第44卷 第12期　　电子与信息学报　　Vol. 44No. 12
2022年12月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Dec. 2022

两类最优零相关区非周期互补序列集的构造

崔　莉[①②]　　许成谦[*①]

[①](燕山大学信息科学与工程学院　秦皇岛　066004)
[②](河北科技师范学院数学与信息科技学院　秦皇岛　066004)

摘　要：该文基于正交矩阵，通过不同的矩阵变换的方法，提出两类零相关区(ZCZ)非周期互补序列集(ZACSS)的构造方法。在正交矩阵的阶能够被零相关区长度整除的条件下，所得序列集参数均能达到最优，且零相关区长度可以灵活选择。第1种方法构造的序列集具有理想的自相关互补性，通过进一步分组，可以得到多个组内互补的序列集。利用初始矩阵和正交矩阵的多样性能够构造出大量的最优零相关区非周期互补序列集，可应用于多载波码分多址(MC-CDMA)系统作为用户地址码来消除多径干扰和多址干扰。

关键词：多载波码分多址；零相关区；非周期；互补序列集

中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2022)12-4304-08

DOI: 10.11999/JEIT210950

Constructions of Two Optimal Zero Correlation Zone Aperiodic Complementary Sequence Sets

CUI Li[①②]　　XU Chengqian[①]

[①](*School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)
[②](*School of Mathematics and Information Science & Technology, Hebei Normal University of Science & Technology, Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Based on orthogonal matrices, constructions of two Zero Correlation Zone (ZCZ) Aperiodic Complementary Sequence Sets (ZACSS) are proposed through different matrix transformation methods. Under the condition that the order of the orthogonal matrices can be evenly divided by the length of the zero-correlation zone, the parameters of obtained sequence sets are optimal, and the length of the ZCZ can be chosen flexibly. The sequence sets are constructed by the first method have ideal autocorrelation complementarity, and by further grouping, a set of intra-group complementary sequence sets can be obtained. A large number of optimal ZACSS can be constructed by different kinds of initial matrices and orthogonal matrices. The resultant sequence sets proposed in this paper can be applied to Multi-Carrier Code Division Multiple Access (MC-CDMA) systems as user address codes to eliminate multipath interference and multiple access interference.

Key words: Multi-Carrier Code Division Multiple Access (MC-CDMA); Zero Correlation Zone (ZCZ); Aperiodic; Complementary sequence sets

1　引言

互补对序列又称为格雷(Golay)序列，最早由Golay[1]提出，不同于传统通信系统中的单码，如m序列，它由两个序列构成，且两个序列的自相关函数之和在零时延之外处处为0。Tseng等人[2]将互补对的概念推广为互补序列集。在多载波码分多址(Multi-Carrier Code Division Multiple Access, MC-CDMA)通信系统中，将互补序列集中的各个子集作为地址码，通过为不同用户分配不同的地址码的方式来区分用户，子载波将子集内的序列调制发送，接收端再将载波信号恢复成用户信号，因此互补序列集具有重要的应用价值。然而由于参数理论界的限制，互补序列集的大小不能超过子集内序列的数目，这大大限制了通信系统可支持的用户数目。为扩展互补序列集的大小，学者把零相关区(Zero Correlation Zone, ZCZ)的概念引入到互补序

收稿日期：2021-09-07；改回日期：2021-11-29；网络出版：2021-12-06
*通信作者：许成谦　cqxu@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61671402)，河北省自然科学基金(F2020203043)，河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2021105)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61671402), The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2020203043), The Natural Science Researh Programs of Hebei Educational Committee (ZD2021105)

列集中，Fan等人[3]首先提出了零相关区非周期互补序列集 (ZCZ Aperiodic Complementary Sequence Sets, ZACSS)的概念。与传统互补序列集相比，零相关区互补序列集的大小不受子集内序列数目的限制，因此可以支持更多用户同时入网。从序列的相关函数定义来看，零相关区互补序列集分为ZCZ周期互补序列集 (ZCZ Periodic Complementary Sequence Sets, ZPCSS)与ZACSS，然而非周期互补序列集设计难度更大，因此目前主要研究成果是零相关区周期互补序列集[4–9]。

相比ZPCSS，ZACSS更贴近应用实际，因此研究参数达到理论界[3]的最优ZACSS成为序列设计领域研究的热点问题之一。文献[10–12]均以正交矩阵为基础，构造了参数最优的零相关区非周期互补序列集。文献[10]构造的非周期组间互补 (Inter-Group Complementary, IGC)序列集是一类特殊的ZACSS，它由多组ZACSS构成，不同组的序列集完全互补。然而，组内ZACSS的大小与子集内序列的数目相同，与传统互补序列集的理论界限制相同。文献[11]提出了基于有限域$\mathrm{GF}(p)$和$\mathrm{GF}(p^n)$的构造方法，ZCZ长度可以灵活选择，但正交矩阵的阶数与ZCZ长度的比值被限定为素数p或p^n。文献[12]的构造过程中，在设定了ZCZ长度和正交矩阵的阶数后，只能通过选择不同的正交矩阵来构造不同的ZACSS。文献[13,14]构造的ZACSS参数的性能取决于初始序列。文献[15]提出了4元ZCZ非周期互补序列集的概念，并给出了构造方法。文献[16]通过对传统的非周期完备互补序列集的迭代，构造了组内互补 (Intra-Group Complementary, IaGC) 序列集，每组序列集具有理想的相关互补性，而组间序列集的ZCZ长度被限定为2的整数次幂，且参数不具有理想互相关互补特性。利用布尔函数，文献[17,18]构造了2元ZACSS，所有参数都被限定为2的整数次幂的倍数。文献[18]提出的3种构造方法中，两种构造方法得到的ZACSS均不是最优的，另一种构造方法在限定条件下参数可以达到理论界。文献[19]将序列长度为奇数的2元非周期ZCZ互补偶作为基序列，构造了一类序列长度 ($N=2^\alpha 10^\beta 26^\gamma+1$, α, β, γ均为整数) 为奇数的2元最优ZACSS。由此可见，文献[13–18]构造的ZACSS参数的性能受到初始序列集或不同条件的限制。

本文基于正交矩阵利用矩阵变换的方法，构造了两类参数均能达到理论界的最优零相关区非周期互补序列集，且零相关区长度可以灵活选择。进而丰富了最优零相关区非周期互补序列集的研究成果，为多载波码分多址系统的应用提供了理论依据。

