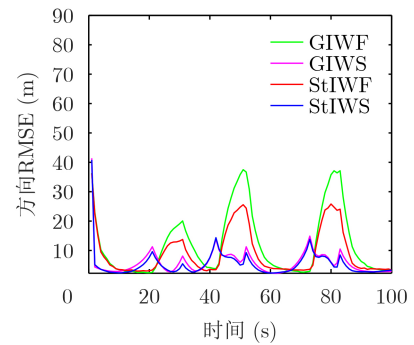


图5 方向均方根误差

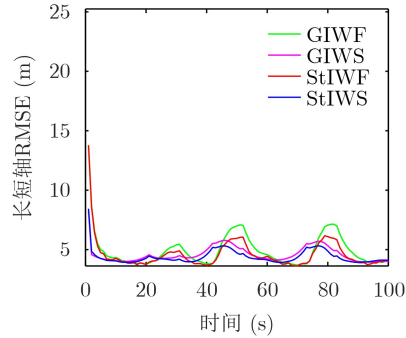


图4 长短轴均方根误差

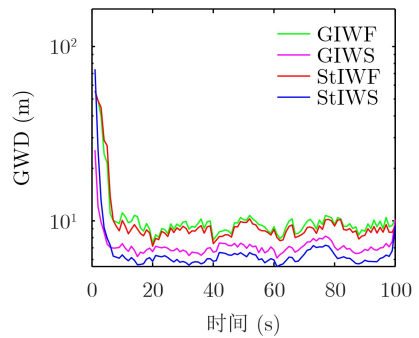
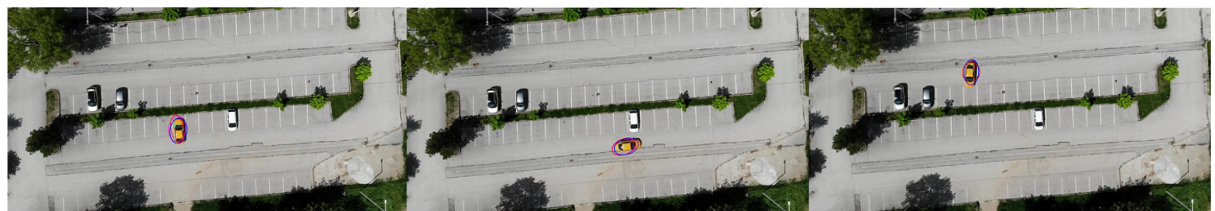


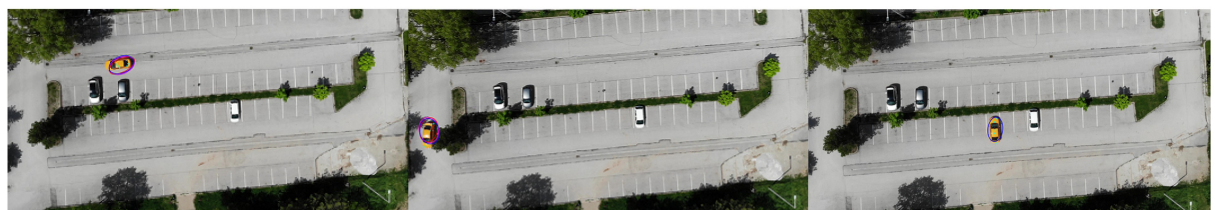
图6 GWD评估结果



(a) 第2时刻

(b) 第15时刻

(c) 第45时刻



(d) 第75时刻

(e) 第85时刻

(f) 第105时刻

— GIWF — GIWS — StIWF — StIWS • Measurements

图7 不同时刻跟踪图

后,可利用特征提取算法处理图像以提取车辆的量测信息<sup>[37,38]</sup>。本文通过对属于黄色车辆的像素(车辆的可见表面,见图7)进行均匀采样以获得量测信息<sup>[39]</sup>。

