

适用于任意几何结构平面阵列的无网格DOA估计算法

陈涛^① 史林^{*①} 黄桂根^② 汪夕琳^①

^①(哈尔滨工程大学信息与通信学院 哈尔滨 150001)

^②(南京电子技术研究所 南京 210000)

摘要: 由于在网格失配情况下依然具备良好的估计性能, 无网格DOA估计算法近年来受到了广泛的关注与研究, 其中又以基于原子范数最小化(ANM)的DOA估计算法最具代表性。随着可分离ANM(DANM)算法的提出, 为ANM理论在2维DOA估计领域中的应用提供了可能。不过传统的DANM算法以及其后续的一系列改进算法都只适用于均匀矩形阵列(URA)或稀疏矩形阵列(SRA), 无法适用于具有任意几何结构的平面阵列。针对上述问题, 该文提出一种适用于任意几何结构平面阵列的无网格DOA估计算法, 即B-DANM算法。该算法利用一类贝塞尔函数对实际平面天线阵列接收信号的协方差数据进行展开, 从而获得适用于任意几何结构平面阵列的DANM算法框架, 然后再通过求解半定规划问题、Toeplitz矩阵的Vandermonde分解以及估计参数配对、角度变换等过程来得到最终的DOA估计结果。仿真实验验证了, 在任意几何结构平面阵列的测向系统中, B-DANM算法相比于传统的2维DOA估计算法在精度、分辨力等方面的优势。

关键词: 无网格DOA估计算法; 原子范数最小化; 半定规划; 一类贝塞尔函数

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2022)03-1052-07

DOI: [10.11999/JEIT210038](https://doi.org/10.11999/JEIT210038)

Gridless DOA Estimation Algorithm for Planar Arrays with Arbitrary Geometry

CHEN Tao^① SHI Lin^① HUANG Guigen^② WANG Xilin^①

^①(College of Information and Communication Engineering,
Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

^②(Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing 210000, China)

Abstract: Due to the good estimation performance in the case of off-grid, the gridless DOA estimation algorithms attract extensive attentions and researches in recent years, among which the most representative is the one based on Atomic Norm Minimization (ANM). With the development of Decoupled ANM (DANM) algorithm, the application of ANM to the field of two-dimensional DOA estimation is possible. However, the traditional DANM algorithm and its subsequent improved algorithms are only suitable for Uniform Rectangular Array (URA) or Sparse Rectangular Array (SRA), and is not suitable for planar arrays with arbitrary geometry. In order to solve the above problem, a gridless DOA estimation algorithm, B-DANM algorithm, is proposed for planar arrays with arbitrary geometry. B-DANM algorithm exploits the first Bessel function to expand the covariance data of the received signal of the actual planar antenna array, so as to obtain the DANM algorithm framework suitable for planar arrays with arbitrary geometry, and then the final DOA estimation result is obtained by solving the Semi-Definite Program (SDP) problem, Vandermonde decomposition of Toeplitz matrix, pairing of estimation parameters and angle transformation. The simulation results show that the B-DANM algorithm has the advantages of accuracy and resolution compared with the traditional two-dimensional DOA estimation algorithm in the direction finding system of planar arrays with arbitrary geometry.

Key words: Gridless DOA estimation algorithm; Atomic Norm Minimization (ANM); Semi-definite program; The first Bessel function

收稿日期: 2021-01-11; 改回日期: 2021-05-30; 网络出版: 2021-08-26

*通信作者: 史林 15146616640@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(62071137)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (62071137)

1 引言

作为阵列信号处理中的一个重要分支, 波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计广泛应用在雷达以及通信领域中^[1,2]。传统的基于信号子空间的DOA估计算法^[3,4]对于信噪比与快拍数的鲁棒性较差, 同时无法直接处理强相关的入射信源。而随着稀疏信号重构与压缩感知理论的提出与完善^[5-8], 以 ℓ_1 -svd算法^[9]为代表的基于压缩感知的DOA估计算法逐渐受到了国内外众多学者的关注与研究。与基于信号子空间的DOA估计算法相比, 在低信噪比、少快拍以及入射信源相关等条件下, 基于稀疏重构与压缩感知理论的DOA估计算法能够表现出更加优越的估计性能。