2 基本概念

定义1 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$均为两个长度为L的复数序列，$\boldsymbol{a}=(a(0),a(1),\cdots,a(L-1))$，$\boldsymbol{b}=(b(0),b(1),\cdots,b(L-1))$，其非周期相关函数$C_{a,b}(\tau)$定义为

$$C_{a,b}(\tau)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{t=0}^{L-1-\tau}a(t)\cdot b^*(t+\tau), & 0\le\tau\le L-1\\ \displaystyle\sum_{t=0}^{L-1+\tau}a(t-\tau)\cdot b^*(t), & 1-L<\tau\le -1\\ 0, & |\tau|\ge L\end{cases}\tag{1}$$

其中，$(\cdot)^*$表示取共轭复数。上述函数，当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时，表示非周期自相关函数，记为$C_a(\tau)$；当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$时表示非周期互相关函数。

序列$\boldsymbol{a}$和序列$\boldsymbol{b}$的周期相关函数定义为

$$R_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)=C_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)+C_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau-L)\tag{2}$$

当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时，式(2)称为周期自相关函数，记为$R_a(\tau)$，当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$时，$R_{a,b}(\tau)$称为周期互相关函数。

定义2 设一个$N\times N$的矩阵$\boldsymbol{O}=\left[\boldsymbol{o}_j^i\right]_{N\times N}$，$\boldsymbol{o}^i=\left(o_0^i,o_1^i,\cdots,o_{N-1}^i\right)$表示矩阵$\boldsymbol{O}$的第$i$行，$0\le i\le N-1$，令$i_1\neq i_2$，如果任意两行$\boldsymbol{o}^{i_1}$与$\boldsymbol{o}^{i_2}$的周期互相关函数满足$R_{\boldsymbol{o}^{i_1},\boldsymbol{o}^{i_2}}(0)=0$，则称矩阵$\boldsymbol{O}$为正交矩阵。

定义3 设集合$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{M-1}\right\}$含有$M$个序列集，其中每个序列集$\boldsymbol{S}^m=\{\boldsymbol{s}_0^m,\boldsymbol{s}_1^m,\cdots,\boldsymbol{s}_{Q-1}^m\}$含有$Q$个长度为$L$的序列$\boldsymbol{s}_q^m=\left(s_q^m(0),s_q^m(1),\cdots,s_q^m(L-1)\right)$，如果任意两个序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的非周期相关函数都满足

$$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=\sum_{q=0}^{Q-1}C_{\boldsymbol{s}_q^{m_1},\boldsymbol{s}_q^{m_2}}(\tau)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{q=0}^{Q-1}E_{\boldsymbol{s}_q^{m_1}}, & m_1=m_2,\tau=0\\ 0, & m_1=m_2,0<|\tau|\le Z-1\\ 0, & m_1\neq m_2,0\le|\tau|\le Z-1\end{cases}\tag{3}$$

其中，$E_{\boldsymbol{s}_q^{m_1}}=\sum_{l=0}^{L-1}|s_q^{m_1}(l)|^2,0\le m_1,m_2\le M-1$，$0\le q\le Q-1$，则称序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与序列集$\boldsymbol{S}^{m_2}$在零相关区$[0,Z-1]$上是非周期互补的，称$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{M-1}\right\}$为ZCZ非周期互补序列集，表示为$(M,Z)\,\mathrm{ACS}_Q^L$，其中$M$表示集合$\boldsymbol{S}$中序列集的个数，也表示$\boldsymbol{S}$的大小，$Q$表示每个序列集中序列的个数，$L$表示每个序列的长度，$Z$表示零相关区的长度。当$\boldsymbol{S}^{m_1}=\boldsymbol{S}^{m_2}$即$m_1=m_2$时，称$\boldsymbol{S}^{m_1}$在区间$[0,Z-1]$上是自相关互补的，用$\boldsymbol{C}_{S^{m_1}}(\tau)$表示序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$的非周期自相关函数；当$\boldsymbol{S}^{m_1}\neq\boldsymbol{S}^{m_2}$即

$m_1 \neq m_2$时，称$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$在区间$[0, Z-1]$上是互相关互补的，用$\boldsymbol{C}_{S^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)$表示序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的非周期互相关函数。

当$Z = L$且$M = Q$时，称序列集$\boldsymbol{S}$为传统的非周期完备互补(Perfect Complementary, PC)序列集，记为PC(M, L)。

引理1[3] 对于(M, Z) ACS_Q^L，参数之间满足关系为

$$M \leq Q \cdot \lfloor L/Z \rfloor \tag{4}$$

当等号成立时，称该序列集的参数达到理论界，是最优ZCZ非周期互补序列集。

3 基于正交矩阵构造ZCZ非周期互补序列集

3.1 构造方法1

步骤1 取整数Z, $Z>1$，取两个$Q \times Q$的正交矩阵分别记为$\boldsymbol{A} = [a_j^i]_{Q\times Q}$和$\boldsymbol{B} = [b_j^i]_{Q\times Q}$，$0 \leq i, j \leq Q-1$，使$Q$满足$Z|Q$，令$H = Q/Z$。$\boldsymbol{a}^i$与$\boldsymbol{b}^i$分别表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$的第$i$行，$a_j^i$与$b_j^i$分别表示$\boldsymbol{a}^i$与$\boldsymbol{b}^i$第$j$列上的元素。

步骤2 取一个矩阵$\boldsymbol{U} = [u_j^i]_{H\times Z}$，$u_j^i \in \{0, 1, \cdots, Q-1\}$。当$i \neq i'$或$j \neq j'$时，均有$u_j^i \neq u_{j'}^{i'}$，即矩阵$\boldsymbol{U}$内元素互不相同。

步骤3 取一个矩阵$\boldsymbol{V} = [v_j^i]_{H\times H}$，$v_j^i \in \{0, 1, \cdots, H-1\}$，$0 \leq i, j \leq H-1$。当$i \neq i'$时，$v_j^i \neq v_j^{i'}$，当$j \neq j'$时，$v_j^i \neq v_{j'}^i$，即同一列元素均不相同，同一行元素亦均不相同。

