

II型Z-优化二元互补序列对的构造

林金朝^② 周银萍^{*①②} 李国军^② 叶昌荣^② 曾凡鑫^②

^①(重庆邮电大学通信与信息工程学院 重庆 400065)

^②(重庆邮电大学超视距可信信息传输研究所 重庆 400065)

摘要: 该文以长度为 $N(N$ 为整数)的Golay互补对(GCP)为种子序列对,在种子序列对的3个选定位置中插入特定的码元,构造出长度为 $N+3$ 的II型Z-优化2元Z-互补序列对(ZCP)。与已知同长度II型Z-优化2元Z-互补序列对相比,构造的新序列有更低的峰均包络功率比(PMEPR)。Z-互补序列对和Golay互补序列对都广泛应用于正交频分复用(OFDM)系统和码分多址(CDMA)系统等,但前者有更灵活的序列长度和更多的序列数量,更能满足应用的需求。

关键词: 序列设计; Z-互补对; Golay互补对; Z-优化; 峰均包络功率比

中图分类号: TN911.2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2023)03-0913-08

DOI: 10.11999/JEIT220014

Construction of Type II Z-Optimal Binary Complementary Sequence Pairs

LIN Jinzhao^② ZHOU Yinping^{①②} LI Guojun^② YE Changrong^② ZENG Fanxin^②

^①(School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

^②(Laboratory of Beyond Line of Sight Reliable Information Transmission, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: Based on a length- N Golay Complementary sequence Pair (GCP) as a seed, a Z-optimal binary Z-Complementary sequence Pair (ZCP) with length $N+3$ is constructed by inserting three specific components at chosen positions in the aforementioned seed, where N is an integer. Compared with the known Type-II Z-optimal binary ZCPs of the same length, the resultant pairs have lower Peak-to-Mean Envelope Power Ratio (PMEPR). Both ZCPs and GCPs are widely used in Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) systems and Code Division Multiple Access (CDMA) system, etc, however, the former has more flexible lengths and larger family sizes, which can better meet the requirements of applications.

Key words: Sequence design; Z-Complementary Pairs (ZCPs); Golay Complementary Pairs (GCPs); Z-optimal; Peak -to-Mean Envelope Power Ratio (PMEPR)

1 引言

Golay互补对(Golay Complementary Pairs, GCPs)由两条子序列组成,并且两条子序列的非周期自相关和(Aperiodic AutoCorrelation Sums, AACSS)在所有非0时移处均为0^[1]。GCPs在雷

达^[2]、码间干扰信道的信道估计^[3]、正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统^[4]等方面有着广泛应用。1999年, Davis和Jedwab^[5]基于标准广义布尔函数构建出长度为 2^m 的多相移键控GCPs(Polyphase Shifting Key GCPs, PSK-GCPs),即GDJ(Golay-Davis-Jedwab)互补对。然而, GCPs的长度受限于 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ (α, β, γ 为非负整数)形式。为了弥补GCPs长度上的不足,有两种关于Golay互补对的扩展研究。1972年, Tseng等人^[6]将GCPs扩展到Golay互补序列集(Golay Complementary Sequence sets, GCSs)。至今, GCSs已被广泛应用^[7]。2007年, Fan等人^[8]提出了Z-互补对(Z Complementary

收稿日期: 2022-01-06; 改回日期: 2022-05-19; 网络出版: 2022-05-24

*通信作者: 周银萍 s190101006@stu.cqupt.edu.cn

基金项目: 国家重点研发计划(2019YFC1511300), 重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2021ycjh-bgzxm0072)

Foundation Items: The National Key Research and Development Program of China (2019YFC1511300), Chongqing Basic Research and Frontier Exploration Project (cstc2021ycjh-bgzxm0072)

Pairs, ZCPs)。ZCPs类似于GCPs, 仍由两条子序列组成, 但具有在时移原点或结束端点周围一个特定的区域内非周期自相关和为0的特点, 这个特定区域通常被称为零相关区(Zero Correlation Zone, ZCZ), 区域的宽度常常被称为ZCZ宽度。非常明显, ZCPs的ZCZ宽度等于序列长度时, ZCPs就转化为GCPs。ZCPs分为I型和II型。I型ZCPs的ZCZ位于时移原点附近。I型ZCPs可应用于准同步码分多址(Quasi-Synchronous Code Division Multiple Access, QS-CDMA)系统, 以减轻码间干扰和多址干扰^[9]。II型ZCPs的ZCZ位于时移结束端点附近。II型ZCPs可应用于宽带无线通信系统中, 解决最小干扰信号延迟非常大时异步干扰的抑制问题^[10, 11]。在ZCZ相同的情况下, ZCPs的ZCZ区外非周期自相关和(Out-of-ZCZ Aperiodic Auto-Correlation Sums, OZ-AACSs)越小, OFDM系统中的峰均包络功率比(Peak-to-Mean Envelope Power Ratio, PMEPR)越小。根据长度, ZCPs又分为偶长ZCPs^[12-16]和奇长ZCPs^[8], 本文主要讨论II型奇长ZCPs。

