

基于互质阵列孔洞分析的稀疏阵列设计方法

刘可^{*①②} 朱泽政^② 于军^② 马俊达^②

^①(哈尔滨理工大学测控技术与仪器黑龙江省高校重点实验室 哈尔滨 150080)

^②(哈尔滨理工大学自动化学院 哈尔滨 150080)

摘要: 针对互质阵列产生连续延迟较少且冗余度高的问题, 该文提出了两种基于互质阵列的稀疏设计方法。首先, 通过分析阵元位置对互质阵列差分共阵总延迟和连续延迟影响, 得出互质阵列在去掉特定阵元后, 将不改变连续延迟拓扑。然后, 优化传感器阵列布局, 在保持整个阵列的阵元数不变的条件下, 增加阵列连续延迟数量。其后, 分别推得了两种提出阵列设计方法的连续延迟和自由度相关的数学表达式。最后, 以相同物理传感器和相同估计方法开展对比仿真, 验证提出稀疏阵列设计的DOA估计性能。

关键词: 互质阵列; 稀疏阵列; 相关延迟; DOA估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2022)01-0372-08

DOI: 10.11999/JEIT201024

Sparse Array Design Methods Based on Hole Analysis of the Coprime Array

LIU Ke^{①②} ZHU Zezheng^② YU Jun^② MA Junda^②

^①(The Higher Educational Key Laboratory for Measuring & Control Technology and Instrumentation of Heilongjiang Province, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

^②(School of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: For the problem of a low number of consecutive lags and high redundancy of sensors in the coprime array, two sparse arrays are proposed in this paper. First, by analyzing the influence of the sensor positions on the unique lags and consecutive lags of the difference coarray, it is concluded that the range of the consecutive lags in the coprime array is not changed after removing the specific sensors. Then, entire array structure is optimized while keeping the number of sensors unchanged, increasing the number of consecutive lags. Afterward, mathematical expressions of the consecutive lags and degree of freedoms of the proposed arrays are derived respectively. Finally, simulations are carried out with the same physical sensors and the identical estimation method to verify the DOA estimation performance of the proposed sparse arrays.

Key words: Coprime array; Sparse array; Correlation lags; Direction-Of-Arrival (DOA) estimation

1 引言

均匀线阵是最常用的阵列配置方式, 由于其简单的阵元排布结构和完备的参数估计方法, 使其广泛应用在目标方位估计、频率估计、目标跟踪等阵列信号处理相关的各个领域^[1,2]。由阵列天线基本原理可以得出: 对于配置 N 个传感器的均匀线阵, 多重信号分类^[3,4](Multiple Signal Classification, MUSIC)、旋转不变子空间^[5,6](Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Technique, ESPRIT)等传统算法只能估计 $N-1$ 个信源角度。而且由于均匀线阵相邻两个传感器的间距较近, 容

易产生耦合效应, 严重影响DOA(Direction Of Arrival)估计性能^[7,8]。

针对上述问题, 稀疏阵列设计是提升目标分辨能力、减少相邻阵元耦合的有效方法。近些年来, 最典型的稀疏阵列设计包括最小冗余阵列^[9]、嵌套阵列^[10,11]和互质阵列^[12-14]。最小冗余阵列^[9](Minimum Redundancy Array, MRA)增大了相邻阵元间距, 在减少阵元耦合效应的同时, 可形成大量的虚拟传感器。虽然MRA可提高DOA估计性能, 但是并没有给出阵列设计相关的物理表达式, 使其应用范围受到较大限制。而嵌套阵列^[10](Nested Array, NA)的出现为稀疏阵列设计迎来了突破, 它不仅具有与阵元间距和传感器个数相关的数学表达式, 而且其子阵产生的差分共阵无延迟孔洞, 使得

子空间方法得以有效应用, 其不足之处在于子阵阵元间距稠密, 易发生阵元互耦, 导致角度分辨性降低。互质阵列^[12](CoPrime Array, CPA)的出现一定程度缓解了该问题, 它同样由两个子均匀线阵构成, 阵元间距是一对互质整数, 由于其虚拟传感器存在大量孔洞, 因此差分共阵不能高效利用。

在上述稀疏阵列基础上, 最近几年出现了多种稀疏阵列改进方法。文献[13]提出了多级互质阵列, 它由多个均匀线阵构成, 其中每个子阵中的阵元数目和阵元间距为成对的互质整数。相比于互质阵列, 其阵列孔洞进一步减少, 连续延迟有所增加。文献[14]提出了两种线阵结构, 分别是压缩间距方法(Coprime Array with Compressed Inter-element Spacing, CACIS)和移动子阵方法(Coprime Array with Displaced Subarrays, CADiS)。CACIS对互质阵列其中一个子阵的阵元间距进行压缩处理, 而CADiS是移动互质阵列的一个子阵到特定位置, 两种方法都能提高阵列的连续虚拟延迟, 增加阵列自由度, 但是上述两种方法的虚拟阵元仍存在大量孔洞。针对连续延迟的利用问题, 已有文献^[15-18]给出了多种解决方案, 但是由于网格失配和计算时间问题, 现有方法在估计精确性和算法实时性方面仍存在较大的改进空间。因此, 综合上述情况, 如何提高连续虚拟传感器数量, 以便于利用MUSIC方法进行有效估计, 仍然是获得目标DOA最直接、高效的方法。