步骤4 构造一个含有M个序列集的集合$\boldsymbol{S}$, $M = HQ$, $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{S}^0, \boldsymbol{S}^1, \cdots, \boldsymbol{S}^{M-1}\}$，每个序列集$\boldsymbol{S}^m = \{\boldsymbol{s}_0^m, \boldsymbol{s}_1^m, \cdots, \boldsymbol{s}_{Q-1}^m\}$含有$Q$个序列，每个序列长度为$Q$，即$\boldsymbol{s}_q^m = (s_q^m(0), s_q^m(1), \cdots, s_q^m(Q-1))$，其中$0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq q \leq Q-1$。取$k = \lfloor m/Q \rfloor$, $t = m \bmod Q$，序列中每个元素的构造方法为

$$s_q^m(l) = a_q^{\varphi(l)} \cdot b_l^t \tag{5}$$

其中，$\varphi(l) = u_{l \bmod Z}^{v_{\lfloor l/Z \rfloor}^k \oplus l \bmod Z}$, $0 \leq l \leq Q-1$，$\oplus$表示取模H的加法运算。

序列$\boldsymbol{s}_q^m$的构造过程进一步解释为，可以用两个向量对应元素的乘积表示为

$$\boldsymbol{s}_q^m = \left(a_q^{\varphi(0)} \cdot b_0^t, a_q^{\varphi(1)} \cdot b_1^t, \cdots, a_q^{\varphi(Q-1)} \cdot b_{Q-1}^t\right) \tag{6}$$

式(6)表示由正交矩阵$\boldsymbol{A}$的第q列第$\varphi(0)$行的元素，第q列第$\varphi(1)$行的元素，…，第q列第$\varphi(Q-1)$行的元素组成的列向量与正交矩阵$\boldsymbol{B}$的第t行的行向量$\boldsymbol{b}^t = (b_0^t, b_1^t, \cdots, b_{Q-1}^t)$对应元素相乘构成的序列。

定理1 构造方法1得到的集合$\boldsymbol{S}$是(HQ, Z) ACS_Q^Q，其中$Q = HZ$。

证明 令集合$\boldsymbol{S}$中任意两个序列集分别为$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$，$m_1 = k_1 Q + t_1$，$m_2 = k_2 Q + t_2$，其中$0 \leq k_1, k_2 \leq H-1$, $0 \leq t_1, t_2 \leq Q-1$。下面往证，τ在区间$[0, Z-1]$上，$C_{S^{m_1},S^{m_2}}(\tau) = 0$，计算$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的非周期相关函数

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) &= \sum_{q=0}^{Q-1} C_{\boldsymbol{s}_q^{m_1},\boldsymbol{s}_q^{m_2}}(\tau) \\ &= \sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{l=0}^{Q-1-\tau} s_q^{m_1}(l) \cdot s_q^{m_2 *}(l+\tau) \\ &= \sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{l=0}^{Q-1-\tau} a_q^{\varphi(l)} \cdot b_l^{t_1} \cdot \left(a_q^{\varphi(l+\tau)} \cdot b_{l+\tau}^{t_2}\right)^* \\ &= \sum_{l=0}^{Q-1-\tau} b_l^{t_1} \cdot (b_{l+\tau}^{t_2})^* \cdot R_{\boldsymbol{a}^{\varphi(l)},\boldsymbol{a}^{\varphi(l+\tau)}}(0) \end{aligned} \tag{7}$$

其中，$\varphi(l) = u_{l \bmod Z}^{\alpha(l)}$, $\varphi(l+\tau) = u_{(l+\tau) \bmod Z}^{\alpha(l+\tau)}$, $\alpha(l) = v_{\lfloor l/Z \rfloor}^{k_1} \oplus l \bmod Z$, $\alpha(l+\tau) = v_{\lfloor (l+\tau)/Z \rfloor}^{k_2} \oplus (l+\tau) \bmod Z$。

若$\alpha(l) \neq \alpha(l+\tau)$或$l \bmod Z \neq (l+\tau) \bmod Z$，则$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) = 0$，证明过程如下。

由$\varphi(l)$与$\varphi(l+\tau)$的表达式可知，$\varphi(l)$与$\varphi(l+\tau)$是矩阵$\boldsymbol{U}$上的元素。由于矩阵$\boldsymbol{U}$上的元素互不相同，因此若$\alpha(l) \neq \alpha(l+\tau)$或$l \bmod Z \neq (l+\tau) \bmod Z$，则$\varphi(l) \neq \varphi(l+\tau)$。又因为$\varphi(l)$与$\varphi(l+\tau)$均在$[0, Q-1]$区间内，因此结合正交矩阵的定义，有$R_{\boldsymbol{a}^{\varphi(l)},\boldsymbol{a}^{\varphi(l+\tau)}}(0) = 0$，进而由式(7)可得，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) = 0$。由此可以证明$\alpha(l) \neq \alpha(l+\tau)$或$l \bmod Z \neq (l+\tau) \bmod Z$为$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) = 0$的充分条件。

下面利用以上结论对序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的自相关互补性和互相关互补性进行分析。

(1) 自相关互补性分析：当$k_1 = k_2$, $t_1 = t_2$即$m_1 = m_2$时，τ在区间$(0, Q-1]$上，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) = C_{\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau)$。根据$\tau$的取值进一步分情况讨论，证明$C_{\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau) = 0$。

(a) 当$Z|\tau$时，令$\tau = nZ$，$0 < n \leq H-1$，注意$\alpha(l)$与$\alpha(l+\tau)$的表达式。一方面由$0 < l+\tau \leq Q-1$，可知$0 < \lfloor (l+\tau)/Z \rfloor = n + \lfloor l/Z \rfloor \leq H-1$；另一方面$(l+\tau) \bmod Z = l \bmod Z$。因此$\alpha(l+\tau) = v_{\lfloor l/Z \rfloor+n}^{k_1} \oplus l \bmod Z$。根据矩阵$\boldsymbol{V}$中同一行内元素均不相同，则$v_{\lfloor l/Z \rfloor+n}^{k_1} \neq v_{\lfloor l/Z \rfloor}^{k_1}$。又因为$v_{\lfloor l/Z \rfloor+n}^{k_1}$与$v_{\lfloor l/Z \rfloor}^{k_1}$均在$[0, H-1]$的范围内，可以得出结论：$v_{\lfloor l/Z \rfloor}^{k_1} \oplus l \bmod Z \neq v_{\lfloor l/Z \rfloor+n}^{k_1} \oplus l \bmod Z$，即$\alpha(l) \neq \alpha(l+\tau)$，从而$C_{\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau) = 0$。

(b) 当$Z \nmid \tau$时，显然$(l+\tau) \bmod Z \neq l \bmod Z$，从而$C_{\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau) = 0$。