基于计算机搜索结果, 文献^[8]猜想: 长度为 L 的奇长2元ZCPs(Odd-length Binary-ZCPs, OB-ZCPs)的零相关区最大宽度为 $(L+1)/2$, 该猜想在文献^[14]中得到证明, 但没有给出具体的系统构造。因此, 定义长度为奇数 L 且零相关区宽度达到最大值 $(L+1)/2$ 的2元ZCPs为Z-优化2元Z-互补序列对^[11]。如果(I型或II型)OB-ZCPs的最大OZ-AACSs绝对值为2, 那么, OB-ZCPs被认为最优; 2014年, Liu等人^[11]以2元GDJ互补序列对为种子对, 通过插入、删除得到长度为 $2^m \pm 1$ 的最优I型OB-ZCPs。2017年和2020年, Adhikary等人^[10, 15]通过分别在GCPs和图灵(Turyn)法中插入一个码元构造长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 1$ 的最优I型OB-ZCPs。以上两种方法只能插入1个码元, 且只有获得特定长度序列时才具有最大零相关区。2019年, Shen等人^[17]以标准2元GDJ序列对为种子对, 通过迭代法插入3个码元, 得到一种新的I型2元Z-优化OB-ZCPs。2020年, Zeng等人^[18]通过在任意长度为 N 的特殊图灵2元Golay互补对(Special Turyn Binary-GCPs, STB-GCPs)中插入一个码元, 得到长度为 $N+1$ 的II型Z-优化OB-ZCPs, 该方法只能插入1个码元, 且种子对的选择有特殊要求。Gu等人^[19]通过不同长度序列对的水平级联构造长度为 $2N \pm 1$ 的II型Z-优化OB-ZCPs, 其中 N 为整数, 该方法以两条序列作为种子对灵活度不高。Tian等人^[20]通过在GDJ互补对中的特定位置插入3个码元构建长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 3$

的II型Z-优化OB-ZCPs, 其中 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ 均为整数, 该方法可以插入3个码元, 然而其系统构建的插入位置不够完善。综上所述, 构造出长度更灵活的Z-优化OB-ZCPs具有非常重要的理论意义和潜在的实用价值。

本文主要研究工作如下。

(1) 构建3种不同插入位置的II型Z-优化OB-ZCPs并给出严格的数学推导证明。本文产生奇长度为 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 3$ 的II型Z-优化互补序列对, 增加应用对长度选择的范围;

(2) 与已知的方法相比, 当采用相同种子序列对时, 将本文构造的3种插入序列与已知的5种序列根据不同长度分别进行计算, 得到8种不同插入位置的PMEPR。计算机仿真表明, 本文所构造的新序列的PMEPR比已知同长度序列的PMEPR更小。

2 基本符号及定义

下列符号将全文采用:

- (1) $(a||b)$: 序列 a 和序列 b 的水平级联;
- (2) \underline{a} : 序列 a 的逆序;
- (3) $-a$: 序列 a 的取反;
- (4) $a \otimes b$: 序列 a 和序列 b 的Kronecker积。

定义1 长度为 N 的序列 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$, 如果满足 $a_i \in \{\pm 1\}, i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, 则 a 被称为2元序列。

定义2 对于一个2元序列对 (a, b) , 定义相关函数

$$\rho_{a,b}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1-\tau} a_i b_{i+\tau}, 0 \leq \tau \leq N-1 \quad (1)$$

当 $a \neq b$, 称 $\rho_{a,b}(\tau)$ 为序列 a 和序列 b 的非周期互相关函数(Aperiodic Cross-Correlation Functions, ACCF); 当 $a = b$, 称 $\rho_{a,b}(\tau)$ 为序列 a 的非周期自相关函数(Aperiodic Auto-Correlation Function, AACF), 并简写为 $\rho_a(\tau)$ 。

定义3 一个长度为 N 的2元序列对 (a, b) 若满足条件

$$\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = \begin{cases} 2N, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

则称2元序列对 (a, b) 为GCPs。

定义4 一个长度为 N 的2元GCPs (a, b) 若满足条件

$$\left. \begin{aligned} a_i &= b_i, & 0 \leq i \leq \frac{N}{2} - 1 \\ a_i &= -b_i, & \frac{N}{2} \leq i \leq N - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

则称2元GCPs (a, b) 为I型对称GCPs(Symmetry-GCPs, S-GCPs)。

定义5 一个长度为 N 的2元GCPs (a, b) 若满足条件

$$\left. \begin{aligned} a_i &= -b_i, 0 \leq i \leq \frac{N}{2} - 1 \\ a_i &= b_i, \frac{N}{2} \leq i \leq N - 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则称2元GCPs (a, b) 为II型S-GCPs。

Turyn利用长度为 M 和 N 的GCPs构建出长度为 MN 的GCPs。令 (a, b) 是一个长度为 N 的2元GCPs, (c, d) 是一个长度为 M 的2元GCPs, 则 (e, f) 是一个长度为 NM 的GCPs。如果 (c, d) 是一个2元S-GCPs, 则 (e, f) 也是一个2元S-GCPs。 (e, f) 由式(5)得到

$$\left. \begin{aligned} e &= c \otimes \frac{a+b}{2} - d \otimes \frac{b-a}{2} \\ f &= d \otimes \frac{a+b}{2} + c \otimes \frac{b-a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