受移动物理阵元以填充阵列孔洞思路启发, 本文通过对差分共阵的影响阵元进行有效分析, 提出了两种基于互质阵列结构的改进方法, 增加连续延迟数量、提高DOA估计性能, 其主要贡献可概括为如下3个方面:

(1)分析互质阵列的差分共阵所产生的虚拟延迟与特定物理阵元关系, 得出互质阵列在去掉冗余阵元后, 将不改变连续虚拟阵元;

(2)对阵列结构进行有效优化, 移动互质阵列的冗余阵元到特定位置, 实现物理阵元数不变, 孔洞有效减少, DOA估计能力有效提升;

(3)推得了提出的两种阵列设计方法连续延迟和自由度相关数学表达式。

2 互质阵列模型及互耦模型

2.1 互质阵列模型

互质阵列结构如图1所示, 其两个子阵的阵元数分别为 N 和 M , 相应的阵元间距分别为 Md 和 Nd , 其中, M 和 N 为一对互质整数, 且满足 $M < N$, d 是半波长。不失一般性, 设置两个子阵的第1个阵元相互重合, 形成参考阵元。因此, 所配置的互质

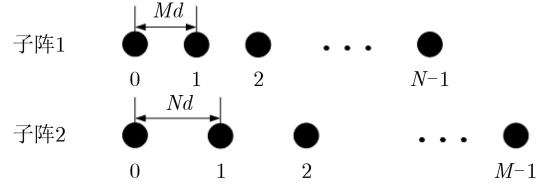


图1 互质阵列结构图

阵列总阵元数为 $M + N - 1$, 相应的传感器位置为 $n_i d$, 其中 n_i 属于整数集合 $S = \{n_i | i = 1, 2, \dots, M + N - 1\}$, 且 $n_1 = 0 < n_2 < \dots < n_i < \dots < n_{M+N-1}$ 。假设信源为远场、窄带信号, 且不同信源、信源与噪声均不相关, 因此互质阵列在 t 时刻的测量矢量可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta_q) s_q(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A} \mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中, Q 为到达阵列的总信源数, $\mathbf{a}(\theta_q) = [1, e^{-j2\pi n_2 d \sin(\theta_q)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi n_{M+N-1} d \sin(\theta_q)/\lambda}]^T$ 为第 q 个信源 $s_q(t)$ 波达方向 θ_q 的导向矢量, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)]$ 是相应的阵列流型矩阵, $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_Q(t)]^T$ 是信源矢量, $\mathbf{n}(t)$ 为噪声矢量, 服从均值为0、方差为 σ_n^2 的高斯随机过程。 $\mathbf{x}(t)$ 的协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx} 可表示为

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \sum_{q=1}^Q \sigma_q^2 \mathbf{a}(\theta_q) \mathbf{a}^H(\theta_q) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{M+N-1} \quad (2)$$

其中, σ_q^2 为信源 $s_q(t)$ 的功率, $\sigma_n^2 \mathbf{I}_{M+N-1}$ 为噪声协方差矩阵。而实际条件下可获得的快拍数有限, T 快拍下的 \mathbf{R}_{xx} 可近似估计为

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \quad (3)$$

对协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}$ 向量化处理, 可得

$$\mathbf{z} = \text{vec}(\tilde{\mathbf{R}}_{xx}) = \mathbf{M} \mathbf{p} + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_{M+N-1}) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{M} = [\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}]$ 为扩大孔径的虚拟阵列流矩阵, \circ 为Khatri-Rao积, $\mathbf{p} = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_Q^2]^T$ 为信源功率向量, $\sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_{M+N-1})$ 为噪声向量。

2.2 互耦分析模型

由于阵列相邻阵元间距过近, 容易产生耦合效应, 考虑式(1)中阵列模型存在阵元互耦, 则接收向量可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (5)$$

其中, \mathbf{C} 是与阵元位置相关的耦合矩阵。存在多种方法分析阵元耦合效应^[8,11], 本文采用基于Toep-

litz性质的 B 互耦模型开展阵列性能分析, 则 C 定义为

$$\langle C \rangle_{n_i, n_j} = \begin{cases} c_{|n_i - n_j|}, & |n_i - n_j| \leq B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

其中, $n_i, n_j \in \mathbb{S}$, $c_n = c_1 e^{-j(n-1)\pi/8}/n$, $n \in [2, B]$, 并且耦合系数 c_0, c_1, \dots, c_B 满足 $1 = c_0 > |c_1| > |c_2| > \dots > |c_B|$ 。对于给定的阵列, 耦合泄漏量 L 可表示为

$$L = \frac{\|C - \text{diag}(C)\|_F}{\|C\|_F} \quad (7)$$

其中, $\|\cdot\|_F$ 为Frobenius范数。

3 提出的稀疏阵列设计

3.1 互质阵列延迟分析

为了便于分析, 忽略半波长 d , 因此互质阵列的所有阵元位置为 \mathbb{S} , 则 \mathbb{S} 可以表示为

$$\mathbb{S} = \{Mn, 0 \leq n \leq N-1\} \cup \{Nm, 0 \leq n \leq M-1\} \quad (8)$$

