第44卷 第11期 电 子 与 信 息 学 报 Vol. 44No. 11
2022年11月 Journal of Electronics & Information Technology Nov. 2022

周期准互补序列集构造法

陈晓玉* 彭秀英 王成瑞 崔 莉

(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

(河北省信息传输与信号处理重点实验室 秦皇岛 066004)

摘 要：该文基于2元序列支撑集和低相关序列集，提出一种新的周期准互补序列集构造框架。在此框架基础上，分别利用最优4元序列族A、族D和Luke序列集提出了3类渐近最优和渐近几乎最优周期准互补序列集，序列集参数由2元序列和低相关序列集共同决定。与传统的完备互补序列集相比，所构造的准互补序列集具有更多的序列数目，应用到多载波扩频通信系统中可以支持更多的用户。

关键词：准互补序列集；2元序列；低相关；渐近最优

中图分类号：TN911.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2022)11-4034-07

DOI: 10.11999/JEIT210881

Constructions of Periodic Quasi-complementary Sequence Sets

CHEN Xiaoyu PENG Xiuying WANG Chengrui CUI Li

(*College of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

(*Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Based on the support of binary sequences and low correlation sequence sets, a new framework for constructing periodic quasi-complementary sequence sets is proposed. Based on this framework, three classes of asymptotically optimal and asymptotically almost optimal periodic quasi-complementary sequence sets are proposed by using the optimal quaternary sequence family A, family D and Luke sequence set, respectively. In addition, the parameters of sequence set are determined by the binary sequence and the low correlation sequence set. Compared with the traditional complete complementary sequence set, the quasi-complementary sequence set includes more sequences, which can support more users in multi-carrier spread spectrum communication system.

Key words: Quasi-complementary sequence set; Binary sequence; Low correlation; Asymptotically optimal

1 引言

传统互补序列集又称完备互补序列集(Perfect Complementary Sequence Set, PCSS)，是由多个完备互补序列组成，每个完备互补序列异相自相关函数值的和与互相关函数值的和为0[1,2]。由于其完备互补序列集具有理想的相关特性，因此可以有效消除通信系统中的多址干扰(Multi-Access Interference, MAI)和多径干扰(Multi-Path Interference, MPI)[3]。通常，一个完备互补序列用一个2维矩阵表示，完备互补序列的子序列组成矩阵的行。在实际应用中，首先给每个用户分配一条互补序列，然后子序列发送到子载波信道上进行扩频，最后多个载波信号叠加同时发送出去[4]。因此，互补序列的数量决定了系统所能支持的用户数[5]。然而，根据已有理论界可知，传统互补序列集的序列数量不能超过子序列数量，从而使系统所能支持的用户数受到了限制。

为了克服传统互补序列的缺陷以达到支持海量用户同时接入的目的，零相关区互补序列集[6–9]、低相关区互补序列集[10]和准互补序列集[11–14]的构造方法被提出。低相关区互补序列集(Low Correlation Zone Complementary Sequence Set, LCZ-CSS)是指在零点附近区域内异相相关函数值的和是一个很小的值，这个区域称为低相关区。当异相相关函数值为0时，被称为零相关区互补序列集

收稿日期：2021-08-26；改回日期：2022-05-09；网络出版：2022-05-21

*通信作者： 陈晓玉 chenxiaoyu@ysu.edu.cn

基金项目：河北省自然科学基金(F2021203078)，河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2022026)

Foundation Items: The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2021203078), The Science and Technology Project of Hebei Education Department (ZD2022026)

(Zero Correlation Zone Complementary Sequence Set, ZCZ-CSS)。准互补序列集(Quasi-Complementary Sequence Set, QCSS)是在整个周期内异相自相关函数值的和与互相关函数值的和为一个很小的值$\delta(\delta\neq 0)$。值得注意的是，当$\delta=0$时，序列集为完备互补序列集。LCZ-CSSs和ZCZ-CSSs的研究成果较为丰富，QCSSs的研究成果还相对较少。Liu等人[11]基于Singer差集构造了一类最优和一类几乎最优周期QCSSs。文献[12]改进了文献[11]的构造方法，基于差集和几乎差集提出了几类最优和几乎最优周期QCSSs的构造方法。文献[13]利用有限域上的加法和乘法特性提出了一种周期QCSS的构造框架，并基于这个框架给出了5种周期QCSSs的构造方法。文献[14]基于分圆类提出了一类渐近最优周期QCSSs的构造方法。