定义6 令 (a, b) 是一个2元序列对, 若满足条件

$$\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0, N + 1 - Z \leq \tau \leq N - 1 \quad (6)$$

则2元序列对 (a, b) 是一个ZCZ宽度为 Z 的II型2元ZCPs。

注意, 对任意长度 N 及ZCZ宽度为 Z 的OB-ZCPs (a, b) , 其ZCZ宽度 Z 的上界为 $(N+1)/2$ ^[8], 即: $Z \leq (N+1)/2$ 。

定义7 对任意长度 N 及ZCZ宽度为 Z 的OB-ZCPs (a, b) , 如果零相关区宽度达到最大值 $(N+1)/2$, 则 (a, b) 被称为Z-优化OB-ZCPs^[11]。

引理1^[21] 对任意长度为 N 的Z-优化OB-ZCPs (a, b) , 其OZ-AACSs大小为 $2p$ ^[21], p 为正奇数

$$|\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau)| \geq 2p, \tau \notin ZCZ \quad (7)$$

定义8^[11] 对任意长度 N 的Z-优化OB-ZCPs (a, b) , 如果OZ-AACSs大小为2, 那么, 这些OB-ZCPs被认为最优。

3 新长度为 $N+3$ 的Z-优化ZCPs

本节将进行相关序列的构造及证明。设 (a, b) 是一个长度为 N 的S-GCPs, a_1 和 a_2 分别为序列 a 的前半段和后半段。 b_1 和 b_2 分别为序列 b 的前半段和后半段, i_1, i_2, i_3 和 j_1, j_2, j_3 分别为序列 a 和序列 b 的3个插入码元。

3.1 由I型S-GCPs构建II型Z-优化OB-ZCPs

根据定义4、定义6和定义7, 若 (a, b) 是一个长度为 N 的I型S-GCPs, 则下述定理中构造的 (w, v) 是长度为 $N+3$ 的II型Z-优化OB-ZCPs的充分条件的数学表达式是

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = 0, \frac{N}{2} + 2 \leq \tau \leq N + 2 \quad (8)$$

下面将根据式(8)来证明本文讨论的定理都是长度为 $N+3$ 的II型Z-优化OB-ZCPs。

定理1 设 (a, b) 是一个长度为 N 的I型S-GCPs, 构造式(9)的序列对

$$\left. \begin{aligned} w &= (i_1 \| a_1 \| a_2 \| i_2 \| i_3) \\ v &= (j_1 \| b_1 \| b_2 \| j_2 \| j_3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

则当 $i_1 = j_1, i_2 = -j_2, i_3 = -j_3, i_k, j_k \in \{\pm 1\}$ 时, (w, v) 是长度为 $N+3$ 的II型Z-优化OB-ZCPs。

证明 为了便于讨论, 本文将时移 τ 分成下面4种情况, 然后就每一种情况分别给出证明。

情况1 $\tau = N + 2$

$$\rho_w(\tau) = \sum_{i=0}^{(N+3)-1-\tau} w_i w_{i+\tau} = i_1 i_3 \quad (10)$$

$$\rho_v(\tau) = \sum_{i=0}^{(N+3)-1-\tau} v_i v_{i+\tau} = j_1 j_3 \quad (11)$$

所以

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 i_3 + j_1 j_3 = 0 \quad (12)$$

情况2 $\tau = N + 1$

$$\rho_w(\tau) = \sum_{i=0}^{(N+3)-1-\tau} w_i w_{i+\tau} = i_1 i_2 + a_0 i_3 \quad (13)$$

$$\rho_v(\tau) = \sum_{i=0}^{(N+3)-1-\tau} v_i v_{i+\tau} = j_1 j_2 + b_0 j_3 \quad (14)$$

所以

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 i_2 + j_1 j_2 + a_0 i_3 + b_0 j_3 \quad (15)$$

又因为 $a_0 = b_0$, 所以

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = 0 \quad (16)$$

情况3 $\tau = N$

$$\rho_w(\tau) = i_1 a_{N-1} + a_0 i_2 + a_1 i_3 \quad (17)$$

$$\rho_v(\tau) = j_1 b_{N-1} + b_0 j_2 + b_1 j_3 \quad (18)$$

因为 $a_{N-1} = -b_{N-1}, a_0 = b_0, a_1 = b_1$, 所以

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = 0 \quad (19)$$

情况4 $N/2 + 2 \leq \tau \leq N - 1$

令 $\tau = \tau_0 + 1$, 所以 $N/2 + 1 \leq \tau_0 \leq N - 2$, 于是有

$$\rho_w(\tau) = i_1 a_{\tau_0} + \sum_{i=0}^{N-2-\tau_0} a_i a_{i+\tau_0+1} + i_2 a_{N-1-\tau_0} + i_3 a_{N-\tau_0} \quad (20)$$

$$\rho_v(\tau) = j_1 b_{\tau_0} + \sum_{i=0}^{N-2-\tau_0} b_i b_{i+\tau_0+1} + j_2 b_{N-1-\tau_0} + j_3 b_{N-\tau_0} \quad (21)$$