综合上述(a)，(b)两种情况可知，当$m_1=m_2$，$0<\tau\le Q-1$时，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau)=0$，即序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$自相关完全互补。

(2) 互相关互补性分析：当$m_1\ne m_2$时，进一步分为以下4种情况讨论，证明τ在$[0,Z-1]$区间上，有$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

(a) 当$0<\tau\le Z-1$，$k_1\ne k_2$时，显然$(l+\tau)\bmod Z\ne l\bmod Z$，从而$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

(b) 当$\tau=0$，$k_1\ne k_2$时，$\alpha(l+\tau)=v^{k_2}_{\lfloor l/Z\rfloor}\oplus l\bmod Z$，结合$\alpha(l)=v^{k_1}_{\lfloor l/Z\rfloor}\oplus l\bmod Z$，根据构造方法1中步骤3矩阵$\boldsymbol{V}$中同一列上元素互不相同，有$v^{k_1}_{\lfloor l/Z\rfloor}\ne v^{k_2}_{\lfloor l/Z\rfloor}$，且$v^{k_1}_{\lfloor l/Z\rfloor}$与$v^{k_2}_{\lfloor j|z\rfloor}$均在$[0,H-1]$的范围内，可以得出结论$v^{k_1}_{\lfloor l/Z\rfloor}\oplus l\bmod Z\ne v^{k_2}_{\lfloor l/Z\rfloor}\oplus l\bmod Z$，即$\alpha(l)\ne\alpha(l+\tau)$，从而$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(0)=0$。

(c) 当$0<\tau\le Q-1$,$k_1=k_2$,$t_1\ne t_2$时，与情况(1)中自相关互补性分析过程类似，在$Z|\tau$和$Z\nmid\tau$两种不同的情况，都有$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

(d) 当$\tau=0$, $k_1=k_2$, $t_1\ne t_2$时，注意$\varphi(l)$与$\varphi(l+\tau)$的表达式。一方面$\alpha(l)=\alpha(l+\tau)$且$l\bmod Z=(l+\tau)\bmod Z$，则$\varphi(l)=\varphi(l+\tau)$，从而$R_{a^{\varphi(l)},a^{\varphi(l+\tau)}}(0)=R_{a^{\varphi(l)}}(0)$；另一方面，由于$t_1\ne t_2$，则$\boldsymbol{b}^{t_1}$与$\boldsymbol{b}^{t_2}$为$Q\times Q$的正交矩阵$\boldsymbol{B}$的不同行，根据正交矩阵的定义，式(7)中$\sum_{l=0}^{Q-1-\tau}b_l^{t_1}\cdot(b_{l+\tau}^{t_2})^*=\sum_{l=0}^{Q-1}b_l^{t_1}\cdot(b_l^{t_2})^*=R_{\boldsymbol{b}^{t_1},\boldsymbol{b}^{t_2}}(0)=0$，则$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(0)=0$。

综合上述(a)，(b)，(c)，(d)4种情况可知，当$m_1\ne m_2$时，不同序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$，τ在$[0,Z-1]$或$[0,Q-1]$两个不同的区间范围内，有$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$，又因为$Q=HZ$，则序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$在时延$\tau\in[0,Z-1]$区间上$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

综合序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的自相关互补性和互相关互补性两方面的分析可知，集合$\boldsymbol{S}$内的序列集在时延$\tau\in[0,Z-1]$区间上相关互补。因此集合$\boldsymbol{S}$为零相关区非周期互补序列集，表示为$(HQ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^Q, Q=HZ$。 证毕

定理2 由构造方法1得到的$(HQ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^Q$, $Q=HZ$，是一个最优ZCZ非周期互补序列集。

证明 设M'是$(HQ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^Q$中序列集数目的理论上界，根据式(4)有

$$M'=Q\left\lfloor\frac{Q}{Z}\right\rfloor=Q\left\lfloor\frac{HZ}{Z}\right\rfloor=HQ \tag{8}$$

因此，$(HQ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^Q$是一个参数达到理论界的最优ZCZ非周期互补序列集。 证毕

推论1 将构造方法1得到的互补序列集$\boldsymbol{S}(HQ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^Q$中的$HQ$个序列集进行分组，每$Q$个序列集为一组，则得到$H$组序列集，记为集合$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}=\{\boldsymbol{T}^0,\boldsymbol{T}^1,\cdots,\boldsymbol{T}^{H-1}\}$，其中第$h$组记为$\boldsymbol{T}^h$，$\boldsymbol{T}^h=\{\boldsymbol{S}^{hQ},\boldsymbol{S}^{hQ+1},\cdots,\boldsymbol{S}^{hQ+Q-1}\}$，$0\le h\le H-1$，集合$\boldsymbol{T}$的性质有

(1) $\boldsymbol{T}$内每组序列集为非周期完备互补序列集，记为$\mathrm{PC}(Q,Q)$。

(2) 不同组的序列集具有长度为Z的零相关区。

证明 略。由定理1的证明过程可证。

为了方便序列元素的表示，本文中正交矩阵均以多相离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)矩阵来表示，如Q相DFT矩阵$\boldsymbol{A}=[a_j^i]_{Q\times Q}$，其中$0\le i,j\le Q-1$，$a_m^n=W_Q^{m\cdot n}=\exp\left(\dfrac{2\pi m\cdot n}{Q}\sqrt{-1}\right)$。

例1 设参数$Z=4$，在$Z|Q$的条件下，取整数Q作为正交矩阵的阶，令$Q=8$，则$H=Q/Z=2$，选用8相DFT矩阵表示8×8的正交矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$。取2×4的矩阵$\boldsymbol{U}$，2×2的矩阵$\boldsymbol{V}$，作为初始矩阵为

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0&7&1&6\\5&3&4&2\end{bmatrix},\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \tag{9}$$