由此, 互质阵列产生的差分共阵集合 \mathbb{D} 可以表示为

$$\mathbb{D} = \{z | z = u - v, u \in \mathbb{S}, v \in \mathbb{S}\} \quad (9)$$

\mathbb{D} 中不同元素数量直接决定了阵列的虚拟自由度, 是影响DOA估计精度的关键因素。由于互质阵列由两个均匀线阵构成, 整个阵列的差分共阵由两部分构成: 一部分是物理阵列独立产生的自延迟 \mathbb{D}_s , 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_s &= \{M(n_i - n_j), 0 \leq n_i, n_j \leq N-1 \cup N(m_i - m_j), \\ &0 \leq m_i, m_j \leq M-1 \\ &= \pm Mn, 0 \leq n \leq N-1 \cup \pm Nm, 0 \leq m \leq M-1 \end{aligned} \quad (10)$$

另一部分是两个子阵阵元位置之差所产生的互延迟 \mathbb{D}_c , 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_c &= \{Nm_i - Mn_j, 0 \leq m_i \leq M-1, \\ &0 \leq n_j \leq N-1 \cup Mn_j - Nm_i, \\ &0 \leq m_i \leq M-1, 0 \leq n_j \leq N-1 \\ &= \{\pm(Mn - Nm), 1 \leq n \leq N-1, \\ &1 \leq m \leq M-1\} \cup \mathbb{D}_s \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\mathbb{D}'_c = \{\pm(Mn - Nm), 1 \leq n \leq N-1, 1 \leq m \leq M-1\}$, 因此, \mathbb{D} 可以表示为

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_s \cup \mathbb{D}'_c \quad (12)$$

为了简化计算过程, 只考虑对称一侧的正延迟 \mathbb{D}^+ , 可以表示为

$$\mathbb{D}^+ = \mathbb{D}_s^+ \cup \mathbb{D}'_c^+ \quad (13)$$

则 $\mathbb{D}_s^+ = \{Mn, 0 \leq n \leq N-1\} \cup \{Nm, 0 \leq m \leq M-1\}$, $\mathbb{D}'_c^+ = \{Mn - Nm, 1 \leq n \leq N-1, 1 \leq m \leq M-1\}$ 。由于 $m, n \neq 0$, 则所有阵元与位置0阵元产生的延迟并不影响集合 \mathbb{D}_c^+ 中的元素, 只对集合 \mathbb{D}_s^+ 产生影

响。引入文献[2]和[14]的结论可知: \mathbb{D}^+ 中含有 MN 个不同元素, 连续延迟范围为 $[-M - N + 1, M + N - 1]$, 对称一侧正延迟的孔洞位置为 $\{aM + bN, a > 0, b > 0\}$ 。通过上述讨论, 后文将分析阵列中具体阵元对阵列自由度和连续延迟的影响。

通过集合 \mathbb{D}^+ 可知, 与位置0产生的延迟不影响集合 \mathbb{D}_c^+ 元素个数, 定义去掉位置0元素后, 整个阵元位置为 $\tilde{\mathbb{S}}$, 则可表示为

$$\tilde{\mathbb{S}} = \{Mn, 1 \leq n \leq N-1\} \cup \{Nm, 1 \leq n \leq M-1\} \quad (14)$$

则整个阵列产生的延迟 $\tilde{\mathbb{D}}$ 可表示为

$$\tilde{\mathbb{D}} = \tilde{\mathbb{D}}_s \cup \tilde{\mathbb{D}}_c \quad (15)$$

其中, $\tilde{\mathbb{D}}_s, \tilde{\mathbb{D}}_c$ 可表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_s &= \{M(n_i - n_j), 1 \leq n_i, n_j \leq N-1\} \cup \{N(m_i - m_j), \\ &1 \leq m_i, m_j \leq M-1\} \\ &= \{\pm Mn, 0 \leq n \leq N-2\} \cup \{\pm Nm, 0 \leq m \leq M-2\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_c &= \{Nm_i - Mn_j, 1 \leq m_i \leq M-1, \\ &1 \leq n_j \leq N-1\} \cup \{Mn_j - Nm_i, \\ &1 \leq m_i \leq M-1, 1 \leq n_j \leq N-1\} \\ &= \{\pm(Mn - Nm), 1 \leq n \leq N-1, 1 \leq m \leq M-1\} \end{aligned} \quad (17)$$

为了简化计算, 只考虑对称一侧正延迟集合为

$$\tilde{\mathbb{D}}^+ = \tilde{\mathbb{D}}_s^+ \cup \tilde{\mathbb{D}}_c^+ \quad (18)$$

则 $\tilde{\mathbb{D}}_s^+ = \{Mn, 0 \leq n \leq N-2\} \cup \{Nm, 0 \leq m \leq M-2\}$, $\tilde{\mathbb{D}}_c^+ = \{Mn - Nm, 1 \leq n \leq N-1, 1 \leq m \leq M-1\}$ 。