本文首先基于2元序列支撑集和低相关序列集提出了一种新的周期QCSS的构造框架。此框架构造的关键是找到一组合适的2元序列和低相关序列集，使2元序列长度L与低相关序列集长度N满足条件$L|N$。只要给定一组满足条件的序列集即可得到一类周期QCSS。其次，基于提出的框架结构，给出了3组满足条件的序列集，即2元m序列支撑集分别结合最优4元序列族A和族D；2元Sidelnikov序列支撑集结合Luke序列集，从而完成了3类周期QCSSs的构造。

2 基本概念

定义1 两个长度为N的复值序列$u=(u_0,u_1,\cdots,u_{N-1})$和$v=(v_0,v_1,\cdots,v_{N-1})$，周期相关函数定义为

$$R_{u,v}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}u_t\cdot v^*{}_{\langle t+\tau\rangle_N} \tag{1}$$

其中，$()^*$表示复数共轭，$\langle\rangle_N$表示模N运算。特别注意，当$u=v$时，$R_{u,u}(\tau)$称为序列u的周期自相关函数，记为$R_u(\tau)$。

定义2 序列集$C=\{C^0,C^1,\cdots,C^{M-1}\}$是一个包含$M$个序列的集合，每个序列$C^m=\{c_0^m,c_1^m,\cdots,c_{K-1}^m\}t\}$包含$K$个子序列，每个子序列$c_k^m=\left(c_{k,0}^m,c_{k,1}^m,\cdots,c_{k,N-1}^m\right)$的长度为$N$。任取两个序列$C^{m_1},C^{m_2}\in C$，序列的相关函数表示为

$$\left|R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)\right|=\left|\sum_{m=0}^{M-1}R_{C_k^{m_1},C_k^{m_2}}(\tau)\right|\le\delta_{\max} \tag{2}$$

其中，$\delta_{\max}=\{\delta_a,\delta_b\}$表示为序列集$C$的最大周期相关函数幅值，$\delta_a=\max\{|R_{C^m}(\tau)|:0<\tau\le N-1\}$表示为序列集$C$的最大周期自相关函数幅值，$\delta_b=\max\left\{\left|R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)\right|:m_1\neq m_2,0\le\tau\le N-1\right\}$表示为序列集$C$的最大周期互相关函数幅值。

当$0<\delta_{\max}\ll KN$时，序列集C被称为周期准互补序列集，表示为$(M,K,N,\delta_{\max})-\mathrm{QCSS}$；当$\delta_{\max}=0$时，序列集$C$称为完备互补序列集。

定义3[10] 若序列集C是一个参数为$(M,K,N,\delta_{\max})-\mathrm{QCSS}$的周期准互补序列集，则序列集$C$的相关理论下界定义为

$$\delta_{\max}\ge KN\sqrt{\frac{M/K-1}{MN-1}} \tag{3}$$

其最优因子ρ定义为

$$\rho=\frac{\delta_{\max}}{KN\sqrt{\dfrac{M/K-1}{MN-1}}} \tag{4}$$

根据式(3)得到$\rho\ge 1$。如果$\rho=1$，则称序列集C为最优周期准互补序列集；若$1<\rho\le 2$，则称其为几乎最优周期准互补序列集。

定义4 令p是一个素数，n为一个正整数，迹函数是一个从F_{p^n}到F_p的线性映射，将其定义为

$$\mathrm{tr}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}x^{p^i},x\in F_{p^n} \tag{5}$$