根据构造方法1，可构造包含16个序列集的集合$\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{15}\}$，其中各序列集均含有8个长度为8的序列。用$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$来代替$\{W_8^0,W_8^1,W_8^2,W_8^3,W_8^4,W_8^5,W_8^6,W_8^7\}$表示每个序列中的元素。部分序列集表示为：$\boldsymbol{S}^0$={(0,0,0,0,0,0,0,0)，(0,3,1,2,5,7,4,6)，(0,6,2,4,2,6,0,4)，(0,1,3,6,7,5,4,2,0),(4,4,0,4,4,0,0), (0,7,5,2,1,3,4,6)，(0,2,6,4,6,2,0,4)，(0,5,7,6,3,1,4,2)}；$\boldsymbol{S}^1$={(0,1,2,3,4,5,6,7),(0,4,3,5,1,4,2,5)，(0,7,4,7,6,3,6,3), (0,2,5,1,3,2,2,1), (0,5,6,3,0,1,6,7)，(0,0,7,5,5,0,2,5)，(0,3,0,7,2,7,6,3)，(0,6,1,1,7,6,2,1)}；$\boldsymbol{S}^8$={(0,0,0,0,0,0,0,0)，(5,7,4,6,0,3,1,2), (2,6,0,4,0,6,2,4), (7,5,4,2,0,1,3,6)，(4,4,0,0,0,4,4,0), (1,3,4,6,0,7,5,2), (6,2,0,4,0,2,6,4)，(3,1,4,2,0,5,7,6)}。

计算$C_{\boldsymbol{S}^0}(\tau)$, $C_{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1}(\tau)$和$C_{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^8}(\tau)$的绝对值为

$$|C_{\boldsymbol{S}^0}(\tau)|=(64,0,0,0,0,0,0,0) \tag{10}$$

$$|C_{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1}(\tau)|=(0,0,0,0,0,0,0,0) \tag{11}$$

$$|C_{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^8}(\tau)|=(0,0,0,0,32,0,0,0) \tag{12}$$

3.2 构造方法2

步骤1 设Z为正整数且$Z>1$。取一个$Q\times Q$的正交矩阵$\boldsymbol{A}=[a_j^i]_{Q\times Q}$，一个$L\times L$的正交矩阵$\boldsymbol{B}=[b_{j'}^{i'}]_{L\times L}$，使$Q$，$L$分别满足$Z|Q$，$Z|L$，

令$H=Q/Z$, $N=L/Z$。$\boldsymbol{a}^i$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的第i行，a_j^i表示$\boldsymbol{a}^i$上第j列的元素，$\boldsymbol{b}^{i'}$表示矩阵$\boldsymbol{B}$的第i'行，$b_{j'}^{i'}$表示$\boldsymbol{b}^{i'}$上第j'列的元素，其中$0\le i,j\le Q-1$，$0\le i',j'\le L-1$。

步骤2　取一个$H\times Z$的矩阵$\boldsymbol{P}(0)=\left[p_j^i(0)\right]_{H\times Z}$，$0\le i\le H-1, 0\le j\le Z-1, p_j^i(0)\in\{0,1,\cdots,Q-1\}$。当$i\ne i'$或$j\ne j'$时，均有$p_j^i(0)\ne p_{j'}^{i'}(0)$，即矩阵$\boldsymbol{P}(0)$内元素互不相同。矩阵$\boldsymbol{P}(0)$的第$j$列的列向量记为$\boldsymbol{p}_j(0)$，$p_j^i(0)$表示矩阵$\boldsymbol{P}(0)$的第$i$行第$j$列的元素。

步骤3　将$\boldsymbol{p}_0(0)$中的元素按任意顺序排列得到新的列向量，记为$\boldsymbol{p}_0(1)$, $\boldsymbol{p}_1(0)$中的元素按任意顺序排列得到新的列向量，记为$\boldsymbol{p}_1(1)$，以此类推，直到$\boldsymbol{p}_{Z-1}(0)$中的元素按任意顺序排列得到新的列向量$\boldsymbol{p}_{Z-1}(1)$，将这些列向量依次排列构成一个新的$H\times Z$的矩阵，记为$\boldsymbol{P}(1)$, $\boldsymbol{P}(1)=(\boldsymbol{p}_0(1),\boldsymbol{p}_1(1),\cdots,\boldsymbol{p}_{Z-1}(1))$，按同样方式再执行$N-2$次，可以由$\boldsymbol{P}(0)$得到$N-2$个矩阵，将这些矩阵按照产生的顺序依次从左到右连接得到矩阵$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{P}(0),\boldsymbol{P}(1),\cdots,\boldsymbol{P}(N-1)]$，将$\boldsymbol{P}(n)$称为矩阵$\boldsymbol{P}$的第$n$个矩阵块，$0\le n\le N-1$。$\boldsymbol{P}(n)$的系$z$列记为$\boldsymbol{p}_z(n)$，$\boldsymbol{p}_z(n)$的第$h$行记为$p_z^h(n)$, $0\le z\le Z-1$, $0\le h\le H-1$。$\boldsymbol{P}$是一个$H\times L$的矩阵，$L=NZ$，矩阵$\boldsymbol{P}$上第i行记为$\boldsymbol{p}^i$, $\boldsymbol{p}^i$上第j列的元素记为p_j^i，其中$0\le i\le H-1, 0\le j\le L-1$。

步骤4　构造含有M个序列集的集合$\boldsymbol{S}$, $M=HL$, $\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{M-1}\right\}$，每个序列集含有$Q$个序列，即$\boldsymbol{S}^m=\left\{\boldsymbol{s}_0^m,\boldsymbol{s}_1^m,\cdots,\boldsymbol{s}_{Q-1}^m\right\}$，每个序列长度为$L$，即$\boldsymbol{s}_q^m=\left(s_q^m(0),s_q^m(1),\cdots,s_q^m(L-1)\right)$。序列中元素的构造方法为

$$s_q^m(l)=a_q^{p_l^k}\cdot b_l^t \tag{13}$$

其中，$p_l^k=p_{l \bmod Z}^k(\lfloor l/Z\rfloor)$，$k=\lfloor m/L\rfloor$，$t=m \bmod L$，$0\le m\le M-1$，$0\le q\le Q-1$，$0\le l\le L-1$。

序列$\boldsymbol{s}_q^m$的构造过程进一步解释为，可以用两个向量对应元素的乘积表示，如式(14)所示

$$\boldsymbol{s}_q^m=(a_q^{p_0^k}\cdot b_0^t, a_q^{p_1^k}\cdot b_1^t,\cdots,a_q^{p_{L-1}^k}\cdot b_{L-1}^t) \tag{14}$$

式(14)表示由正交矩阵$\boldsymbol{A}$的第q列第p_0^k行的元素，第q列第p_1^k行的元素，…，第q列第p_{L-1}^k行的元素组成的列向量与正交矩阵$\boldsymbol{B}$的第t行的行向量$\boldsymbol{b}^t=\left(b_0^t,b_1^t,\cdots,b_{L-1}^t\right)$对应元素的乘积构成的序列。