性质1: 当 $M > 2, N > 3$ 时, 去掉位置0的阵元, 互质阵列连续延迟不变。

证明 对比集合 \mathbb{D}^+ 和 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 可得 $\tilde{\mathbb{D}}^+ \cup \{M(N-1), N(M-1)\} = \mathbb{D}^+$, 即集合 \mathbb{D}^+ 比 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 多两个元素, 考虑这两个元素是否影响连续延迟, 由于连续延迟区间为 $[-M - N + 1, M + N - 1]$, 而缺失两个元素皆大于0, 因此只需要判断这两个元素与 $M + N - 1$ 的大小关系, 可以通过反证法证明, 令集合 $\{M(N-1), N(M-1)\} = \tilde{\mathbb{D}}_1^+$, 假设 $\tilde{\mathbb{D}}_1^+$ 中第1个元素 $M(N-1)$ 小于等于 $M + N - 1$, 则可得

$$\begin{aligned} M(N-1) &\leq M + N - 1 \\ N &\leq 2 + \frac{1}{M-1} \end{aligned} \quad (19)$$

要想满足该不等式, 只能 $M = 2, N = 3$, 或者 $M > 2, N = 2$, 皆与条件矛盾, 所以该假设不成立, 则可得 $M(N-1) > M + N - 1$ 。假设 $\tilde{\mathbb{D}}_1^+$ 中第2个元素小于等于 $M + N - 1$, 则可得

$$\begin{aligned} N(M-1) &\leq M + N - 1 \\ M &\leq 2 + \frac{1}{N-1} \end{aligned} \quad (20)$$

要想满足该不等式, 只能 $N = 2, M = 3$, 或者 $N > 2, M = 2$, 其与条件矛盾, 所以该假设不成立, 因而可得 $N(M - 1) > M + N - 1$. 所以这两个元素都大于 $M + N - 1$, 并不影响阵列的连续延迟.

证毕

由性质1可知, 在 M 和 N 满足一定条件下, 去掉位置0的元素, 阵列中对称一侧的正延迟只减少2个, 且绝对值不相等, 则整个差分共阵延迟只减少4个, 但是连续延迟并没有改变, 不影响连续延迟拓扑. 因此, 利用MUSIC算法估计信源DOA, 将不影响算法性能, 同时可以减少设备成本和虚拟阵元冗余. 上述分析启发本文研究新型的稀疏阵列配置, 通过优化阵列结构, 改善差分共阵的延迟拓扑, 提高DOA估计精度. 下面引出提出的两种阵列配置方法.

3.2 提出的阵列设计1

提出的阵列设计1如图2所示, 该设计方法将0位置元素移动到位置 $-M$, 形成了新的阵列设计方法. 定义 S 为提出阵列中所有阵元的位置, 则 S 可以表示为

$$S = \{ Mn, 1 \leq n \leq N - 1 \} \cup \{ Nm, 1 \leq n \leq M - 1 \} \cup \{-M\} \quad (21)$$

性质2: 通过 S 可知, 把0位置元素移到了位置 $-M$, 则新的 \mathbb{D}^+ 共有 $MN + M - 1$ 个不同元素.

证明 定义整个阵列产生的延迟为 \mathbb{D} , \mathbb{D} 可以表示为两部分, 一部分是互质阵列去掉0元素后产生的差分共阵 $\tilde{\mathbb{D}}$, 另一部分是 $-M$ 元素与其他元素产生的延迟集合, 则可表示为

$$\mathbb{D} = \tilde{\mathbb{D}} \cup \{ \pm(Mn_i + M), 1 \leq n_i \leq N - 1 \} \cup \{ \pm(Nm_i + M), 1 \leq m_i \leq M - 1 \} \quad (22)$$

为了简化计算, 只考虑对称集合中的一侧并去掉重复的元素, 则该延迟集合可表示为

$$\mathbb{D}^+ = \tilde{\mathbb{D}}^+ \cup \{ M(N - 1), MN \} \cup \{ (Nm_i + M), 1 \leq m_i \leq M - 1 \} \quad (23)$$

而 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 共有 $MN - 2$ 个元素, 且集合 $\{ (Nm_i + M), 1 \leq m_i \leq M - 1 \} \subseteq \{ aM + bN, a > 0, b > 0 \}$, 所以该集合是阵列中孔洞的位置, 与 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 无重复元素, 则 \mathbb{D}^+ 共有 $MN + M - 1$ 不同的元素. 证毕

提出的阵列模型1比互质阵列多了 $M - 1$ 个元素, 也对某些孔洞位置进行修补, 增加了差分共阵连续虚拟延迟.

性质3: 假设 $kM < N, k = \lfloor N/M \rfloor, M \geq 3, N \geq 7$, 或 $M \geq 4, N \geq 5$ 提出的阵列模型1连续延迟为 $[-2M - N + 1, 2M + N - 1]$.

证明 去掉位置0阵元后, 连续延迟为

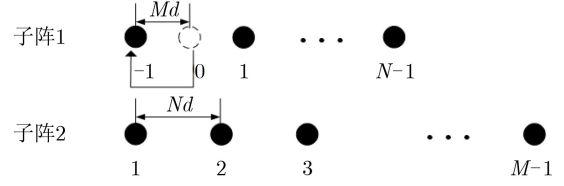


图2 提出阵列设计1结构图

$[-M - N + 1, M + N - 1]$, 而且新增的延迟集合为 $\{ M(N - 1), MN \} \cup \{ (Nm_i + M), 1 \leq m_i \leq M - 1 \}$, 而孔洞的位置为 $\{ aM + bN, a > 0, b > 0 \}$, 则第1个孔洞 $M + N$ 位置被填充, 而下个孔洞 $2M + N$ 不在该集合中, 没有被填充, 所以连续的虚拟延迟区间为 $[-2M - N + 1, 2M + N - 1]$. 由于移动位置0元素, 需要考虑 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 是否对新的连续延迟产生影响. 由于 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 中第1个元素 $M(N - 1)$ 已被新增的延迟集合填充, 只需要讨论 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 中第2个元素 $N(M - 1)$ 是否对延迟有影响, 运用反证法, 假设第2个元素 $N(M - 1)$ 对延迟有影响, 则可得