因为 $N/2 + 1 \leq \tau_0 \leq N - 2$ ，所以 $0 \leq N - 2 - \tau_0 \leq N/2 - 3$ 。故 $a_{N-1-\tau_0} = b_{N-1-\tau_0}$ ， $a_{N-\tau_0} = b_{N-\tau_0}$ ， $a_i = b_i (0 \leq i \leq N - 2 - \tau_0)$ 。当 $0 \leq i \leq N - 2 - \tau_0$ 时，有 $\tau_0 \leq i + \tau_0 + 1 \leq N - 1$ ；当 $\tau_0 \geq N/2 + 1$ 时，有 $N/2 + 1 \leq i + \tau_0 + 1 \leq N - 1$ 。故当 $0 \leq i \leq N - 2 - \tau_0$ 时，有 $a_{i+\tau_0+1} = -b_{i+\tau_0+1}$ 。因为 $a_{\tau_0} = -b_{\tau_0}$ ，所以有

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & (i_1 - j_1)a_{\tau_0} \\ & + \sum_{i=0}^{N-2-\tau_0} a_i(a_{i+\tau_0+1} + b_{i+\tau_0+1}) \\ & + (i_2 + j_2)a_{N-1-\tau_0} \\ & + (i_3 + j_3)a_{N-\tau_0} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

综上所述，式(8)成立，即定理1成立。

定理2 设 (a, b) 是一个长度为 N 的 I 型 S-GCPs，构造如式(23)的序列对

$$\begin{cases} w = (i_1 || i_2 || a_1 || a_2 || i_3) \\ v = (j_1 || j_2 || b_1 || b_2 || j_3) \end{cases} \quad (23)$$

则当 $i_1 = j_1, i_2 = j_2, i_3 = -j_3, i_k, j_k \in \{\pm 1\}$ 时， (w, v) 是长度为 $N+3$ 的 II 型 Z-优化 OB-ZCPs。

证明 根据相关函数的定义，证明按下面4种情况时移 τ 展开。

情况1 $\tau = N + 2$

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 i_3 + j_1 j_3 = 0 \quad (24)$$

情况2 $\tau = N + 1$

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_2 i_3 + j_2 j_3 + i_1 a_{N-1} + j_1 b_{N-1} = 0 \quad (25)$$

情况3 $\tau = N$

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & i_1 a_{N-2} + i_2 a_{N-1} + i_3 a_0 + j_1 b_{N-2} \\ & + j_2 b_{N-1} + j_3 b_0 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

情况4 $N/2 + 2 \leq \tau \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & (i_1 - j_1)a_{\tau_0-1} + (i_2 - j_2)a_{\tau_0} \\ & + \sum_{i=0}^{N-2-\tau_0} a_i(a_{i+\tau_0+1} + b_{i+\tau_0+1}) \\ & + (i_3 + j_3)a_{N-1-\tau_0} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

综上所述，式(8)成立，定理2得证。

定理3 设 (a, b) 是一个长度为 N 的 I 型 S-GCPs，构造如式(28)的序列对

$$\begin{cases} w = (i_1 || a_1 || i_2 || a_2 || i_3) \\ v = (j_1 || b_1 || j_2 || b_2 || j_3) \end{cases} \quad (28)$$

则当 $i_1 = j_1, i_3 = -j_3, i_k, j_k \in \{\pm 1\}$ 时， (w, v) 是长度为 $N+3$ 的 II 型 Z-优化 OB-ZCPs。

证明 相似地，根据相关函数的定义，分下面4种情况来讨论。

情况1 $\tau = N + 2$

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 i_3 + j_1 j_3 = 0 \quad (29)$$

情况2 $\tau = N + 1$

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 a_{N-1} + j_1 b_{N-1} + a_0 i_3 + b_0 j_3 = 0 \quad (30)$$

情况3 $\tau = N$

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & i_1 a_{N-2} + a_0 a_{N-1} + a_1 i_3 + j_1 b_{N-2} \\ & + b_0 b_{N-1} + b_1 j_3 = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

情况4 $N/2 + 2 \leq \tau \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & (i_1 - j_1)a_{\tau_0-1} \\ & + \sum_{i=0}^{N-1-\tau_0} a_i(a_{i+\tau_0} + b_{i+\tau_0}) \\ & + (i_3 + j_3)a_{N-\tau_0} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

因此，式(8)成立。定理3成立。

3.2 由 II 型 S-GCPs 构建 II 型 Z-优化 OB-ZCPs

设 (a, b) 是一个长度为 N 的 II 型 S-GCPs， (w, v) 是长度为 $N+3$ 的 II 型 Z-优化 OB-ZCPs 的充分条件是等式(8)成立。

定理4 令 (a, b) 是一个长度为 N 的 II 型 S-GCPs，构造如式(33)的序列对

$$\begin{cases} w = (i_1 || a_1 || a_2 || i_2 || i_3) \\ v = (j_1 || b_1 || b_2 || j_2 || j_3) \end{cases} \quad (33)$$

则当 $i_1 = -j_1, i_2 = j_2, i_3 = j_3, i_k, j_k \in \{\pm 1\}$ 时， (w, v) 是长度为 $N+3$ 的 II 型 Z-优化 OB-ZCPs。

证明 根据相关函数的定义，证明按时移 τ 分成下面4种情况进行。

情况1 $\tau = N + 2$

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 i_3 + j_1 j_3 = 0 \quad (34)$$