然而, 网格失配问题^[10], 即真实入射信源方向与预先设置好的空间离散网格之间存在偏差, 将会给传统的稀疏信号重构框架带来无法忽视的估计模型误差, 严重影响了基于压缩感知的DOA估计算法的估计性能, 成为制约着该类算法在实际应用中进一步推广的主要因素之一。网格细化技术^[9], 以及利用相邻网格之间线性插值或网格点处泰勒级数展开的网格失配模型^[11]都是常见的处理网格失配问题的技术手段。然而, 网格细化技术所带来的额外计算代价以及相邻原子之间相关性的提高, 都会严重影响算法的估计性能。以OGSBL算法^[12]为代表的基于网格失配模型的Off-grid类算法, 在一定程度上改善了由网格失配问题所带来的模型误差, 同时计算负担也是可以承受的, 但也并没有从根本上解决网格失配的问题。

直到原子范数^[13]的概念被提出之后, 随着基于无限维过完备字典的压缩感知理论的提出, 以及其在DOA估计领域中的成功应用^[14-16], 网格失配问题才得到更好的解决办法。基于原子范数最小化(Atomic Norm Minimization, ANM)的无网格DOA估计算法并不依赖空间离散网格, 而是直接在连续的角度空间内完成对入射信号DOA参数的估计, 从根本上避免了网格失配问题的出现。

由于能获得更为全面的信号方向信息, 2维DOA估计问题一直是DOA估计领域的一个重要研究方向。直接将ANM理论应用于, 2维DOA估计问题中^[17-19], 将会不可避免地增加待估计参数的维度, 使得后续的半定规划过程以及广义特征值分解过程的计算量严重增加。更重要的是, 这一类算法仅适用于均匀矩形阵列。

为了降低运算复杂度, 一种可分离的ANM(Decoupled ANM, DANM)算法^[20]被提出。DANM算法将2维DOA估计问题转化为两个独立的

1维DOA估计问题, 再通过参数配对过程完成2维DOA估计, 从而在不改变半定矩阵维度的前提下保证了算法的有效性。另外, 后续对于DANM算法的一些改进算法^[21,22], 利用矩阵完备、阵列线性插值等技术, 使得该类算法同样适用于稀疏矩形阵列, 例如互质平面阵列(Co-Prime Plane Array, CPPA)。然而, 目前仍然没有一种2维的无网格DOA估计算法, 能够适用于具有任意几何结构的平面天线阵列。

为了解决上述问题, 本文提出了一种能够适用于具有任意几何结构的平面天线阵列的2维无网格DOA估计算法。由于该算法的主要创新之处在于利用一类Bessel函数对天线阵列接收多快拍信号的协方差矩阵进行展开。从而能够得到满足DANM算法框架的数学模型, 然后通过求解半定规划问题、Toeplitz矩阵的Vandermonde分解、估计参数配对以及角度变换等过程, 完成对入射信源2维DOA参数的估计。因此本文将该算法命名为B-DANM算法。其中, “B-”具体便是指一类Bessel函数。

2 信号模型

考虑一个阵元数为 $M \in \mathbb{Z}_+$ 的平面阵列, 将各个阵元的位置坐标集合记为

$$\mathbb{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_M, y_M)\} \quad (1)$$

其中, $x_m \in \mathbb{R}$ 与 $y_m \in \mathbb{R}$ 分别表示第 m 个阵元在 X 轴方向 Y 轴方向的位置坐标。若空间中有 $K \in \mathbb{Z}_+$ 个独立的远场窄带入射信号, 定义第 k 个信源 s_k 的入射方向与天线阵列所在平面之间的夹角为俯仰角, 记为 $\varphi_k \in [0^\circ, 90^\circ]$ 入射信源在该平面内的投影与 X 轴正方向的夹角为方位角, 记为 $\theta_k \in [0^\circ, 360^\circ]$ 。入射信源的2维DOA信息与平面阵列之间的关系如图1所示。

若以天线阵列所在平面的原点为参考点, 则天线阵列在 t 时刻所接收的数据 $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^M$ 为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{s}(t) = [|s_1(t)|, |s_2(t)|, \dots, |s_K(t)|]^T \in \mathbb{R}_+^K$ 表示信号向量, $|s_k(t)|$ 表示第 k 个信源在 t 时刻的振幅。