定义5 取一个素数p和一个正整数n，令$q=p^n$, $Z_{q-1}=\{0,1,\cdots,q-2\}$是一个模$q-1$的整数集合，令$\alpha$是有限域$F_p$的本原元，对于$i\in Z_{q-1}$, F_q^*上的乘法特性ψ定义为

$$\psi_i\left(\alpha^t\right)=\omega_{q-1}^{it},k\in Z_{q-1} \tag{6}$$

其中，$\omega_{q-1}=\exp(2\pi i/(q-1))$, $i=\sqrt{-1}$, $F_q^*=F_q\backslash\{0\}$；当$i=0$时，$\psi_0(x)=1$。

定义6 令集合$D=\{d_0,d_1,\cdots,d_{K-1}\}\subseteq Z_N$是具有$K$个不同整数的集合，其中$K\le N$，2元序列$a=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$称为集合$D$的特征序列，其中

$$a_t=\begin{cases}1,t\in D\\0,其他\end{cases},0\le t\le N-1 \tag{7}$$

集合D称为序列a的支撑集。$wt(a)=|D|=K$称为序列a的汉明重量，$|D|$表示集合D的基数。

3 新的周期准互补序列集构造框架

本节基于2元序列支撑集和低相关序列集提出了一种新的周期QCSS构造框架。

步骤1 取一个长度为L的2元序列$a=(a_0,a_1,\cdots,a_{L-1})$，令集合$D=(d_0,d_1,\cdots,d_{K-1})$是2元序列$a$的支撑集。

步骤2 取一个包含M个序列的低相关序列集$Q=\{q^0,q^1,\cdots,q^{M-1}\}$，每个序列$q^m=(q_0^m,q_1^m,\cdots,q_{N-1}^m)$的长度为$N$，序列集$Q$必须满足以下条件：

(1) 每个序列的长度N满足$L|N$；

(2) 序列集的同相互相关函数值满足$|R_{q^{m_1},q^{m_2}}(0)|=\alpha_0$，其中，$m_1\neq m_2$；

(3) 序列集的最大异相相关函数值满足$\max\{|R_{q^{m_1},q^{m_2}}(\tau)|\}=\alpha_{\max}$，其中，$\tau\neq 0$；

步骤3 构造一个包含M个序列的序列集$C=\{C^0,C^1,\cdots,C^{M-1}\}$，每个序列$C^m=\{c_0^m,c_1^m,\cdots,c_{K-1}^m\}$包含$K$个子序列，每个子序列$c_k^m=\{c_k^m(0),c_k^m(1),\cdots,c_k^m(N-1)\}$长度为$N$，具体构造方法为

$$c_k^m(t)=q^m(t)\cdot\psi_{d_k}(\alpha^t) \tag{8}$$

其中，$0\le k\le K-1, 0\le t\le N-1$。

定理1 上述方法得到的序列集C是一个参数为$(M,K,N,\delta_{\max})-$QCSS的周期准互补序列集。

证明 在集合C中任取两个序列C^{m_1}和C^{m_2}，其中$0\le m_1,m_2\le M-1$，计算序列C^{m_1}和C^{m_2}之间的相关函数为

$$\begin{aligned}R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)&=\sum_{k=0}^{K-1}R_{c_k^{m_1},c_k^{m_2}}(\tau)\\&=\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t=0}^{N-1}q^{m_1}(t)\cdot q^{m_2}(t+\tau)^*\\&\quad\cdot\psi_{d_k}(\alpha^t)\cdot\psi_{d_k}(\alpha^{t+\tau})^*\\&=R_{q^{m_1},m_2}(\tau)\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^{-\tau})\end{aligned} \tag{9}$$

分以下两种情况讨论序列间相关性。

情况1 当$0\le m_1\neq m_2\le M-1$且$\tau=0$时

$$\begin{aligned}&\max|R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)|\\&=\max\left|R_{q^{m_1},m_2}(0)\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^0)\right|\\&=R_1\end{aligned} \tag{10}$$

情况2 当$0<\tau\le N-1$时

$$\begin{aligned}&\max|R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)|\\&=\max\left|R_{q^{m_1},m_2}(\tau)\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^{-\tau})\right|\\&=\left|\alpha_{\max}\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^{-\tau})\right|\\&=R_2\end{aligned} \tag{11}$$