情况2 $\tau = N + 1$

$$\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = i_1 i_2 + j_1 j_2 + a_0 i_3 + b_0 j_3 = 0 \quad (35)$$

情况3 $\tau = N$

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & i_1 a_{N-1} + a_0 i_2 + a_1 i_3 + j_1 b_{N-1} \\ & + b_0 j_2 + b_1 j_3 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

情况4 $N/2 + 2 \leq \tau \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \rho_w(\tau) + \rho_v(\tau) = & (i_1 - j_1)a_{\tau_0} \\ & + \sum_{i=0}^{N-2-\tau_0} a_i(a_{i+\tau_0+1} + b_{i+\tau_0+1}) \\ & + (i_2 + j_2)a_{N-1-\tau_0} \\ & + (i_3 + j_3)a_{N-\tau_0} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

因此，式(8)成立。定理4成立。

定理5 设 (a, b) 是一个长度为 N 的 II 型 S-GCPs，构造序列对

$$\begin{cases} w = (i_1 || i_2 || a_1 || a_2 || i_3) \\ v = (j_1 || j_2 || b_1 || b_2 || j_3) \end{cases} \quad (38)$$

则当 $i_1 = -j_1, i_2 = -j_2, i_3 = j_3, i_k, j_k \in \{\pm 1\}$ 时, (w, v) 是长度为 $N+3$ 的II型Z-优化OB-ZCPs。

定理6 设 (a, b) 是一个长度为 N 的II型S-GCPs, 构造序列对

$$\begin{cases} w = (i_1 || a_1 || i_2 || a_2 || i_3) \\ v = (j_1 || b_1 || j_2 || b_2 || j_3) \end{cases} \quad (39)$$

则当 $i_1 = -j_1, i_3 = j_3, i_k, j_k \in \{\pm 1\}$ 时, (w, v) 是长度为 $N+3$ 的II型Z-优化OB-ZCPs。

定理5和定理6的证明过程与定理2和定理3相似, 由于篇幅有限, 证明省略。

4 PMEPR相关概念及计算

OFDM是一种多载波调制技术, 它的主要思想是将整个信道分成若干个相互正交的子信道, 在每个子信道间进行调制和传输。它的主要优点包括: 信道利用率高, 抗多径衰落能力强, 系统对延迟效应敏感度低。OFDM的不足之处主要表现在当子载波个数很大时, OFDM信号的幅度将趋于高斯分布, 从而为非恒包络, 导致PMEPR较大, 且对放大器的线性动态范围A/D, D/A变换器的要求变高; 如果线路中的线性特性不理想, 就会导致信号失真和频谱弥散。因此, 减小PMEPR是OFDM系统中一个很重要的问题。

设一个含有 N 个子载波的多载波系统^[11], Δf 是子载波间距, f_c 为载波频率。对于一个长度为 N 的序列 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$, 其多载波波形信号在符号持续时间 $0 \leq t \leq 1/\Delta f$ 内为式(40)信号的实部

$$T_a(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp(2\pi\sqrt{-1}(f_c + \Delta f k)t) \quad (40)$$

进一步地

$$|T_a(t)|^2 = \rho_a(0) + 2 \sum_{\tau=0}^{N-1} \text{Re}\{\rho_a(\tau) \exp(2\pi\sqrt{-1}\Delta f \tau t)\} \quad (41)$$

其中, $\text{Re}\{x\}$ 为复数值 x 的实部。对于序列 a , 定义其多载波波形信号的PMEPR为

$$\text{PMEPR}(a) = \frac{1}{N} \sup_{0 \leq t < \frac{1}{\Delta f}} |T_a(t)|^2 \quad (42)$$

目前, 利用序列来减小PMEPR的方法都需要在PMEPR特性与序列效率之间折中, 也就是PMEPR与有效传输带宽的折中, 如削弱一点PMEPR性能为代价换取序列效率的提高。

基于文献[20]中给出的5种插入方法, 根据排序组合的原则, 将插入的3个码元随机插入序列的前端、中端或后端, 共有10种插入情况。通过计算机模拟仿真可知, 只有文献[20]中的5种插入方法和本文提出的3种插入方法对降低PMEPR有效(见表1)。另外两种方法, 即插入法 $((i_1, i_2, i_3) || a_1 || a_2); ((j_1, j_2, j_3) || b_1 || b_2)$ 和插入法 $(a_1 || a_2 || (i_1, i_2, i_3)); (b_1 || b_2 || (j_1, j_2, j_3))$ 无效。为了验证本文序列降低PMEPR的有效性, 将本文构造的3种插入序列与已知的5种插入序列^[20]进行仿真对比。令 $\Delta f = 1$, 假设在I型条件下, 序列长度为13时, 原始序列为 $a = (1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)$, 插入码元为 $i = (1, 1, 1)$; 在II型条件下, 序列长度为11时, 原始序列为 $a = (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1)$, 插入码元为 $i = (1, 1, -1)$ 。将8种插入序列代入式(42)中分别进行计算, 表1为I型及II型8种不同插入序列的构造条件。