$$N(M - 1) \leq 2M + N - 1$$

$$M \leq 2 + \frac{3}{N - 2} \quad (24)$$

要想满足该不等式, 要求 $N = 3, M = 5, 4, 2$ 或者 $N = 4, 5, M = 3, 2$, 或者 $N \geq 6, M = 2$, 上述情况均与条件矛盾, 所以 $N(M - 1) > 2M + N - 1$, 即连续的虚拟延迟范围为 $[-2M - N + 1, 2M + N - 1]$

证毕

3.3 提出的阵列设计2

提出的阵列设计2的阵列结构如图3所示, 该方法将0位置元素移动到位置 $-N$, 以此优化阵列结构. 定义 S 为提出阵列的阵元位置, 其可以表示为

$$S = \{ Mn, 1 \leq n \leq N - 1 \} \cup \{ Nm, 1 \leq n \leq M - 1 \} \cup \{-N\} \quad (25)$$

性质4: 通过 S 可知, 把位置0的元素移到了 $-N$ 位置, 则新阵列 \mathbb{D}^+ 共有 $MN + N - 1$ 个不同元素.

证明 定义整个阵列产生的延迟为 \mathbb{D} , \mathbb{D} 可以表示为两部分, 一部分是互质阵列去掉0元素后产生的差分共阵 $\tilde{\mathbb{D}}$, 另一部分是 $-N$ 元素与其他元素产生的延迟集合, 则可表示为

$$\mathbb{D} = \tilde{\mathbb{D}} \cup \{ \pm(Mn_i + N), 1 \leq n_i \leq N - 1 \} \cup \{ \pm(Nm_i + N), 1 \leq m_i \leq M - 1 \} \quad (26)$$

为了简化计算, 只考虑对称集合中的一侧元素并去掉重复集合, 则其表示为

$$\mathbb{D}^+ = \tilde{\mathbb{D}}^+ \cup \{ N(M - 1), MN \} \cup \{ (Mn_i + N), 1 \leq n_i \leq N - 1 \} \quad (27)$$

而 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 共有 $MN - 2$ 个元素, 且集合 $\{ (Mn_i + N),$

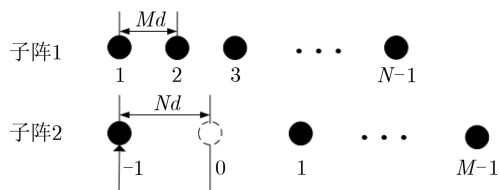


图3 提出阵列设计2结构图

$1 \leq n_i \leq N-1 \subseteq \{aM + bN, a > 0, b > 0\}$, 即该集合是阵列中孔洞的位置, 与 $\tilde{\mathbb{D}}^+$ 无重复元素, 所有 \mathbb{D}^+ 共有 $MN + N - 1$ 不同的元素。证毕

性质5: 假设 $kM < N, k = \lfloor N/M \rfloor, M \geq 3, N \geq 7$, 或 $M \geq 4, N \geq 5$ 提出的阵列设计方法2连续延迟为 $[-M - 2N + 1, M + 2N - 1]$ 。

证明 移除位置0阵元后, 连续延迟为 $[-M - N + 1, M + N - 1]$, 而且新增的延迟集合为 $\{N(M-1), MN\} \cup \{Mn_i + N, 1 \leq n_i \leq N-1\}$, 而孔洞的位置为 $\{aM + bN, a > 0, b > 0\}$, 所以第1个孔洞位置 $M + N$ 被填充, 以此类推, 由于满足 $k \leq \max(n_i)$, 所以一直到第 $kM + N$ 个孔洞均被填充。然而, 第 $M + 2N$ 个元素仍然为孔洞, 所以整个阵列连续延迟潜在区间为 $[-M - 2N + 1, M + 2N - 1]$ 。下文将证明该猜测, 由于移动0位置元素, 需要考虑 $\tilde{\mathbb{D}}_1^+$ 是否对新的连续延迟产生影响。采用反证法, 假设 $\tilde{\mathbb{D}}_1^+$ 中第1个元素 $M(N-1)$ 对虚拟延迟有影响, 则可得

$$\begin{aligned} M(N-1) &\leq M + 2N - 1 \\ N &\leq 2 + \frac{3}{M-2} \end{aligned} \quad (28)$$

要想满足该不等式, 穷举所有取值, 要求满足 $M = 3, N = 5, 4, 2$, 或者 $M = 4, 5, N = 3, 2$, 或者 $M \geq 6, N = 2$, 上述均与已知条件矛盾, 所以 $M(N-1) > M + 2N - 1$ 。 $\tilde{\mathbb{D}}_1^+$ 中第2个元素 $N(M-1)$ 已被新增的延迟集合填充, 即连续延迟为 $[-M - 2N + 1, M + 2N - 1]$ 。证毕