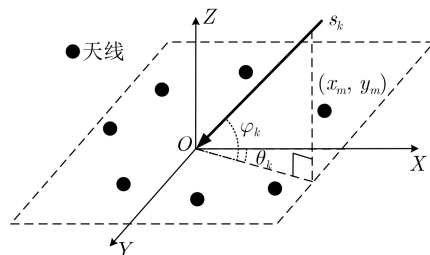


图1 2维DOA信息与平面阵列之间的关系

另外, $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \in \mathbb{C}^M$ 为噪声向量, 其中 $n_m(t)$ 为第 m 个天线在 t 时刻接收数据中的零均值加性高斯白噪声。 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K, \varphi_K)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 是阵列流型矩阵, 其中导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_k, \varphi_k) \in \mathbb{C}^M$ 为

$$\mathbf{a}(\theta_k, \varphi_k) = \left[e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\tau_1(\theta_k, \varphi_k)}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\tau_2(\theta_k, \varphi_k)}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\tau_M(\theta_k, \varphi_k)} \right]^T \quad (3)$$

其中, j 表示虚数单位, λ 为入射信源的波长, 而 $\tau_m(\theta_k, \varphi_k)$ 的具体形式为

$$\tau_m(\theta_k, \varphi_k) = x_m \cos(\theta_k) \cos(\varphi_k) + y_m \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \quad (4)$$

将式(2)改写成多快拍的形式, 则有

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(T)] \in \mathbb{C}^{M \times T}$ 表示天线阵列的多快拍接收数据。 $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \dots, \mathbf{s}(T)] \in \mathbb{R}_+^{K \times T}$, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1), \mathbf{n}(2), \dots, \mathbf{n}(T)] \in \mathbb{C}^{M \times T}$ 。 $T \in \mathbb{Z}_+$ 为快拍数。

根据以上分析可以得到, 天线阵列接收数据的协方差矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbb{E}\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\} = \mathbf{A} \text{diag}\{\mathbf{p}\} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \\ &= \tilde{\mathbf{R}} + \sigma^2 \mathbf{I}_M \end{aligned} \quad (6)$$

其中, \mathbb{E} 表示求期望运算, $\text{diag}\{\mathbf{p}\}$ 表示由向量 \mathbf{p} 中的元素为对角线元素, 其余元素为零的对角阵。 $\mathbf{p} = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2]^T \in \mathbb{R}_+^K$, $\sigma_k^2 = \mathbb{E}\{|s_k(t)|^2\}$ 为第 k 个信号的功率。 $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ 为噪声功率。 \mathbf{I}_M 表示 M 维单位矩阵。

值得说明的是, 只有在入射信源均独立的情况下, 天线阵列接收多快拍信号的协方差矩阵才满足式(6)的数学模型。所以, 本文所提出的B-DANM算法并不适用于存在相干入射信源的情况。

另外, 在实际应用中, 由于快拍数有限, 所以形如式(6)所示的协方差矩阵是无法得到的, 通常情况下, 利用 $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H/T$ 来代替 \mathbf{R} 。 $\tilde{\mathbf{R}}$ 则用来表示无噪声、快拍数趋于无穷时的理想协方差矩阵。

所以, 对于具有任意几何结构的平面天线阵列, 其理想的接收信号协方差数据可以具体表示为

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta x_{ij} \sin(\alpha_k) + \Delta y_{ij} \sin(\beta_k)]} \quad (7)$$

其中, $\tilde{\mathbf{R}}_{ij}$ 表示矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 中第 i 行 j 列的数据, $1 \leq i, j \leq M$ 。 $\Delta x_{ij} = x_i - x_j$, $\Delta y_{ij} = y_i - y_j$ 。同时, α_k 与 β_k 为过渡角度参数, 满足参数变换关系

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha_k) &= \cos(\theta_k) \cos(\varphi_k) \\ \sin(\beta_k) &= \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3 B-DANM算法

根据Jacobi-Anger展开公式

$$e^{jz \sin(\theta)} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(z) e^{jq\theta} \quad (9)$$

其中, $J_q(z)$ 是以 z 为自变量的 q 阶一类贝塞尔函数, 则可以将式(7)中的协方差数据进行展开

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{ij} &= \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{ij} \sin(\alpha_k)} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y_{ij} \sin(\beta_k)} \\ &= \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} J_{q_1} \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{ij} \right) e^{jq_1 \alpha_k} \\ &\quad \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} J_{q_2} \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y_{ij} \right) e^{jq_2 \beta_k} \end{aligned} \quad (10)$$