图1给出了在I型条件下序列长度为13时, 8种插入方法的PMEPR随时间的变化关系。结果表明, 随着时间的增加, 序列逐渐趋于平稳, 其中new2序列的PMEPR值最低。因此, 本文新构造的序列new2在降低PMEPR上优于其余7种插入序列。

图2给出了在II型条件下序列长度为11时, 8种插入方法的PMEPR随时间的变化关系。结果表明, 随着时间的增加, PMEPR逐渐降低, 其中new1序列具有最低的PMEPR, 其次是new3, known2, new2。由此可知: $\text{new1} < \text{new3} < \text{known2} < \text{new2} < \text{known1} (\text{known3}/\text{known4}/\text{known5})$ 。因此, 本文构造的新序列new1在降低PMEPR上优于其余7种插入序列, 且new2和new3优于除了known2以外的其他插入序列。

图3和图4分别给出了在I型和II型条件下, 8种插入方法的PMEPR随序列长度逐渐增大的变化关系。随机生成不同长度的序列及插入码元, 通过蒙特卡罗模拟实验, 将不同长度且不同插入法的序列分别进行数万组实验, 取随机变数PMEPR的平均值。结果表明, 在误差允许的范围内, 随着序列长度的增加, PMEPR逐渐增加并趋于平稳, 本文新构造的3种插入序列的PMEPR均小于已知的序列。因此, 本文新构造的序列在降低PMEPR上优于已知的5种插入序列。

综上, 本文新构造的3种插入序列, 在I型和II型条件下, 与已知的5种插入序列相比均具有更低的PMEPR, 用户可根据自身需求, 选择不同长度、不同插入方式的I型或II型序列, 以获得更低的PMEPR和更优异的性能。

表 1 I型及II型构造条件

例	(w, v)	I型条件	II型条件
new1	$((i_1) a_1 a_2 i_2, i_3)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = j_1;$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = -j_1;$
	$((j_1) b_1 b_2 j_2, j_3)$	$i_2 = -j_2; i_3 = -j_3$	$i_2 = j_2; i_3 = j_3$
new2	$((i_1, i_2) a_1 a_2 i_3)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = j_1;$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = -j_1;$
	$((j_1, j_2) b_1 b_2 j_3)$	$i_2 = j_2; i_3 = -j_3$	$i_2 = -j_2; i_3 = j_3$
new3	$((i_1) a_1 i_2 a_2 i_3)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$
	$((j_1) b_1 j_2 b_2 j_3)$	$i_1 = j_1; i_3 = -j_3$	$i_1 = -j_1; i_3 = j_3$
known1 ^[20]	$((i_1, i_2) a_1 i_3 a_2)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = j_1;$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = -j_1;$
	$((j_1, j_2) b_1 j_3 b_2)$	$i_2 = j_2; i_3 = -j_3$	$i_2 = -j_2; i_3 = j_3$
know2 ^[20]	$(a_1 i_1 a_2 i_2, i_3)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = j_1;$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\}; i_1 = 1 - j_1;$
	$(b_1 j_1 b_2 j_2, j_3)$	$i_2 = -j_2; i_3 = -j_3$	$i_2 = j_2; i_3 = j_3$
known3 ^[20]	$((i_1) a_1 i_2, i_3 a_2)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$
	$((j_1) b_1 j_2, j_3 b_2)$	$i_1 = j_1; i_3 = -j_3$	$i_1 = -j_1; i_3 = j_3$
known4 ^[20]	$(a_1 i_1, i_2 a_2 i_3)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$
	$(b_1 j_1, j_2 b_2 j_3)$	$i_1 = j_1; i_3 = -j_3$	$i_1 = -j_1; i_3 = j_3$
known5 ^[20]	$(a_1 i_1, i_2, i_3 a_2)$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$	$i_k, j_k \in \{\pm 1\};$
	$(b_1 j_1, j_2, j_3 b_2)$	$i_1 = j_1; i_3 = -j_3$	$i_1 = -j_1; i_3 = j_3$