通过分析差分共阵孔洞关系, 优化互质阵列结构, 得出提出的两种阵列设计方法。当运用MUSIC算法进行DOA估计时, 提出的阵列结构1是移动0位置阵元到 $-M$ 位置, 比互质阵列多 $2M$ 个连续延迟。提出的阵列结构2是移动0元素到 $-N$ 位置, 比互质阵列多 $2N$ 个连续延迟。根据参数 M 和 N 取值不同, 提出的两种阵列设计方法连续延迟和自由度指标有所差异, 若 $N > M$, 则提出的阵列设计2的连续延迟多于提出的阵列设计1, 反之亦然。由于互质阵列连续延迟的局限性, 当阵列阵元较多时, 即当增大 M 和 N 时, 提出的两种阵列配置方式将比互质阵列分别多出 $2M$ 和 $2N$ 个连续延迟, 具有较好优势。

4 仿真实验

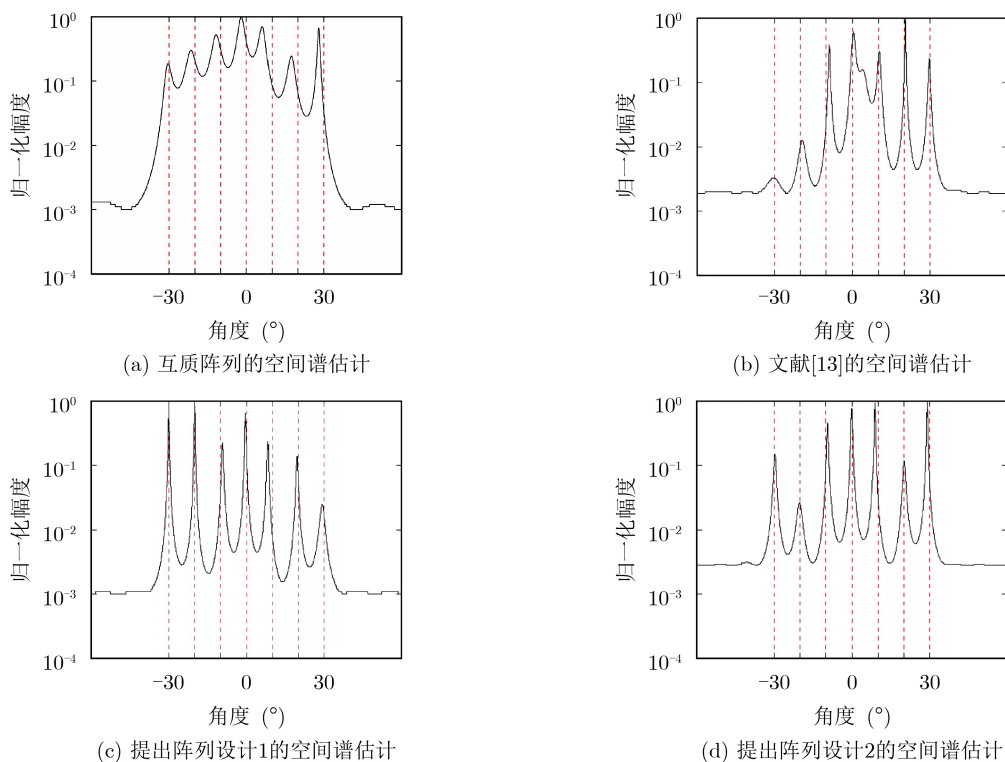
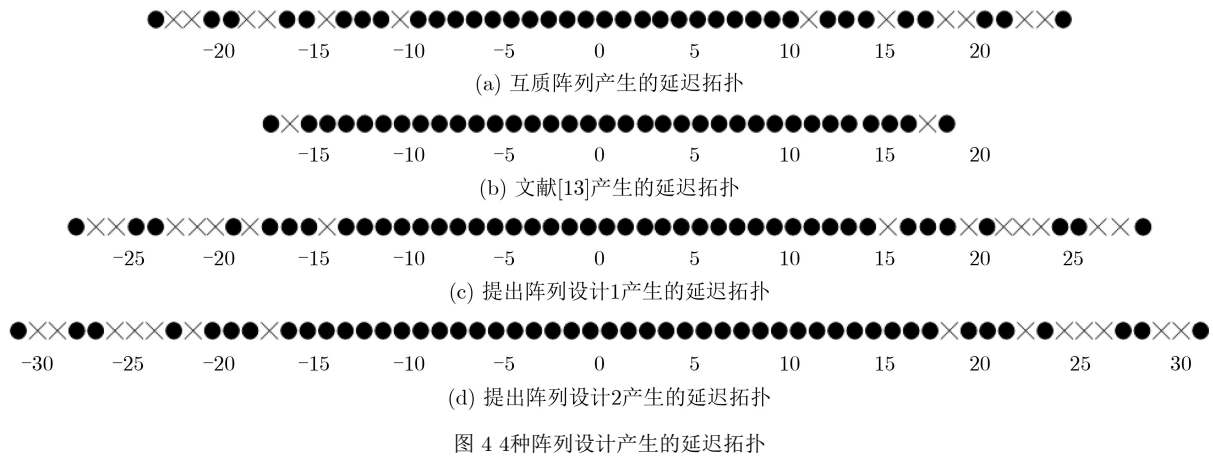
本节选取互质阵列(CPA)、提出的阵列设计1(Proposed Method1, PM1)、提出的阵列设计2(Proposed Method2, PM2)和文献[13]提出的方法开展DOA估计性能比较, 以验证提出方法的优越性。为了公平比较, 选用相同物理传感器数目、相同的DOA估计算法(MUSIC)为前提条件, 并给出了克拉美罗界^[19](Cramér-Rao Bound, CRB)曲线作为参照, 提出的阵列设计1和提出的阵列设计2的阵列参数为 $M = 4$ 和 $N = 7$, 文献[13]选择三级互质阵列, 阵列参数 $m_1 = 2, 3, 7$ 。因此, 上述每个阵列共有10个阵元。