值得注意的是, 一类贝塞尔函数随其阶数的变化可以被近似地看作一个零均值的高斯分布。所以, 当一类贝塞尔函数阶数的取值超出某个关于原点对称的区间时, 其函数值可以近似为零。基于上述观点, 在实际的计算过程中, 可以将一类贝塞尔函数的最大阶数设置为 $Q \in \mathbb{R}_+$, 即 $q_1, q_2 = -Q, -Q+1, \dots, Q$, 而由于最大阶数的引入所带来的模型误差可以忽略不计。这样, 可以将式(10)写成矩阵的形式, 则有式(11)成立

$$\text{vec}(\tilde{\mathbf{R}}) = \text{diag}\{\mathbf{G}_x \mathbf{B} \mathbf{G}_y^T\} \quad (11)$$

其中, $\text{vec}(\tilde{\mathbf{R}})$ 表示对矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 进行按行向量化操作。 $\text{diag}\{\mathbf{G}_x \mathbf{B} \mathbf{G}_y^T\}$ 为矩阵 $\mathbf{G}_x \mathbf{B} \mathbf{G}_y^T$ 的对角线元素所组成的列向量。而矩阵 $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y \in \mathbb{R}^{M^2 \times (2Q+1)}$ 与矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{(2Q+1) \times (2Q+1)}$ 的具体形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_x &= \begin{bmatrix} J_{-Q} \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{11} \right) & \cdots & J_Q \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{11} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{-Q} \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{MM} \right) & \cdots & J_Q \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{MM} \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_y &= \begin{bmatrix} J_{-Q} \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y_{11} \right) & \cdots & J_Q \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y_{11} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{-Q} \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y_{MM} \right) & \cdots & J_Q \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \Delta y_{MM} \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{ij} &= \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{j[(i-Q-1)\alpha_k + (j-Q-1)\beta_k]} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, \mathbf{B}_{ij} 表示矩阵 \mathbf{B} 中第 i 行 j 列的元素, $1 \leq i, j \leq 2Q+1$ 。

接下来, 定义矩阵形式的原子集合为

$$\mathbb{A} = \{\mathbf{b}(\alpha) \mathbf{b}^T(\beta), \alpha, \beta \in [-\pi, \pi]\} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{b}(\alpha) = [e^{j(-Q)\alpha}, e^{j(-Q+1)\alpha}, \dots, e^{jQ\alpha}]^T \in \mathbb{C}^{2Q+1}$, $\mathbf{b}(\beta)$ 的形式与 $\mathbf{b}(\alpha)$ 一致。这样, 形如式(12)所示的矩阵 \mathbf{B} 可以表示为

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{A}_k \quad (14)$$

其中, \mathbf{A}_k 代表集合 \mathbb{A} 中的一个原子。因此, 可以定义一个矩阵 \mathbf{B} 在集合 \mathbb{A} 上的原子范数为

$$\|\mathbf{B}\|_{\mathbb{A}} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \left| \mathbf{B} = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{A}_k \right. \right\} \quad (15)$$

其中, $\inf\{\cdot\}$ 表示集合“.”的下确界。

所以, 可以将任意几何结构平面天线阵列的DOA估计问题表示为如下的原子范数最小化问题:

$$\min_{\mathbf{B}} \left\| \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) - \text{diag} \{ \mathbf{G}_x \mathbf{B} \mathbf{G}_y^T \} \right\|_2^2 + \varepsilon \|\mathbf{B}\|_{\mathbb{A}} \quad (16)$$

其中, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ 为正则化参数。

根据文献[20]中的定理4.2, 矩阵 \mathbf{B} 在集合 \mathbb{A} 上的原子范数可以由如下的半定规划过程计算得出

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\|_{\mathbb{A}} = \min_{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y} & \frac{1}{\eta} \{ \text{tr}[\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)] + \text{tr}[\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)] \} \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \mathbf{B}^H \\ \mathbf{B} & \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)$ 与 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)$ 表示以向量 \mathbf{u}_x 与 \mathbf{u}_y 为第1行的共轭对称的Toeplitz矩阵。 $\eta = 4Q + 2$ 。