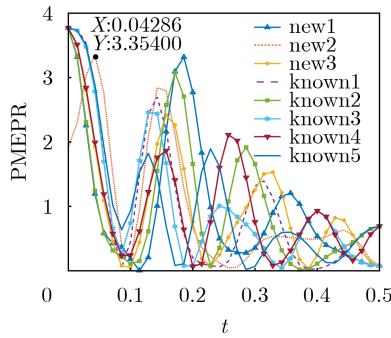


图 1 I型条件下序列长度为13的8种插入方法的PMEPR对比

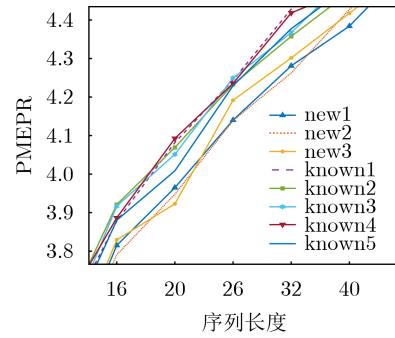


图 3 I型条件下不同长度序列的PMEPR

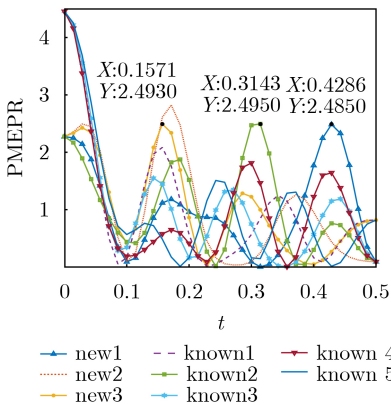


图 2 II型条件下序列长度为11的8种插入方法的PMEPR对比

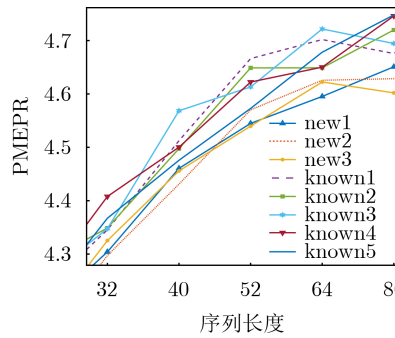


图 4 II型条件下不同长度序列的PMEPR

5 示例及讨论

5.1 示例

5.1.1 由I型S-GCPs构建II型Z-优化OB-ZCPs

设 (a, b) 是一个长度为8的I型S-GCPs。其中序列 $a = (1, 1 - 1, 1, 1, 1, 1, -1)$ ，序列 $b = (1, 1 - 1, 1, -1, -1, -1, 1)$ 。令 $(i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) = (-1, 1, -1, -1, 1, 1)$ ，根据表1中3个新例子，可以得到长度为11的II型Z-

优化OB-ZCPs (w, v) 。基于定理1，即表1中新1的I型条件

$$\left. \begin{aligned} w &= (-1, 1, 1 - 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1) \\ v &= (-1, 1, 1 - 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

其中， $(\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau))_{\tau=0}^{10} = (22, -6, 2, 2, -2, -2, 0_5)$ 。定理2和定理3分别为表1中新2和新3的I型条件，均满足上述条件。

5.1.2 由II型S-GCPs构建II型Z-优化OB-ZCPs

设 (a, b) 是一个长度为4的II型S-GCPs。其中序

列 $a = (-1, 1, 1, 1)$, 序列 $b = (1, -11, 1)$, 根据表1中3个新例子, 可以得到长度为7的II型Z-优化OB-ZCPs(w, v)。基于定理4, 即表1中新1的II型条件。令 $(i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) = (-1, -1, -1, 1, -1, -1)$

$$\left. \begin{aligned} w &= (-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1) \\ v &= (1, 1 - 1, 1, 1, -1, -1) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

其中 $(\rho_w(\tau) + \rho_v(\tau))_{\tau=0}^6 = (14, 2, -6, -2, 0, 0, 0)$ 。定理5和定理6分别为表1中新2和新3的II型条件, 均满足上述条件。

综上所述, 仿真结果与证明公式一致, 对于I型或II型序列, 3种插入方法均是可行的。

5.2 讨论

本文与文献[10, 11, 17]的插入方法相比, 存在以下的不同之处。

(1) 本文插入的码元是3个, 文献[10]和文献[11]的插入方法只能插入1个码元。

(2) 本文插入的位置有表1的3种方法, 文献[11]的插入位置在种子对的中间, 或者同时在种子对第1个码元前, 或者同时在最后1个码元后, 又或者一前一后。文献[10]的插入位置在种子对第1个码元前或者最后1个码元后。文献[17]的插入位置是特定的。

(3) 文献[11]和文献[17]只能以2元GDJ互补序列对为种子对, 本文以2元对称Golay互补序列对为种子对, 2元GDJ互补序列对是2元Golay互补序列对的一个真子集。

(4) 文献[11]的方法只能产生奇长度为 $N = 2^m + 1$ 的II型Z-优化互补序列对。文献[10]和文献[17]的方法只能产生奇长度为 $N = 2^m + 3$ 的II型Z-优化互补序列对, 本文产生奇长度为 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 3$ 的II型Z-优化互补序列对, 有更多的长度可供应用选择。

(5) 文献[10]在种子对中插入1个码元, 只有序列对长度为 $N=2N+1$ 时才有最大零相关区宽度 $Z=(N+1)/2$, 而本文构造的序列对都具有最大零相关区宽度 $Z=(N+1)/2$, 其中 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 。

6 结束语

本文主要研究了II型Z-优化OB-ZCPs, 通过在S-GCPs中插入3个码元, 得到长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 3$ 的II型Z-优化OB-ZCPs, 其中 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$, α, β, γ 均为整数。本文对同长度序列的插入方法进行了补充和完善。仿真表明结果, 新构造序列的PMEPR小于已知的同长度序列, 为用户提供了更丰富的序列选择。