定理3　由构造方法2得到的序列集$\boldsymbol{S}$是$(HL,Z)\,\mathrm{ACS}_Q^L$，其中$Q=HZ, Z|L$。

证明　令$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$为集合$\boldsymbol{S}$中任意两个序列集，$m_1=k_1L+t_1$, $m_2=k_2L+t_2$，其中$0\le k_1$, $k_2\le H-1$，$0\le t_1,t_2\le L-1$。下面往证，τ在区间$[0,Z-1]$上，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。计算序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的非周期相关函数

$$\begin{aligned}C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)&=\sum_{q=0}^{Q-1}C_{\boldsymbol{s}_q^{m_1},\boldsymbol{s}_q^{m_2}}(\tau)\\&=\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{l=0}^{L-1-\tau}s_q^{m_1}(l)\cdot s_q^{m_2*}(l+\tau)\\&=\sum_{l=0}^{L-1-\tau}b_l^{t_1}\cdot\left(b_{l+\tau}^{t_2}\right)^*\sum_{q=0}^{Q-1}a_q^{p_l^{k_1}}\cdot\left(a_q^{p_{l+\tau}^{k_2}}\right)^*\\&=\sum_{l=0}^{L-1-\tau}b_l^{t_1}\cdot\left(b_{l+\tau}^{t_2}\right)^*\cdot R_{a^{p_l^{k_1}},a^{p_{l+\tau}^{k_2}}}(0)\end{aligned} \tag{15}$$

其中，$p_l^{k_1}=p_{l \bmod Z}^{k_1}(\lfloor l/Z\rfloor)$，$p_{l+\tau}^{k_2}=p_{(l+\tau)\bmod Z}^{k_2}((l+\tau)/Z)$。

下面首先证明当$0<\tau\le Z-1$时，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

$\forall z_1,z_2\in[0,Z-1]$且$z_1\ne z_2$, $\forall n_1,n_2\in[0,N-1]$, $\forall h_1,h_2\in[0,H-1]$，由矩阵$\boldsymbol{P}$的各个矩阵块的构造过程可知，列向量$\boldsymbol{p}_{z_1}(n_1)$由$\boldsymbol{p}_{z_1}(0)$任意排列得到，列向量$\boldsymbol{p}_{z_2}(n_2)$由$\boldsymbol{p}_{z_2}(0)$任意排列得到。根据构造方法2中的步骤2矩阵$\boldsymbol{P}(0)$内元素互不相等，因此若$z_1\ne z_2$，则必然有$p_{z_1}^{h_1}(n_1)\ne p_{z_2}^{h_2}(n_2)$。当$0<\tau\le Z-1$时，可知$l \bmod Z\ne(l+\tau)\bmod Z$，因此$p_{l \bmod Z}^{k_1}(\lfloor l/Z\rfloor)\ne p_{(l+\tau)\bmod Z}^{k_2}((l+\tau)/Z)$，即$p_l^{k_1}\ne p_{l+\tau}^{k_2}$。又因为$p_l^{k_1},p_{l+\tau}^{k_2}\in[0,Q-1]$，结合正交矩阵的定义可知，式(15)中，$R_{a^{p_l^{k_1}},a^{p_{l+\tau}^{k_2}}}(0)=0$，进而$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。因此当$0<\tau\le Z-1$时，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

利用以上结论，对序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的自相关互补性和互相关互补性进行分析。

(1) 自相关互补性分析：当$0<\tau\le Z-1$, $m_1=m_2$，即$k_1=k_2$且$t_1=t_2$时，由上述证明可知，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau)=0$。

(2) 互相关互补性分析：当$0\le\tau\le Z-1$, $m_1\ne m_2$时，分以下4种情况讨论。

(a) 当$k_1=k_2$且$t_1\ne t_2$, $0<\tau\le Z-1$时，由上述证明可知，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$。

(b) 当$k_1=k_2$且$t_1\ne t_2,\tau=0$时，$\boldsymbol{b}^{t_1}$与$\boldsymbol{b}^{t_2}$为正交矩阵$\boldsymbol{B}$的不同行。根据正交矩阵的定义可知，式(15)中，$\sum_{l=0}^{L-1-\tau}b_l^{t_1}\cdot\left(b_{l+\tau}^{t_2}\right)^*=\sum_{l=0}^{L-1}b_l^{t_1}\cdot\left(b_l^{t_2}\right)^*=R_{\boldsymbol{b}^{t_1},\boldsymbol{b}^{t_2}}(0)=0$，因此$C_{S^{m_1},S^{m_1}}(0)=0$。

(c) 当$k_1\ne k_2$, $0<\tau\le Z-1$时，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_1}}(\tau)=0$。

(d) 当$k_1\ne k_2$, $\tau=0$时，$p_{l+\tau}^{k_2}=p_{l \bmod Z}^{k_2}(\lfloor l/Z\rfloor)$，

又因为$p_l^{k_1}=p_{l\bmod Z}^{k_1}(\lfloor l/Z\rfloor)$，可见$p_{l+\tau}^{k_2}$与$p_l^{k_1}$为矩阵$\boldsymbol{P}(\lfloor l/Z\rfloor)$中同一列上不同行的两个元素。根据构造方法2中的步骤3可知，各矩阵块内的元素均不相同，则$p_{l+\tau}^{k_2}\neq p_l^{k_1}$。根据正交矩阵的定义，式(15)中，$R_{a^{p_l^{k_1}},a^{p_{l+\tau}^{k_2}}}(0)=0$，因此$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(0)=0$。

综合以上(a) (b) (c) (d)4种情况可知，当$m_1\neq m_2$,$0\le\tau\le Z-1$时，$C_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau)=0$，即序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$在时延$\tau\in[0,Z-1]$区间上互相关互补。

综合序列集$\boldsymbol{S}^{m_1}$与$\boldsymbol{S}^{m_2}$的自相关互补性和互相关互补性两方面的分析，集合$\boldsymbol{S}$内各序列集在时延$\tau\in[0,Z-1]$区间上相关互补，则$\boldsymbol{S}$为非周期互补序列集$(HL,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$, $Q=HZ$, $Z|L$。　证毕

定理4　由构造法2得到的$(HL,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$参数达到理论界，是最优零相关区非周期互补序列集，其中$Q=HZ$,$Z|L$。

证明　设M'是$(HL,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$中序列集数目的理论上界，则

$$M'=Q\left\lfloor\frac{L}{Z}\right\rfloor=HZ\left\lfloor\frac{L}{Z}\right\rfloor=HL \tag{16}$$