将式(17)代入式(16)中, 可以得到

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{B}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y} & \left\| \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) - \text{diag} \{ \mathbf{G}_x \mathbf{B} \mathbf{G}_y^T \} \right\|_2^2 \\ & + \frac{\varepsilon}{\eta} \{ \text{tr}[\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)] + \text{tr}[\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)] \}, \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \mathbf{B}^H \\ \mathbf{B} & \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

形如式(18)所示的半定规划问题, 可以由CVX工具箱进行求解, 从而得到最优解 \mathbf{u}_x 与 \mathbf{u}_y 。再对Toeplitz矩阵 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)$ 与 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)$ 进行Vandermonde分解, 即可以得到参数 α_k 与 β_k 的估计结果。最后, 根据文献[20]中5.3节的配对算法与式(8)所示的参数关系, 计算信源DOA的估计结果。

另外, 值得说明的是, 通过文献[20]中的定理4.2, 不仅可以得到矩阵 \mathbf{B} 在集合 \mathbb{A} 上原子范数 $\|\mathbf{B}\|_{\mathbb{A}}$ 的计算方法, 同时也可以得到此时DOA估计算法的角度分辨力, 具体为

$$\left. \begin{aligned} \min |\sin(\alpha_i) - \sin(\alpha_j)| & \geq \frac{1}{\lfloor (Q/2) \rfloor} \\ \min |\sin(\beta_i) - \sin(\beta_j)| & \geq \frac{1}{\lfloor (Q/2) \rfloor} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中, $1 \leq i, j \leq K$, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取值运算。

显然, 均匀矩形阵列的角度分辨力应变为 $1/[(M_x - 1)/4]$ 以及 $1/[(M_y - 1)/4]$, 其中 M_x 与 M_y 表示均匀矩形阵列在X轴与Y轴上的阵元数目。通常情况下, 有不等式关系 $Q > M_x$ 以及 $Q > M_y$ 成立, 因此本文所提出B-DANM算法的角度分辨力要大于仅适用于均匀矩形阵列的DANM算法。

综上所述, 表1给出了B-DANM算法的整体流程。

表 1 B-DANM算法

输入: 阵列接收数据 \mathbf{Z} , 阵元位置坐标集合 \mathbb{D} , 贝塞尔函数最大阶数 Q , 正则化参数 ε ;	
步骤1	计算协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H / \mathbf{T}$;
步骤2	根据式(12)构造矩阵 \mathbf{G}_x 与 \mathbf{G}_y ;
步骤3	求解式(18)所示的半定规划问题;
步骤4	对 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)$ 与 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)$ 做Vandermonde分解, 得到参数 α_k 与 β_k 的估计结果;
步骤5	对参数 α_k 与 β_k 的估计结果进行配对;
步骤6	根据式(8)所示的参数关系, 得到最终的DOA估计结果 $\hat{\theta}_k$ 与 $\hat{\varphi}_k$;

4 算法仿真实验

本节利用7阵元的非均匀圆阵, 分辨空间中3个独立的入射信源。阵列具体形式如图2所示, 天线位置坐标分别为(155.9, -36), (113.1, 113.1), (-36, 155.9), (-135.7, 84.8), (-155.9, -36), (-36, -155.9), (84.8, -135.7), 单位mm。

另外, 本论文采用均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)参数来衡量算法的估计精度, 其定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N (\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k)^2} \quad (20)$$

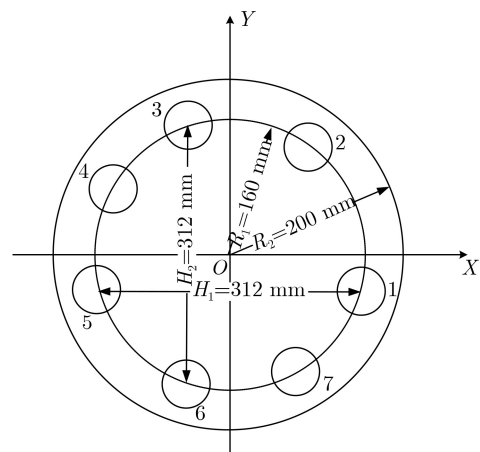


图 2 7阵元的非均匀圆阵

其中, $N \in \mathbb{R}_+$ 为Monte-Carlo实验的总次数, $\hat{\theta}_{k,n}$ 为第 n 次实验中第 k 个信源方位角的估计结果。俯仰角的RMSE定义与方位角的相一致。