综上两种情况可知，序列集C的最大相关函数幅值$\delta_{\max}=\max\{R_1,R_2\}$。 证毕

本节提出一种周期QCSS的构造框架，构造的目标序列集C的参数由2元序列a的支撑集和低相关序列集Q共同决定。构造的关键在于当给定一个具体的2元序列时，需要找到满足条件的低相关序列集Q，选取的序列不同，则构造的QCSSs的参数也不同。

4 周期准互补序列集的构造

4.1 基于2元m序列构造周期QCSS

本节在上述框架的基础上利用2元m序列支撑集分别结合最优4元序列族A和族D构造了两类渐近几乎最优周期QCSSs。

引理1[11] 族$A=\{v_0,v_1,\cdots,v_{2^n}\}$是包含$2^n+1$个序列的集合。每个序列的长度为$2^n-1$，特别注意，序列$v_0$是一个2元$m$序列且异相自相关函数值为$-1$。族$A$的最大相关函数幅值为

$$\alpha_{\max}=1+2^{n/2} \tag{12}$$

$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2^n}\}$是族$A$的子集，且具有如式(13)的性质

$$R\left(\omega_4^{v_{k_1}},\omega_4^{v_{k_2}};0\right)=-1 \tag{13}$$

其中，$1\le k_1,k_2\le 2^n$。

引理2[11] 族$D=\{v_0,v_1,\cdots,v_{2^n-1}\}$是包含$2^n$个序列的集合，每个序列的长度为$2(2^n-1)$。族$D$的最大相关函数幅值为

$$\alpha_{\max}=2+2^{\frac{n+1}{2}} \tag{14}$$

且族D具有如式(15)的性质

$$R\left(\omega_4^{v_{k_1}},\omega_4^{v_{k_2}};0\right)\in\{0,-2,2\} \tag{15}$$

其中，$0\le k_1\neq k_2\le 2^n-1$, $\tau=0$或者$\tau=2^n-1$。

引理3[13] 设一个正整数n，令$q=2^n$, $u=(u_0,u_1,\cdots,u_{L-1})$是一个长度为$L=q-1$的2元$m$序列，对于任意的$l_{\mathrm{molL}}\neq 0$，则有

$$\left|\sum_{i=0}^{L-1}u_i\psi_i(\alpha^l)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{L+1} \tag{16}$$

引理4[13] 设序列$a=(a_0,a_1,\cdots,a_{L-1})$是一个长度为$L$的2元序列，其中$a_i=(u_i\cdot v_i)_{\bmod 2}$，序列$u$和序列$v$是长度为$L$的2元$m$序列。$D=\{d_0,d_1,\cdots,d_{K-1}\}$为序列$a$的支撑集，序列$a$的汉明重量$wt(a)=\mathrm{N}_v^\tau(1,1)=(L+1)/4$，则$K=(L+1)/4$，对于所有的$l_{\mathrm{molL}}\neq 0$有

$$\begin{aligned}2\sum_{i=0}^{L-1}u_iv_i\psi_i(\alpha^l)&=\sum_{i=0}^{L-1}(u_i+v_i)\psi_i(\alpha^l)\\&\quad+\sum_{i=0}^{L-1}u_i\psi_i(\alpha^l)+\sum_{i=0}^{L-1}v_i\psi_i(\alpha^l)\end{aligned} \tag{17}$$

方法1

步骤1 取一个正整数n，令$L=2^n-1$，u和

v是两个长度为L的2元m序列。构造一个2元m序列$a=(a_0,a_1,\cdots,a_{L-1})$，其中

$$a_i=(u_i\cdot v_i)_{\bmod 2}, 0\le i\le L-1 \tag{18}$$

步骤2　取2元m序列a的支撑集$D=(d_0,d_1,\cdots,d_{K-1})$作为框架中2元序列支撑集。

步骤3　取最优4元序列族A的子集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2^n}\}$作为框架中低相关序列集，根据式(8)，构造周期QCSS。