因此，$(HL,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$为参数达到理论界的最优零相关区非周期互补序列集。　证毕

例2　设参数$Z=3$，取整数Q, L作为正交矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$的阶且$Z|Q$, $Z|L$，令$Q=6$, $L=9$则$H=Q/Z=2$, $N=L/Z=3$。选用6相DFT矩阵表示6×6的正交矩阵$\boldsymbol{A}$，9相DFT矩阵表示9×9的正交矩阵$\boldsymbol{B}$。取2×3的矩阵$\boldsymbol{P}(0)$，根据$\boldsymbol{P}(0)$经过调整后可生成2^6种不同的2×9的矩阵，以式(17)中2×9的矩阵$\boldsymbol{P}$为例

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}(0)=\begin{bmatrix}3&0&5\\2&4&1\end{bmatrix},\\&\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3&0&5&3&4&1&2&4&5\\2&4&1&2&0&5&3&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{17}$$

根据构造方法2，得到包含18个序列集的集合$\boldsymbol{S}$，即$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{17}\}$，其中各序列集均含有6个长度为9的序列。根据式(13)，取6,9的最小公倍数$[6,9]=18$，因此用$\{0,1,\cdots,17\}$来代替$\{W_{18}^0,W_{18}^1,\cdots,W_{18}^{17}\}$ $t\}$表示序列中的元素。部分序列集表示为：$\boldsymbol{S}^0$ ={(0,0,0,0,0,0,0,0,0), (9,0,15,9,12,3,6,12,15), (0,0,12,0,6,6,12,6,12), (9,0,9,9,0,9,0,0,9), (0,0,6,0,12,12,6,12,6), (9,0,3,9,6,15,12,6,3)}; $\boldsymbol{S}^1$ ={(0,2,4,6,8,10,12,14,16), (9,2,1,15,2,13,0,8,13), (0,2,16,6,14,16,6,2,10), (9,2,13,15,8,1,12,14,7), (0,2,10,6,2,4,0,8,4), (9,2,7,15,14,7,6,2,1)}。

计算$C_{\boldsymbol{S}^0}(\tau)$和$C_{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1}(\tau)$的绝对值为

$$|C_{\boldsymbol{S}^0}(\tau)|=(54,0,0,12,0,0,6,0,0) \tag{18}$$

$$\left|C_{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1}(\tau)\right|=(0,0,0,2,0,0,6,0,0) \tag{19}$$

4　零相关区非周期互补序列集构造方法的比较及参数分析

表1对已有参考文献和本文所提ZACSS的多种不同构造方法从构造基础、构造结果参数，是否达到最优及ZCZ长度等几个方面进行了比对。文献[13]将2元ZCZ非周期互补序列集作为初始序列，通过表1可见，构造结果的参数与初始序列相同，因而参数的性能取决于初始序列。文献[16]将完备序列集经过n次迭代，构造了2^n个组内最优的互补序列集，组间的序列集的ZCZ长度被限定为2的整数次幂，不能灵活选择。文献[19]基于Hadamard矩阵和长度为奇数的最佳2元ZCZ互补序列偶，构造的2元ZACSS序列长度被限定为奇数，且ZCZ长度取决于初始互补序列偶。文献[10,11,14]均为正交矩阵为基序列，相对于完备互补序列集与已有的ZACSS，利用正交矩阵的多样性可以构造出更加丰富的ZACSS，而且受限更小。文献[10]构造了组间互补序列集，然而组内包含的序列集的个数、序列集内序列的数目以及序列的长度均为N，由于在MC-CDMA系统中，序列需要子载波传输，因此，序列长度以及序列的数目受到了CDMA资源的限制。文献[11]基于有限域GF(p)和GF(p^n)构造了最优的ZACSS，零相关区的长度相对较灵活，然而正交矩阵的阶数与ZCZ长度Z的比值被限定为素数p和p^n。文献[14]以非周期互补序列集为初始序列，当初始序列为完备互补序列集，即$M=N$时，构造的ZACSS的参数达到理论界。

本文以正交矩阵为基序列，除此之外在构造过程中还增加了多个灵活多变的初始矩阵，相对于文献[12]只能利用不同的正交序列集，具有更多的可选择因素，因此可以构造出更多最优ZACSS。为了增加保密性，可利用伪随机序列，如m序列发生器的状态序列来设计生成初始矩阵。另外，通过构造方法1还可以得到多组ZACSS，不仅组内达到最优，而且不同组的序列集具有长度为Z的零相关区。在参数灵活性方面，由于正交矩阵的阶可以为任何正整数，因此在正交矩阵的阶数可以被Z整除的条件下，零相关区长度Z可以灵活选择，从而满足CDMA系统中对不同同步时延的要求。

5　结束语

本文首先利用矩阵变换，通过正交矩阵构造了

表 1 ZACSS构造方法的比较

文献构造方法	构造基础	构造结果参数	是否达到最优	ZCZ长度
文献[10]	两个$N\times N$的正交矩阵	$([N/Z,N],Z)-\mathrm{IGC}_N^N$	是	灵活：Z
文献[11]构造方法1	$Q\times Q$和$L\times L$的正交矩阵，$Q=pZ$，$L=NZ$	$(pNZ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$	是	灵活：Z
文献[11]构造方法2	$Q\times Q$和$L\times L$的正交矩阵，$Q=p^nZ$，$L=NZ$	$(p^nNZ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$	是	灵活：Z
文献[13]	2元$(T,Z)\ \mathrm{ACS}_M^N$	4元$(T,Z)\ \mathrm{ACS}_M^N$	$T=M\lfloor N/Z\rfloor$时最优	固定：Z
文献[14]构造方法1	$D\times D$的正交矩阵，$(M,L)\ \mathrm{ACS}_N^L$且$\gcd(L,D)=1$	$(MD,L)\ \mathrm{ACS}_N^{LD}$	$M=N$时最优	固定：L
文献[16]	完备互补序列集PC(M,L)	$([2^n,2^nM],Z)\ \mathrm{IaGC}_{2^nM}^{2^nL}$	组内最优	$\{1,2,4,\cdots,2^{n-1}\}$
文献[19]	$2^n\times 2^n$Hadamard矩阵，长度为N，ZCZ长度为Z 的2元互补序列偶，$N=2^\alpha 10^\beta 26^\gamma+1$	$(2^{n+1},Z)\ \mathrm{ACS}_{2^{n+1}}^N$	是	固定：Z
本文构造方法1	矩阵$\boldsymbol{U}_{H\times Z}$和$\boldsymbol{V}_{H\times H}$，两个$Q$阶正交矩阵,$Z\|Q$	$(HQ,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^Q$	是	灵活：可任意
本文构造方法2	正交矩阵$\boldsymbol{A}_{Q\times Q}$和$\boldsymbol{B}_{L\times L}$,$L=NZ,Q=HZ$	$(HL,Z)\ \mathrm{ACS}_Q^L$	是	灵活：可任意