真实场景中目标状态变量在初始时刻的先验均值,都可通过对第1帧图像中提取到的量测信息进行处理而获得赋值。假设初速度为0,将所有跟踪器初始运动状态向量的均值和协方差分别设为 $\mathbf{x}_0 = [450, 245, 0, 0, \pi/2]^T$  ( $\pi/2$ 为目标的初始方向)和 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([200, 200, 2500, 2500, \pi/180]^T)$ ,将初始形状参数设为: $v_0 = 7$ 和 $\mathbf{V}_0 = \text{diag}([250, 1000]^T)$ 。算法模型参数,过程噪声和量测噪声的协方差, $\eta_0, \gamma, \delta$ 的设置均与仿真实验相同。

为直观对比算法性能,图7给出了{2,15,45,75,85,105}时刻利用4种算法跟踪估计真实场景中黄色商务车状态的快照。

通过对图7的仔细观察可以看出,车辆最初保持静止状态时(见图7(a)),4种算法都能够较好地估计车辆形状扩展;在第45时刻(见图7(c))车辆执行了一个机动,此时本文提出的StIWS在跟踪黄色小车的形状扩展方面呈现出更优越的性能;在第75时刻(见图7(d)),车辆做直线匀速运动,StIWS和经典GIWF都表现出较好的跟踪效果;在第85时刻(见图7(e)),树叶遮挡了车辆的部分特征,但是平滑算法依然实现了对车辆有效的跟踪估计。在扩展目标发生机动或遮挡存在等复杂的不确定性环境下,StIWS依然呈现出更优异的跟踪效果,这是因为StIWS的Student's t分布对异常噪声具有很好的包容性,将目标运动状态以及过程噪声和量测噪声建模为Student's t分布可实现对真实场景实验中目标及噪声特性的有效表征;当车辆的运动较为稳定时,4种算法都能够较为准确地估计目标的运动状态和形状轮廓,这也与5.2节中的仿真实验结果相吻合。

## 6 结论

本文提出一种用于扩展目标跟踪的Student's t逆Wishart平滑算法,并通过丰富的实验验证了本算法在复杂环境下的实用性、有效性和抗干扰性。

## 参考文献

- [1] WANG Yi, CHEN Xin, GONG Chao, *et al.* Non-ellipsoidal infrared group/extended target tracking based on Poisson multi-Bernoulli mixture filter and B-spline[J]. *Remote Sensing*, 2023, 15(3): 606. doi: [10.3390/rs15030606](#).
- [2] GRANSTROM K, BAUM M, and REUTER S. Extended object tracking: Introduction, overview, and applications[J]. *Journal of Advances in Information Fusion*, 2017, 12(2): 139–174.
- [3] 陈辉, 曾文爱, 连峰, 等. 水平集高斯过程的非星凸形扩展目标跟踪算法[J]. *电子与信息学报*, 2023, 45(10): 3786–3795. doi: [10.11999/JEIT220997](#).
- [4] LI Qinlei, SONG Liping, and ZHANG Yongquan. Multiple extended target tracking by truncated JPDA in a clutter environment[J]. *IET Signal Processing*, 2021, 15(3): 207–219. doi: [10.1049/sil2.12024](#).
- [5] ZHANG Desheng, LI Wujun, YANG Shixing, *et al.* Multi-frame track-before-detect for scalable extended target tracking[C]. 2022 25th International Conference on Information Fusion (FUSION), Linköping, Sweden, 2022: 1–8. doi: [10.23919/FUSION49751.2022.9841326](#).
- [6] GRANSTRÖM K, FATEMI M, and SVENSSON L. Poisson multi-Bernoulli mixture conjugate prior for multiple extended target filtering[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(1): 208–225. doi: [10.1109/TAES.2019.2920220](#).
- [7] LI Guchong, LI Gang, and HE You. Distributed GGIW-CPHD-based extended target tracking over a sensor network[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022, 29: 842–846. doi: [10.1109/LSP.2022.3158589](#).
- [8] MEMON S A, KIM W G, PARK M S, *et al.* Rauch-Tung-Striebel smoothing linear multi-target tracking in clutter[J]. *IEEE Access*, 2022, 10: 3007–3016. doi: [10.1109/ACCESS.2021.3134987](#).
- [9] GRANSTRÖM K and BRAMSTÅNG J. Bayesian smoothing for the extended object random matrix model[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(14): 3732–3742. doi: [10.1109/TSP.2019.2920471](#).
- [10] SÄRKKÄ S. Bayesian Filtering and Smoothing[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013: 134–164. doi: [10.1017/CBO9781139344203](#).
- [11] ZHANG Qichun and ZHOU Yuyang. Recent advances in non-Gaussian stochastic systems control theory and its applications[J]. *International Journal of Network Dynamics and Intelligence*, 2022, 1(1): 111–119. doi: [10.53941/ijndi0101010](#).
- [12] WU Hao, CHEN Shuxin, YANG Binfeng, *et al.* Robust derivative-free cubature Kalman filter for bearings-only tracking[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, 39(8): 1865–1870. doi: [10.2514/1.G001686](#).
- [13] HUANG Yulong, ZHANG Yonggang, LI Ning, *et al.* A