定理2　方法1得到一个参数为$(M,K,N,\delta_{\max})-$QCSS的周期准互补序列集C^1且参数渐近达到几乎最优，其中，$M=2^n$，$K=(L+1)/4=2^{n-2}, N=2^n-1, \delta_{\max}=3\left(2^{n/2-2}+2^{n-2}\right)$。

证明　在集合C^1中任取两个序列C^{m_1}和C^{m_2}，分以下两种情况讨论序列间的相关性。

情况1　当$\tau=0$时，由式(10)和式(13)得

$$\max\left|R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)\right|=|\alpha_0|\cdot\left|\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}\left(\alpha^{-\tau}\right)\right|=2^{n-2} \tag{19}$$

情况2　当$0<\tau\le N$时，由式(16)和式(17)得

$$\begin{aligned}&\max\left|R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)\right|=\alpha_{\max}\left|\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}\left(\alpha^{-\tau}\right)\right|\\&=\alpha_{\max}\left|\sum_{i=0}^{L-1}a_i\psi_i\left(\alpha^{-\tau}\right)\right|\\&\le\frac{\alpha_{\max}}{2}\cdot\left(\begin{aligned}&\left|\sum_{i=0}^{L-1}(u_i+v_i)\psi_i\left(\alpha^{-\tau}\right)\right|+\left|\sum_{i=0}^{L-1}u_i\psi_i\left(\alpha^{-\tau}\right)\right|\\&+\left|\sum_{i=0}^{L-1}v_i\psi_i\left(\alpha^{-\tau}\right)\right|\end{aligned}\right)\\&\le 3\left(2^{n/2-2}+2^{n-2}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

综上可得，序列集C^1的最大相关函数幅值$\delta_{\max}=3\left(2^{n/2-2}+2^{n-2}\right)$。计算序列集的最优因子

$$\rho\le\frac{\delta_{\max}}{KN\sqrt{\dfrac{M/K-1}{MN-1}}}\approx\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}+1\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2^{n/2}}+1\right)。$$

进一步可以得到$\underset{n\to\infty}{\rho}=\sqrt{3}$，可见序列集$C^1$是渐近几乎最优的周期QCSS。　证毕

表1提供了当$6\le n\le 10$时，由方法1得到的QCSS参数，由表1可得随着n的增加ρ渐近达到$\sqrt{3}$，方法1构造的序列集为渐近几乎最优QCSS。

方法2

步骤1,2　同方法1。

步骤3　取最优4元序列族D作为框架步骤2中低相关性序列集，根据式(8)构造周期QCSS。

定理3　方法2得到一个参数为$(M,K,N,\delta_{\max})-$QCSS的周期准互补序列集C^2且参数渐近达到几乎最优，其中，$M=2^n$，$K=(L+1)/4=2^{n-2}, N=2\left(2^n-1\right), \delta_{\max}=3\left(2^{n/2-1}+2^{n-3/2}\right)$。

证明过程与定理2类似，在此省略。

表2提供了当$7\le n\le 11$时，由方法2得到的QCSS参数，由表2可得随着n的增加ρ渐近达到$\sqrt{3}$，方法2构造的序列集为渐近几乎最优QCSS。

4.2 基于2元Sidelnikov序列构造QCSS

定义7　Luke序列集是一个包含N个序列的集合，定义为

$$\tilde{L}_m^r=\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi\left(\frac{b_m}{p}+\frac{mr}{N}\right)} \tag{21}$$

其中，p是任意素数，n是一个正整数，且$q=p^n$，$N=q-1$。$\{b_m\}$是一个长度为N的2元m序列。

引理5[15]　Luke序列集具有以下性质：

(1) 对于$0\le r\le N-1$且$0<\tau\le N-1$，有

$$\left|R_{\tilde{L}^r,\tilde{L}^r}(\tau)\right|=1 \tag{22}$$

(2) 对于$0\le r\ne s\le N-1$，有

$$\left|R_{\tilde{L}^r,\tilde{L}^s}(\tau)\right|=\begin{cases}0, & \tau=0\\ \sqrt{N+1}, & 0<\tau\le N-1\end{cases} \tag{23}$$