一类参数最优的零相关区非周期互补序列集，零相关区长度可以灵活选择。在此基础上进一步分组，构造了多个组内完全互补的序列集，不同组的序列集具有长度为Z的零相关区，可以帮助解决多小区间的干扰问题。此外，本文还利用不同的矩阵变换方式，构造了另外一类零相关区非周期互补序列集，参数也达到了理论界，且零相关区长度可以灵活选择。

参 考 文 献

[1] GOLAY M. Complementary series[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1961, 7(2): 82–87. doi: 10.1109/TIT.1961.1057620.

[2] TSENG C C and LIU C. Complementary sets of sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(5): 644–652. doi: 10.1109/TIT.1972.1054860.

[3] FAN Pingzhi, YUAN Weina, and TU Yifeng. Z-complementary binary sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(8): 509–512. doi: 10.1109/LSP.2007.891834.

[4] 张振宇, 陈卫, 曾凡鑫, 等. 多载波码分多址通信系统中抑制干扰的序列设计[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(10): 2354–2358. doi: 10.3724/SP.J.1146.2008.01388.

ZHANG Zhenyu, CHEN Wei, ZENG Fanxin, *et al*. Construction of interference-resistant sequences for multi-carrier CDMA communication systems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(10): 2354–2358. doi: 10.3724/SP.J.1146.2008.01388.

[5] TU Yifeng, FAN Pingzhi, LI Hao, *et al*. A simple method for generating optimal Z-periodic complementary sequence set based on phase shift[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(10): 891–893. doi: 10.1109/LSP.2010.2068288.

[6] LI Yubo, XU Chengqian, JING Nan, *et al*. Constructions of Z-periodic complementary sequence set with flexible flock size[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(2): 201–204. doi: 10.1109/LCOMM.2013.121813.132021.

[7] KE Pinhui and ZHOU Zhengchun. A generic construction of Z-periodic complementary sequence sets with flexible flock size and zero correlation zone length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1462–1466. doi: 10.1109/LSP.2014.2369512.

[8] 白子祎, 刘凯. 组间零相关区周期互补序列集的构造[J/OL]. 燕山大学学报, https://kns.cnki.net/kcms/detail/13.1219.N.20210512.0928.026.html, 2021.

BAI Ziyi and LIU Kai. Construction of inter-group zero correlation zone periodic complementary sequence sets[J/OL]. *Journal of Yanshan University*, https://kns.cnki.net/kcms/detail/13.1219.N.20210512.0928.026.html, 2021.

[9] LIU Kai and NI Jia. Construction of gaussian integer periodic complementary sequence set with zero correlation zone[C]. 2020 International Symposium on Automation, Information and Computing (ISAIC 2020), Beijing, China, 2020: 012177 . doi: 10.1088/1742-6596/1828/1/012177.

[10] 李玉博, 田立影. 基于正交矩阵构造非周期组间互补序列集[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(8): 2028–2032. doi: 10.11999/JEIT171005.

LI Yubo and TIAN Liying. Construction of inter-group complementary sequence sets based on orthogonal matrices[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(8): 2028–2032. doi: 10.11999/JEIT171005.

[11] LI Yubo, SUN Jia'an, XU Chengqian, *et al*. Constructions

of optimal zero correlation zone aperiodic complementary sequence sets[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2017, E100-A(3): 908–912. doi: 10.1587/transfun.E100.A.908.

[12] 陈晓玉, 苏荷茹, 高茜超. 一类最优的零相关区非周期互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(2): 461–466. doi: 10.11999/JEIT190703.

CHEN Xiaoyu, SU Heru, and GAO Xichao. Construction of optimal zero correlation zone aperiodic complementary sequence sets[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(2): 461–466. doi: 10.11999/JEIT190703.

[13] ZENG Fanxin, ZENG Xiaoping, ZHANG Zhenyu, *et al*. New construction method for quaternary aperiodic, periodic, and Z-complementary sequence sets[J]. *Journal of Communications and Networks*, 2012, 14(3): 230–236. doi: 10.1109/JCN.2012.6253082.

[14] CHEN Xiaoyu, LI Guanmin, and LI Huanchang. Two constructions of zero correlation zone aperiodic complementary sequence sets[J]. *IET Communications*, 2020, 14(4): 556–560. doi: 10.1049/iet-com.2019.0599.

[15] LI Xudong, FAN Pingzhi, TANG Xiaohu, *et al*. Quadriphase *Z*-complementary sequences[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2010, E93-A(11): 2251–2257. doi: 10.1587/transfun.E93.A.2251.

[16] 张振宇, 曾凡鑫, 宣贵新, 等. MC-CDMA系统中具有组内互补特性的序列构造[J]. 通信学报, 2011, 32(3): 27–32,39. doi: 10.3969/j.issn.1000-436X.2011.03.004.

ZHANG Zhenyu, ZENG Fanxin, XUAN Guixin, *et al*. Design of sequences with intra-group complementary properties for MC-CDMA systems[J]. *Journal on Communications*, 2011, 32(3): 27–32,39. doi: 10.3969/j.issn.1000-436X.2011.03.004.

[17] WU S W and CHEN Chaoyu. Optimal Z-complementary sequence sets with good peak-to-average power-ratio property[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(10): 1500–1504. doi: 10.1109/LSP.2018.2864705.

[18] XIE Chunlei, SUN Yu, and MING Yang. Constructions of optimal binary Z-complementary sequence sets with large zero correlation zone[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2021, 28: 1694–1698. doi: 10.1109/LSP.2021.3104739.

[19] ADHIKARY A R and MAJHI S. New construction of optimal aperiodic Z-complementary sequence sets of odd-lengths[J]. *Electronics Letters*, 2019, 55(19): 1043–1045. doi: 10.1049/el.2019.1828.

崔　莉：女，博士生，研究方向为扩频序列设计.

许成谦：男，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、密码学、信号设计.

责任编辑：余　蓉