传统的基于压缩感知的DOA估计算法并不能够解决2维DOA估计问题, 而无网格2维DOA估计算法又只适用于平面矩形阵列的测向系统。所以, 为了研究适用于具有任意几何结构的平面天线阵列的DOA估计算法的性能, 本文将所提出的B-DANM算法与2D-MUSIC算法^[23]进行对比。

首先, 对比两种算法的估计精度。在第1个仿真实验中, 分别利用2D-MUSIC算法与B-DANM算法分辨空间中的3个独立入射信源。信源俯仰角在 $[0^\circ, 60^\circ]$ 范围内随机选取, 最小角度间隔为 10° 。信源方位角在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 范围内随机选取, 最小角度间隔也为 10° 。入射信源频率为6 GHz。2D-MUSIC算法在两个维度上的搜索精度均为 1° 。B-DANM算法中一类贝塞尔函数的最大阶数选取为50, 正则化参数选取为0.5。固定快拍数为200, 信噪比由0 dB均匀变化至20 dB, 步长为5 dB。在每个信噪比下, 做200次Monte-Carlo实验, 统计RMSE, 仿真结果如图3所示。具体地, 当SNR=5 dB, 快拍数为200时, 200次Monte-Carlo实验的具体结果如图4所示。

然后, 保持其他的仿真条件不变, 固定信噪比为20 dB, 快拍数分别选取为20, 50, 100, 200以及500。在每个快拍数下, 依然做200次Monte-Carlo实验, 统计RMSE, 仿真结果如图5所示。

最后, 对比两种算法的角度分辨力。依旧采取

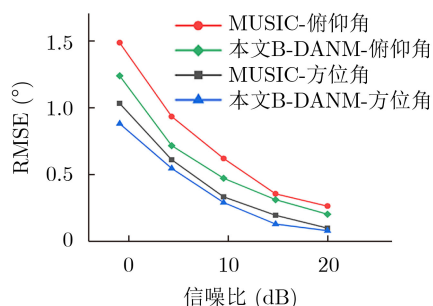


图3 不同信噪比下两种算法的估计精度对比

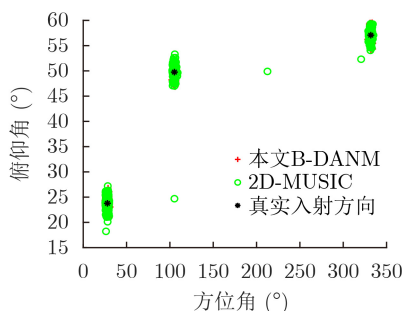


图4 SNR=20 dB, 快拍数为200时的DOA估计结果

如图2所示的7阵元非均匀圆阵, 分辨空间中两个独立的入射信源。其中一个入射信源的角度随机选取, 方位角与俯仰角分别记为 $\bar{\theta}$ 与 $\bar{\varphi}$ 。在分析算法俯仰角方向的角度分辨力时, 另一个入射信源的方位角与俯仰角则分别设置为 $\bar{\theta}$ 与 $\bar{\varphi} + \Delta\varphi$ 。类似地, 在分析方位角方向的角度分辨力时, 另一个入射信源的方位角与俯仰角则分别设置为 $\bar{\theta} + \Delta\theta$ 与 $\bar{\varphi}$ 。

当估计结果与入射信源的真实入射方向之间的偏差在 1° 以内时, 我们认为此次仿真实验成功。固定信噪比为20 dB, 快拍数为200, 角度间隔参数从 2° 均匀变化至 8° , 步长为 1° , 每个不同的角度间隔下做200次Monte-Carlo实验, 统计估计成功的概率, 结果如图6所示。

通过上述3个仿真实验的结果不难看出, 相比于2D-MUSIC算法, 本文所提出的B-DANM算法在估计精度以及角度分辨力等方面, 具有更加良好的估计性能。

由于本文的主要创新点在于式(18)中适用于任意几何结构平面阵列的2维无网格DOA估计算法优化模型, 所以有关B-DANM算法在估计精度方面的性能理论分析是下一步研究的主要方向。