方法3

步骤1　取一个奇素数p和一个正整数n，令$q=p^n$且α是F_p的本原元。构造一个长度为$L=q-1$的2元Sidelnikov序列$a=(a_0,a_1,\cdots,a_{L-1})$，其中

$$a_i=\log_\alpha(\alpha^i+1), 0\le i\le N-1 \tag{24}$$

步骤2　取2元Sidelnikov序列a的支撑集$D=(d_0,d_1,\cdots,d_{K-1})$作为框架中2元序列支撑集。

步骤3　取Luke序列集作为框架中的低相关序列集，根据式(8)构造周期QCSS。

表1　方法1周期准互补序列集参数

n	M	K	N	$\delta_{\max}$	ρ
6	64	16	63	54.0	1.9486
7	128	32	127	104.5	1.8851
8	256	64	255	204.0	1.8403
9	512	128	511	400.9	1.8086
10	1024	256	1023	792.0	1.7862

表2　方法2周期准互补序列集参数

n	M	K	N	$\delta_{\max}$	ρ
7	128	32	254	152.7	1.9562
8	256	64	510	295.5	1.8888
9	512	128	1.22	577.0	1.8421
10	1024	256	2046	1134.0	1.8095
11	2048	512	4094	2240.0	1.7866

定理4 方法3得到一个参数为$(M,K,N,\delta_{\max})-$QCSS的周期准互补序列集C^3且参数渐近达到最优，其中，$M=N$，$K=N/2$，$N=p^n-1$，$\delta_{\max}=(q+\sqrt{q})/2$。

证明 在集合C^3中任取两个序列C^{m_1}和C^{m_2}，分以下3种情况讨论序列间相关性。

情况1 当$\tau=0$且$m_1\neq m_2$时

$$R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)=R_{s^{m_1,m_2}}(0)\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^{-0})=0 \quad (25)$$

情况2 当$0<\tau\leq N-1$且$m_1=m_2$时

$$\begin{aligned}R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)=&R_{s^{m_1,m_2}}(\tau)\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^{-\tau})\\=&1\cdot\sum_{i=0}^{N-1}a_i\psi_{-\tau}(\alpha^i)\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{a_i}\cdot\psi_{-\tau}(\alpha^i)\\=&\frac{1}{2}\left|(-1)^{-\tau}+\sum_{x\in F_q}\psi_{\frac{N}{2}}(x+1)\psi_{-\tau}(x)\right|\\\leq&\frac{1}{2}(1+\sqrt{q})\end{aligned} \quad (26)$$

情况3 当$0<\tau\leq N-1$且$m_1\neq m_2$时

$$\begin{aligned}R_{C^{m_1},C^{m_2}}(\tau)=&\sum_{k=0}^{K-1}R_{c_k^{m_1},c_k^{m_2}}(\tau)\\=&R_{s^{m_1,m_2}}(\tau)\cdot\sum_{k=0}^{K-1}\psi_{d_k}(\alpha^{-\tau})\\\leq&\frac{\sqrt{q}\cdot(1+\sqrt{q})}{2}\\\leq&\frac{(q+\sqrt{q})}{2}\end{aligned} \quad (27)$$

综上3种情况可知，序列集C^3的最大相关函数$\delta_{\max}=(q+\sqrt{q})/2$。计算序列集的最优因子$\rho=\dfrac{\delta_{\max}}{KN\sqrt{\dfrac{M/K-1}{MN-1}}}\leq\dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{q-1}}=1-\dfrac{1}{p^{n/2}-1}$。

进一步可以得到$\underset{n\to\infty}{\rho}=1$，序列集$C^3$是渐近最优的QCSS。 证毕

表3提供了当$p=3$, $2\leq n\leq 6$时，由方法3得到的QCSS参数，由表3可得随着n的增加ρ渐近达到1，方法3构造的序列集为渐近最优QCSS。