- novel robust Student's  $t$ -based Kalman filter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(3): 1545–1554. doi: [10.1109/TAES.2017.2651684](https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2651684).
- [14] XU Dingjie, SHEN Chen, and SHEN Feng. A robust particle filtering algorithm with non-Gaussian measurement noise using student- $t$  distribution[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(1): 30–34. doi: [10.1109/LSP.2013.2289975](https://doi.org/10.1109/LSP.2013.2289975).
- [15] KARLGAARD C D. Nonlinear regression Huber-Kalman filtering and fixed-interval smoothing[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(2): 322–330. doi: [10.2514/1.G000799](https://doi.org/10.2514/1.G000799).
- [16] WANG Hongwei, LI Hongbin, ZHANG Wei, *et al.* Derivative-free Huber-Kalman smoothing based on alternating minimization[J]. *Signal Processing*, 2019, 163: 115–122. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.05.011](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.05.011).
- [17] WANG Guoqing, ZHANG Yonggang, and WANG Xiaodong. Maximum correntropy Rauch-Tung-Striebel smoother for nonlinear and non-Gaussian systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(3): 1270–1277. doi: [10.1109/TAC.2020.2997315](https://doi.org/10.1109/TAC.2020.2997315).
- [18] HE Jiacheng, WANG Hongwei, WANG Gang, *et al.* Minimum error entropy Rauch-Tung-Striebel smoother[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(6): 8901–8914. doi: [10.1109/TAES.2023.3312057](https://doi.org/10.1109/TAES.2023.3312057).
- [19] ARAVKIN A Y, BELL B M, BURKE J V, *et al.* An  $\ell_1$ -laplace robust Kalman smoother[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(12): 2898–2911. doi: [10.1109/TAC.2011.2141430](https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2141430).
- [20] HUANG Yulong, ZHANG Yonggang, LI Ning, *et al.* A robust Student's  $t$  based cubature filter[C]. 2016 19th International Conference on Information Fusion (FUSION), Heidelberg, Germany, 2016: 9–16.
- [21] HUANG Yulong, ZHANG Yonggang, LI Ning, *et al.* Robust student's  $t$  based nonlinear filter and smoother[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(5): 2586–2596. doi: [10.1109/TAES.2016.150722](https://doi.org/10.1109/TAES.2016.150722).
- [22] WANG Jian, ZHANG Tao, JIN Bonan, *et al.* Student's  $t$ -based robust Kalman filter for a SINS/USBL integration navigation strategy[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2020, 20(10): 5540–5553. doi: [10.1109/JSEN.2020.2970766](https://doi.org/10.1109/JSEN.2020.2970766).
- [23] HUANG Yulong, ZHANG Yonggang, ZHAO Yuxin, *et al.* Robust Rauch-Tung-Striebel smoothing framework for heavy-tailed and/or skew noises[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(1): 415–441. doi: [10.1109/TAES.2019.2914520](https://doi.org/10.1109/TAES.2019.2914520).
- [24] ROTH M, ARDESHIRI T, ÖZKAN E, *et al.* Robust Bayesian filtering and smoothing using student's  $t$  distribution[EB/OL].<https://arxiv.org/abs/1703.02428>, 2017.
- [25] KARTAL S E. Variational smoothing for extended target tracking with random matrices[D]. [Master dissertation], Middle East Technical University, 2022.
- [26] BAUM M and HANEBECK U D. Extended object tracking with random hypersurface models[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, 2014, 50(1): 149–159. doi: [10.1109/TAES.2013.120107](https://doi.org/10.1109/TAES.2013.120107).
- [27] WAHLSTRÖM N and ÖZKAN E. Extended target tracking using Gaussian processes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(16): 4165–4178. doi: [10.1109/TSP.2015.2424194](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2424194).
- [28] ZEA A, FAION F, BAUM M, *et al.* Level-set random hypersurface models for tracking nonconvex extended objects[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(6): 2990–3007. doi: [10.1109/TAES.2016.130704](https://doi.org/10.1109/TAES.2016.130704).
- [29] KOCH J W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 1042–1059. doi: [10.1109/TAES.2008.4655362](https://doi.org/10.1109/TAES.2008.4655362).
- [30] FELDMANN M, FRÄNKEN D, and KOCH W. Tracking of extended objects and group targets using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1409–1420. doi: [10.1109/TSP.2010.2101064](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2101064).
- [31] LAN Jian and LI X R. Extended-object or group-target tracking using random matrix with nonlinear measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(19): 5130–5142. doi: [10.1109/TSP.2019.2935866](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2935866).
- [32] 陈辉, 王莉, 韩崇昭. 基于随机矩阵建模的Student's  $t$ 逆Wishart滤波器[J]. *控制理论与应用*, 2022, 39(6): 1088–1097. doi: [10.7641/CTA.2022.11108](https://doi.org/10.7641/CTA.2022.11108).
- CHEN Hui, WANG Li, and HAN Chongzhao. Student's  $t$  inverse Wishart filter based on random matrix modeling[J]. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(6): 1088–1097. doi: [10.7641/CTA.2022.11108](https://doi.org/10.7641/CTA.2022.11108).
- [33] KOTZ S and NADARAJAH S. Multivariate  $t$ -Distributions and Their Applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 4–68. doi: [10.1017/CBO9780511550683](https://doi.org/10.1017/CBO9780511550683).
- [34] ROTH M, ÖZKAN E, and GUSTAFSSON F. A Student's  $t$  filter for heavy tailed process and measurement noise[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, Canada, 2013: 5770–5774. doi: [10.1109/ICASSP.2013.6638770](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2013.6638770).
- [35] YANG Shishan, BAUM M, and GRANSTRÖM K. Metrics for performance evaluation of elliptic extended object tracking methods[C]. 2016 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent

- Systems (MFI), Baden-Baden, Germany, 2016: 523–528. doi: [10.1109/MFI.2016.7849541](https://doi.org/10.1109/MFI.2016.7849541).
- [36] GIVENS C R and SHORTT R M. A class of Wasserstein metrics for probability distributions[J]. *Michigan Mathematical Journal*, 1984, 31(2): 231–240. doi: [10.1307/mmj/1029003026](https://doi.org/10.1307/mmj/1029003026).
- [37] HARRIS C and STEPHENS M. A combined corner and edge detector[C]. *Alvey Vision Conference*, Manchester, UK, 1988: 23.1–23.6. doi: [10.5244/C.2.23](https://doi.org/10.5244/C.2.23).
- [38] CHEN Shuhan, ZHONG Shengwei, XUE Bai, *et al.* Iterative scale-invariant feature transform for *remote sensing* image registration[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, 59(4): 3244–3265. doi: [10.1109/TGRS.2020.3008609](https://doi.org/10.1109/TGRS.2020.3008609).
- [39] TUNCER B and ÖZKAN E. Random matrix based extended target tracking with orientation: A new model and inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 1910–1923. doi: [10.1109/TSP.2021.3065136](https://doi.org/10.1109/TSP.2021.3065136).
- 陈 辉: 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为多目标跟踪、数据融合、最优控制等.
- 张丁丁: 女, 硕士生, 研究方向为扩展目标跟踪.
- 连 峰: 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为目标跟踪、信息融合与传感器管理.
- 韩崇昭: 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为多源信息融合、随机控制与自适应控制、非线性频谱分析等.

责任编辑: 余 蓉