另外, B-DANM算法在提高DOA估计精度以及角度分辨力的同时, 不可避免地提高了算法的复杂度。在阵元数目相同时, 相比于2D-MUSIC算法、DANM算法^[20]以及适用于稀疏平面阵列的DANM算法^[22], B-DANM算法都具有更高的复杂度。不同参数下各个算法复杂度的具体表达式如表2所示。

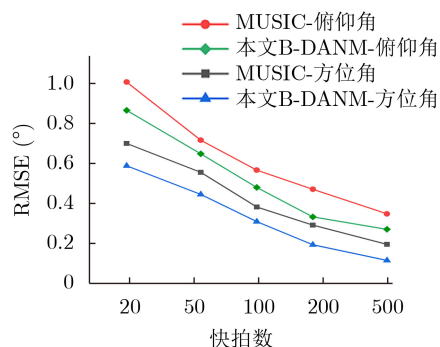


图5 不同快拍数下两种算法的估计精度对比

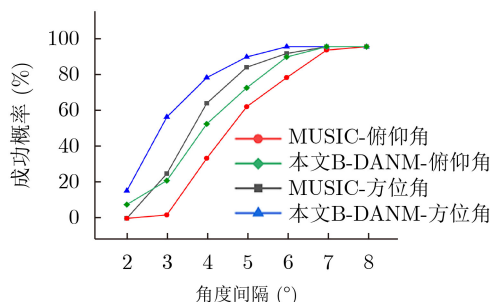


图6 不同角度间隔下两种算法的估计成功概率对比

表2 算法复杂度分析

算法	复杂度
2D-MUSIC	$O(M^2(T + P_1P_2) + M^3)$
DANM	$O((M_x + M_y)^{3.5} \lg(1/\rho))$
CPPA-DANM	$O((2x_{\max} + 2y_{\max})^{3.5} \lg(1/\rho))$
B-DANM	$O((4Q + 2)^{3.5} \lg(1/\rho))$

表2中, P_1 与 P_2 分别为2D-MUSIC算法中两个维度上空间谱峰搜索的维度。 M_x 与 M_y 表示均匀矩形阵列在X轴与Y轴上的阵元数目。 x_{\max} 与 y_{\max} 分别表示互质矩形阵列中位于X轴与Y轴上最大阵元位置相对于入射信源半波长的倍数。参数 ρ 表示半正定规划过程的期望重构精度,即停止迭代判断准则中的收敛阈值,在本文中选取为 10^{-7} 。

由此可见, B-DANM算法的复杂度主要由如式(18)所示的半定规划问题中半正定矩阵的维度所决定。显然,该维度由DANM算法与CPPA-DANM算法中的 $M_x + M_y$ 与 $x_{\max} + y_{\max}$ 变为B-DANM算法的 $4Q + 2$ 。通常, X轴方向上有 $Q > x_{\max} > M_x$ 成立。同样, Y轴方向也有 $Q > y_{\max} > M_y$ 成立。所以, B-DANM算法的复杂度要高于其他算法。如何降低B-DANM算法的复杂度是接下来研究的另一个主要方向。

5 结束语

现有的无网格类DOA估计算法,无法有效地适用于任意几何结构平面阵列的测向系统中。本文针对这一问题,提出了一种适用于任意几何结构平面阵列的2维无网格DOA估计算法,即B-DANM算法。该算法利用一类贝塞尔函数将平面阵列接收信号的协方差数据分别在两个独立的方向上展开,使其适用于任意几何结构平面阵列。通过仿真实验,验证了B-DANM算法估计精度与角度分辨力等方面估计性能的优越性。有关B-DANM算法在估计精度方面性能的理论分析以及降低B-DANM算法复杂度的方法还有待进一步的研究。