5 构造方法比较

表4对现有QCSSs的构造方法和本文的构造方法进行了比较。文献[11]利用Singer差集和序列的线性相位变化提出了一种周期QCSS的构造框架，本文方法1基于2元m序列支撑集分别结合最优4元序列族A和族D构造了两类渐近几乎最优的QCSSs。对比文献[11]，当QCSSs的子序列数目N相同时，本文方法1和方法2构造的序列数目M是文献[11]的2倍。在多载波扩频通信系统中，本文构造方法可以支持更多的用户。

文献[12]拓展了文献[11]构造方法的思路，利用差集和序列的线性相位变换构造了两类渐近最优周期QCSSs；对比文献[12]，本文构造方法得到的序列数目呈指数形式增长，构造的序列数目更多，在多载波通信系统中，可以支持更多的用户。除此之外，文献[12]中参数p取不小于5的奇素数，而本文方法3中p的取值可以为任意的奇素数，参数选择范围更加的广泛，方法较文献[12]更加灵活。

文献[13]基于有限域上的加法和乘法特性提出了一种周期QCSS的构造框架，并在此框架下构造了5种具体的周期QCSSs。本文基于低相关序列集和2元序列支撑集提出了一种周期QCSS的构造框架。对比文献[13]，若本文构造框架中的低相关序列集取序列族S[15]，即可以得到文献[13]所提出的构造框架，可见文献[13]的构造框架是本文的一个特例。当其他满足条件的低相关序列集，如序列族A、族D和Luke序列集应用到本文框架中时，则可以得到更多具有不同参数形式的QCSSs，从而满足不同通信系统的要求。

6 结束语

本文提出一种新的周期QCSS的构造框架，在这个框架的基础上，基于2元m序列和2元Sidelnikov序列分别结合最优4元序列族A，族D和Luke序列集构造了3类周期QCSSs，序列集的参数由2元序列和低相关序列集共同决定。除此之外，本文所提QCSS构造框架包含了现有QCSS的构造框架，且构造的序列数目更多，在多载波扩频通信系统中可以支持更多的用户。

表 3 方法3周期准互补序列集参数

n	M	K	N	$\delta_{\max}$	ρ
2	8	4	8	6.0	1.4882
3	26	13	26	16.1	1.2374
4	80	40	80	45.0	1.1249
5	242	121	242	129.3	1.0685
6	728	364	728	378.0	1.0385

表 4　准互补序列集参数比

方法	序列数目	子序列数目	序列长度	$\delta_{\max}$	ρ	约束条件
文献[11]方法1	p^n	$p^{n-1}-1$	p^n-1	$\frac{1}{2}\left(p^{\frac{n}{2}}+p^n\right)$	1	$p=2$
文献[11]方法2	p^n	$p^{n-1}-1$	$2(p^n-1)$	$p^{\frac{n}{2}}+p^n$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$p=2$
文献[12]方法1	p	$\frac{p-1}{2}$	p	$\frac{p+\sqrt{p}}{2}$	1	p是奇素数且$p\geq5$
文献[12]方法2	p	K	p	$\sqrt{\frac{pK(p-K)}{p-1}}$	1	p是奇素数且$p\geq5$
文献[13]方法A	p^n-1	K	p^n-1	$\sqrt{\frac{p^nK(p^n-K-1)}{p^n-2}}$	1	p是素数
文献[13]方法B	p^n-1	$\frac{p^n}{4}$	p^n-1	$3\cdot2^{n-2}$	$\sqrt{3}$	$p=2$
文献[13]方法C	p^n-1	$\frac{p^n-1}{2}$	p^n-1	$\frac{1}{2}(p^n+p^{\frac{n}{2}})$	1	p是奇素数
文献[13]方法D	p^n-1	p^{n-1}	p^n-1	$p^{n-\frac{1}{2}}$	1	p是素数
文献[13]方法E	$p^{2n}-1$	p^n	$p^{2n}-1$	$p^{\frac{3n}{2}}$	1	p是素数
本文方法1	p^n	p^{n-2}	p^n-1	$3(p^{\frac{n}{2}-2}+p^{n-2})$	$\sqrt{3}$	$p=2$
本文方法2	p^n	p^{n-2}	$2(p^n-1)$	$3(p^{\frac{n}{2}-1}+p^{n-\frac{3}{2}})$	$\sqrt{3}$	$p=2$
本文方法3	p^n-1	$\frac{p^n-1}{2}$	p^n-1	$\frac{1}{2}(p^n+p^{\frac{n}{2}})$	1	p是奇素数

参 考 文 献

[1] RATHINAKUMAR A and CHATURVEDI A K. Complete mutually orthogonal Golay complementary sets from reed-Muller codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(3): 1339–1346. doi: 10.1109/TIT.2007.915980.