4种阵列产生的虚拟传感器位置如图4所示。互质阵列产生的连续延迟范围是 $[-10, 10]$ 。提出阵列设计1和提出阵列设计2产生的连续延迟分别为 $[-14, 14]$ 和 $[-17, 17]$, 文献[13]阵列产生的连续延迟为 $[-16, 16]$, 提出的阵列设计方法连续阵元数明显多于互质阵列。另外, 从差分共阵所形成的总延迟方面考虑, 互质阵列总延迟数为37, 提出的两种阵列设计的总延迟分别为43和49, 综上, 提出的阵列设计方式在连续延迟和总延迟数量方面均优于互质阵列。而文献[13]的连续延迟优于提出的阵列设计1, 但是对比总的延迟数量, 提出的两种阵列设计均优于文献[13]。

仿真1 4种阵列在相同信噪比下MUSIC算法的角度估计性能。

由图4可知互质阵列产生的连续延迟个数为21。提出阵列设计1和阵列设计2产生的连续虚拟传感器个数分别29和35。文献[13]阵列产生的连续虚拟传感器为33。假设信号源数为7, 信号源角度均匀分布于 $[-30^\circ, 30^\circ]$, 信号源与噪声互不相关, 信噪比为 $\text{SNR} = -5$ dB, 快拍数为 $T = 200$, 耦合参数 $c_1 = 0.4e^{j\pi/3}$, $B = 100$ 。图5显示了4种方法的信源DOA估计性能。从图中可知, 提出的两种阵列均能估计出信源方向信息, 文献[13]提出的阵列和互质阵列的角度估计误差较大、存在伪峰, 导致角度分辨率低, 无法准确估计目标信号源。由式(7)可求得互质阵列和文献[13]提出阵列的耦合泄漏量分别为 $L_1 = 0.3905$ 和 $L_2 = 0.5065$, 而提出的两种阵列耦合泄漏量分别为 $L_3 = 0.3872$ 和 $L_4 = 0.3866$ 。因此, 文献[13]提出阵列具有较强的耦合效应, 导致角度估计性能变差, 而互质阵列虽然耦合泄漏量较小, 但是由于自由度较低, 无法准确估计信源DOA, 提出阵列设计方法具有较多的连续延迟和较低的耦合效应, 由此带来了目标分辨性提升。

仿真2 DOA估计均方根误差随信噪比的变化情况。



定义估计角度的均方根误差为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{IQ} \sum_{i=1}^I \sum_{q=1}^Q (\bar{\theta}_q(i) - \theta_q)^2} \quad (29)$$

其中， $\bar{\theta}_q$ 表示第 q 个信源在第 i 次蒙特卡罗实验的DOA估计值， θ_q 为相应的真实信源DOA，蒙特卡罗实验次数为 $I = 300$ ，快拍数为 $T = 1000$ ，耦合参数 $c_1 = 0.1e^{j\pi/3}$ ， $B = 100$ ，信号源设置与仿真1相同。均方误差在不同信噪比条件下的变化情况如图6所示。4种阵列的均方根误差大小都随着信噪比的增大而减小，提出阵列设计的DOA估计性能均优于互质阵列和文献[13]提出的阵列，由式(7)可求得互质阵列和文献[13]提出阵列的耦合泄漏量为

$L_1 = 0.1245$ 和 $L_2 = 0.1902$ ，而提出的两种阵列耦合泄漏量分别为 $L_3 = 0.1234$ ， $L_4 = 0.1232$ 。所以在该耦合系数设置条件下，提出阵列模型优于其他两种阵列。在提出的两种阵列设计方法中，阵列设计2性能较好，因为其具有更多的连续延迟。从图中还可以看出CRB曲线距离均方根误差曲线具有一定间隙，这是因为CRB曲线是理想状态下的估计误差下限，独立于耦合效应影响，在信号源数目较少、无阵元耦合等理想条件下均方根误差曲线趋近于CRB曲线，而该仿真条件下的耦合效应一定程度上影响了DOA估计算法性能。

仿真3 DOA估计均方根误差随快拍数的变化情况。

本次仿真的信噪比为 $\text{SNR} = -5$ dB, 信源设置与仿真1相同, 耦合参数 $c_1 = 0.1e^{j\pi/3}$, $B = 100$, 300次蒙特卡罗实验取平均形成空间谱曲线, 以此验证4种阵列随快拍的变化情况。由图7可知, 随着快拍数的增加, 4种阵列的均方根误差都在减小, 趋势变化相近于CRB曲线, 其原因可归结于: 随着快拍的增多, 协方差矩阵噪声扰动趋于稳定, 更有利于参数估计。从图中还可以得出, 随着快拍数的增加, 提出的阵列结构的DOA估计性能优于互质阵列和文献[13]提出的方法, 其性能提升原因为提出阵列的差分共阵具有更多的连续延迟和较低的耦合效应。