参考文献

- [1] 张海, 陈小龙, 张涛, 等. 基于MUSIC算法的二次雷达应答信号分离方法[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(12): 2984–2991. doi: 10.11999/JEIT190842.
- [2] ZHANG Hai, CHEN Xiaolong, ZHANG Tao, et al. Overlapping secondary surveillance radar replies separation algorithm based on MUSIC[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(12): 2984–2991. doi: 10.11999/JEIT190842.
- [3] 李建峰, 沈明威, 蒋德富. 互质阵中基于降维求根的波达角估计算法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(8): 1853–1859. doi: 10.11999/JEIT171087.
- [4] LI Jianfeng, SHEN Mingwei, and JIANG Defu. Reduced-dimensional root finding based direction of arrival estimation for coprime array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(8): 1853–1859. doi: 10.11999/JEIT171087.
- [5] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.
- [6] ROY R and KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984–995. doi: 10.1109/29.32276.
- [7] CANDES E J, ROMBERG J, and TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509. doi: 10.1109/TIT.2005.862083.
- [8] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [9] CANDES E J and WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21–30. doi: 10.1109/MSP.2007.914731.
- [10] BARANIUK R G. Compressed sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4): 118–121. doi: 10.1109/MSP.2007.4286571.
- [11] MALIOUTOV D, CETIN M, and WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022. doi: 10.1109/TSP.2005.850882.
- [12] CHI Y, SCHARF L L, PEZESHKI A, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 2182–2195. doi: 10.1109/TSP.2011.2112650.
- [13] DAS A. Theoretical and experimental comparison of off-grid sparse Bayesian direction-of-arrival estimation algorithms[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 18075–18087. doi: 10.1109/ACCESS.2017.2747153.
- [14] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 38–43. doi: 10.1109/TSP.2012.2222378.
- [15] CHANDRASEKARAN V, RECHT B, PARRILO P A, et al. The convex geometry of linear inverse problems[J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2012, 12(6): 805–849. doi: 10.1007/s10208-012-9135-7.
- [16] CANDÈS E J and FERNANDEZ-GRANDA C. Towards a

- mathematical theory of super-resolution[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2014, 67(6): 906–956. doi: [10.1002/cpa.21455](https://doi.org/10.1002/cpa.21455).
- [15] TANG Gongguo, BHASKAR B N, SHAH P, *et al.* Compressed sensing off the grid[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(11): 7465–7490. doi: [10.1109/TIT.2013.2277451](https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2277451).
- [16] BHASKAR B N, TANG Gongguo, and RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(23): 5987–5999. doi: [10.1109/TSP.2013.2273443](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2273443).
- [17] YANG Yang, CHU Zhigang, XU Zhongming, *et al.* Two-dimensional grid-free compressive beamforming[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 142(2): 618–629. doi: [10.1121/1.4996460](https://doi.org/10.1121/1.4996460).
- [18] YANG Yang, CHU Zhigang, and PING Guoli. Alternating direction method of multipliers for weighted atomic norm minimization in two-dimensional grid-free compressive beamforming[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, 144(5): EL361–EL366. doi: [10.1121/1.5066345](https://doi.org/10.1121/1.5066345).
- [19] YANG Yang, CHU Zhigang, and PING Guoli. Two-dimensional multiple-snapshot grid-free compressive beamforming[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 124: 524–540. doi: [10.1016/j.ymssp.2019.02.011](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.02.011).
- [20] ZHANG Zhe, WANG Yue, and TIAN Zhi. Efficient two-dimensional line spectrum estimation based on decoupled atomic norm minimization[J]. *Signal Processing*, 2019, 163: 95–106. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.04.024](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.04.024).
- [21] TIAN Xiyan, LEI Jinhui, and DU Liufeng. A generalized 2-D DOA estimation method based on low-rank matrix reconstruction[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 17407–17414. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2820165](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2820165).
- [22] LU Aihong, GUO Yan, LI Ning, *et al.* Efficient gridless 2-D direction-of-arrival estimation for coprime array based on decoupled atomic norm minimization[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 57786–57795. doi: [10.1109/ACCESS.2020.2982413](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2982413).
- [23] HUA Yingbo. A pencil-MUSIC algorithm for finding two-dimensional angles and polarizations using crossed dipoles[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1993, 41(3): 370–376. doi: [10.1109/8.233122](https://doi.org/10.1109/8.233122).
- 陈 涛: 男, 1974年生, 教授, 博士, 研究方向为波达方向估计、宽带信号处理.
- 史 林: 男, 1990年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、波达方向估计.
- 黄桂根: 男, 1978年生, 研究员, 博士, 研究方向为雷达侦察信息处理、雷达反干扰设计.
- 汪夕琳: 女, 1996年生, 硕士生, 研究方向为稀疏阵列优化、阵列信号处理.

责任编辑: 马秀强