[2] SUEHIRO N and HATORI M. N-shift cross-orthogonal sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, 34(1): 143–146. doi: 10.1109/18.2615.

[3] SUEHIRO N. A signal design without co-channel interference for approximately synchronized CDMA systems[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1994, 12(5): 837–841. doi: 10.1109/49.298057.

[4] CHEN H H, YEH J F, and SUEHIRO N. A multicarrier CDMA architecture based on orthogonal complementary codes for new generations of wideband wireless communications[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2001, 39(10): 126–135. doi: 10.1109/35.956124.

[5] LIU Zilong, GUAN Yongliang, and CHEN H H. Fractional-delay-resilient receiver design for interference-free MC-CDMA communications based on complete complementary codes[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(3): 1226–1236. doi: 10.1109/TWC.2014.2365467.

[6] LIU Zilong, PARAMPALLI U, and GUAN Yongliang. Optimal odd-length binary Z-complementary pairs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(9): 5768–5781. doi: 10.1109/TIT.2014.2335731.

[7] KE Pinhui and LIU Zhengchun. A generic construction of Z-periodic complementary sequence sets with flexible flock size and zero correlation zone length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1462–1466. doi: 10.1109/LSP.2014.2369512.

[8] 陈晓玉, 李冠敏, 孔德明, 等. 高斯整数零相关区序列集构造方法的研究[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(6): 1420–1426. doi: 10.11999/JEIT180703.

CHEN Xiaoyu, LI Guanmin, KONG Deming, *et al.* Research on the constructions of gaussian integer zero correlation zone sequence set[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(6): 1420–1426. doi: 10.11999/JEIT180703.

[9] 陈晓玉, 苏荷茹, 高茜超. 一类最优的零相关区非周期互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(2): 461–466. doi: 10.11999/JEIT190703.

CHEN Xiaoyu, SU Heru, and GAO Xichao. Construction of optimal zero correlation zone aperiodic complementary sequence sets[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(2): 461–466. doi: 10.11999/JEIT190703.

[10] LIU Tao, XU Chengqian, and LI Yubo. Binary complementary sequence set with low correlation zone[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 1550–1554. doi: 10.1109/LSP.2020.3018628.

[11] LIU Zilong, PARAMPALLI U, GUAN Yongliang, *et al*. Constructions of optimal and near-optimal quasi-complementary sequence sets from Singer difference sets[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2013, 2(5): 487–490. doi: 10.1109/WCL.2013.061213.130286.

[12] LI Yubo, LIU Tao, and XU Chengqian. Constructions of asymptotically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(8): 1516–1519. doi: 10.1109/LCOMM.2018.2836432.

[13] LI Yubo, TIAN Liying, LIU Tao, *et al*. Constructions of quasi-complementary sequence sets associated with characters[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, 65(7): 4597–4608. doi: 10.1109/TIT.2018.2890153.

[14] LI Yubo, TIAN Liying, LIU Tao, *et al*. Two constructions of asymptotically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2019, 67(3): 1910–1924. doi: 10.1109/TCOMM.2018.2885811.

[15] FAN Pingzhi and DARNELL M. Sequence Design for Communications Applications[M]. Taunton, England: Research Studies Press, 1996.

陈晓玉：女，副教授，研究方向为信号设计、无线通信技术.
彭秀英：女，硕士生，研究方向为扩频序列设计.
王成瑞：男，硕士生，研究方向为扩频序列设计.
崔 莉：女，博士生，研究方向编码理论、密码学、信号设计.

责任编辑：余 蓉