下一步的研究工作是在本文构造的II型Z-优化OB-ZCPs基础上, 构造新的最优OB-ZCPs序列。

最优OB-ZCPs序列具有唯一的区外值和更低的PMEPR, 系统性能有望进一步提高。

参考文献

- [1] GOLAY M. Complementary series[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1961, 7(2): 82–87. doi: 10.1109/TIT.1961.1057620.
- [2] WELTI G. Quaternary codes for pulsed radar[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1960, 6(3): 400–408. doi: 10.1109/TIT.1960.1057572.
- [3] SPASOJEVIC P and GEORGHIADES C N. Complementary sequences for ISI channel estimation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, 47(3): 1145–1152. doi: 10.1109/18.915670.
- [4] POPOVIC B M. Synthesis of power efficient multitone signals with flat amplitude spectrum[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1991, 39(7): 1031–1033. doi: 10.1109/26.87205.
- [5] DAVIS J A and JEDWAB J. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences and Reed-Muller codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(7): 2397–2417. doi: 10.1109/18.796380.
- [6] TSENG C C and LIU C. Complementary sets of sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(5): 644–652. doi: 10.1109/TIT.1972.1054860.
- [7] APARICIO J and SHIMURA T. Asynchronous detection and identification of multiple users by multi-carrier modulated complementary set of sequences[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 22054–22069. doi: 10.1109/ACCESS.2018.2828500.
- [8] FAN Pingzhi, YUAN Weina, and TU Yifeng. Z-complementary binary sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(8): 509–512. doi: 10.1109/LSP.2007.891834.
- [9] 陈晓玉, 高茜超, 李永杰. 最佳零相关区序列集构造法[J]. *通信学报*, 2020, 41(8): 215–222. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2020175. CHEN Xiaoyu, GAO Xichao, and LI Yongjie. Construction of optimal zero correlation zone sequence set[J]. *Journal on Communications*, 2020, 41(8): 215–222. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2020175.
- [10] ADHIKARY A R, MAJHI S, LIU Zilong, et al. New sets of optimal odd-length binary Z-complementary pairs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2020, 66(1): 669–678. doi: 10.1109/TIT.2019.2944185.
- [11] LIU Zilong, PARAMPALLI U, and GUAN Yongliang. Optimal odd-length binary Z-complementary pairs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(9): 5768–5781. doi: 10.1109/TIT.2014.2335731.

- [12] ADHIKARY A R, MAJHI S, LIU Zilong, *et al.* New sets of even-length binary Z-complementary pairs with asymptotic ZCZ ratio of $3/4$ [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(7): 970–973. doi: [10.1109/LSP.2018.2834143](https://doi.org/10.1109/LSP.2018.2834143).
- [13] CHEN Chaoyu and PAI Chengyu. Binary Z-complementary pairs with bounded peak-to-mean envelope power ratios[J]. *IEEE Communications Letters*, 2019, 23(11): 1899–1903. doi: [10.1109/LCOMM.2019.2934692](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2934692).
- [14] LI Xudong, FAN Pingzhi, TANG Xiaohu, *et al.* Existence of binary Z-complementary pairs[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(1): 63–66. doi: [10.1109/LSP.2010.2095459](https://doi.org/10.1109/LSP.2010.2095459).
- [15] ADHIKARY A R, MAJHI S, LIU Zilong, *et al.* New optimal binary Z-complementary pairs of odd lengths[C]. 2017 Eighth International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA), Sapporo, Japan, 2017: 14–18. doi: [10.1109/IWSDA.2017.8095727](https://doi.org/10.1109/IWSDA.2017.8095727).
- [16] XIE Chunlei and SUN Yujuan. Constructions of even-period binary Z-complementary pairs with large ZCZs[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(8): 1141–1145. doi: [10.1109/LSP.2018.2848102](https://doi.org/10.1109/LSP.2018.2848102).
- [17] SHEN Bingsheng, YANG Yang, ZHOU Zhengchun, *et al.* New optimal binary Z-complementary pairs of odd length 2^m+3 [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(12): 1931–1934. doi: [10.1109/LSP.2019.2954805](https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2954805).
- [18] ZENG Fanxin, HE Xiping, ZHANG Zhenyu, *et al.* Optimal and Z-optimal Type-II odd-length binary Z-complementary pairs[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(6): 1163–1167. doi: [10.1109/LCOMM.2020.2977897](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2020.2977897).
- [19] GU Zhi, ZHOU Zhengchun, WANG Qi, *et al.* New construction of optimal Type-II binary Z-complementary pairs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2021, 67(6): 3497–3508. doi: [10.1109/TIT.2020.3007670](https://doi.org/10.1109/TIT.2020.3007670).
- [20] TIAN Shucong, YANG Meng, and WANG Jianpeng. Two constructions of binary Z-complementary pairs[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2021, E104.A(4): 768–772. doi: [10.1587/transfun.2020EAL2069](https://doi.org/10.1587/transfun.2020EAL2069).
- [21] LIU Zilong, GUAN Yongliang, and PARAMPALLI U. On optimal binary Z-complementary pair of odd period[C]. 2013 IEEE International Symposium on Information Theory, Istanbul, Turkey, 2013: 3125–3129. doi: [10.1109/ISIT.2013.6620801](https://doi.org/10.1109/ISIT.2013.6620801).
- 林金朝: 男, 教授, 研究方向为无线通信传输技术、BAN网络与信息处理技术.
- 周银萍: 女, 硕士生, 研究方向为序列设计、信号处理.
- 李国军: 男, 教授, 研究方向为军民融合应急指挥信息系统体质标准、核心技术、关键装备与规划建设.
- 叶昌荣: 男, 副教授, 研究方向为短波通信、信号处理.
- 曾凡鑫: 男, 教授, 研究方向为序列设计、纠错码、信号处理.

责任编辑: 余蓉