5 结论

本文通过分析互质阵列阵元位置对差分共阵的影响, 从降低硬件成本及简化求解过程考虑, 提出了两种基于互质阵列的稀疏设计方法。首先, 推得了互质阵列去掉位置为0的阵元, 减少了阵列总延迟, 但并不改变连续延迟。然后, 利用已有的互质阵列孔位关系, 移动冗余阵元到孔洞位置形成全新的稀疏阵列, 以获得更高的信源估计能力和更好的目标分辨性。最后通过实验仿真, 验证提出阵列设计方法相较于对比方法的优越性。下一步, 将该设计方法到更加复杂的稀疏阵列结构中。

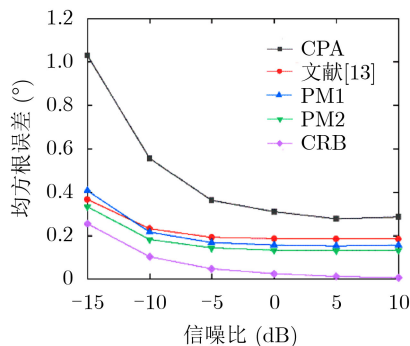


图6 均方根误差随信噪比的变化情况

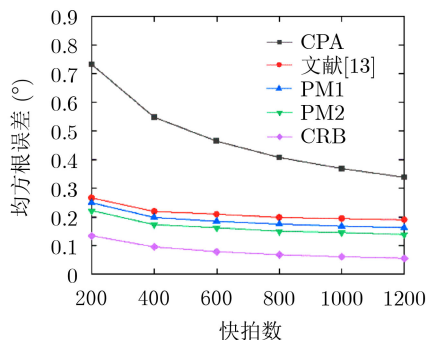


图7 均方根误差随快拍数的变化情况

参考文献

- [1] 孙兵, 阮怀林, 吴晨曦, 等. 基于Toeplitz协方差矩阵重构的互质阵列DOA估计方法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: 10.11999/JEIT181041.
- [2] SUN Bing, RUAN Huailin, WU Chenxi, *et al.* Direction of arrival estimation with coprime array based on Toeplitz covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: 10.11999/JEIT181041.
- [3] WANG Xinghua, CHEN Zhenhong, REN Shiwei, *et al.* DOA estimation based on the difference and sum coarray for coprime arrays[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 69: 22–31. doi: 10.1016/j.dsp.2017.06.013.
- [4] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.
- [5] LIU Chunlin and VAIDYANATHAN P P. Remarks on the spatial smoothing step in coarray MUSIC[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1438–1442. doi: 10.1109/LSP.2015.2409153.
- [6] PAN Jingjing, SUN Meng, WANG Yide, *et al.* An enhanced spatial smoothing technique with ESPRIT algorithm for direction of arrival estimation in coherent scenarios[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 3635–3643. doi: 10.1109/TSP.2020.2994514.
- [7] CHEN Hua, HOU Chumping, ZHU Weiping, *et al.* ESPRIT-like two-dimensional direction finding for mixed circular and strictly noncircular sources based on joint diagonalization[J]. *Signal Processing*, 2017, 141: 48–56. doi: 10.1016/j.sigpro.2017.05.024.
- [8] BOUDAHER E, AHMAD F, AMIN M G, *et al.* Mutual coupling effect and compensation in non-uniform arrays for direction-of-arrival estimation[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 61: 3–14. doi: 10.1016/j.dsp.2016.06.005.
- [9] TANG Mang, SHU Ting, HE Jin, *et al.* Direction-finding with spread array of identical doublets[J]. *IEEE Communications Letters*, 2021, 25(1): 142–146. doi: 10.1109/LCOMM.2020.3026367.
- [10] MOFFET A. Minimum-redundancy linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1968, 16(2): 172–175. doi: 10.1109/TAP.1968.1139138.
- [11] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167–4181. doi: 10.1109/TSP.2010.2049264.
- [12] ZHENG Zhi, YANG Chaolin, WANG Wenqin, *et al.* Robust

- DOA estimation against mutual coupling with nested array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 1360–1364. doi: [10.1109/LSP.2020.3011314](https://doi.org/10.1109/LSP.2020.3011314).
- [12] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: [10.1109/TSP.2010.2089682](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2089682).
- [13] ALAWSH S A and MUQAIBEL A H. Multi-level prime array for sparse sampling[J]. *IET Signal Processing*, 2018, 12(6): 688–699. doi: [10.1049/iet-spr.2017.0252](https://doi.org/10.1049/iet-spr.2017.0252).
- [14] QIN Sin, ZHANG Y D, and AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1377–1390. doi: [10.1109/TSP.2015.2393838](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2393838).
- [15] ZHOU Chengwei, GU Yujie, ZHANG Y D, *et al.* Compressive sensing-based coprime array direction-of-arrival estimation[J]. *IET Communications*, 2017, 11(11): 1719–1724. doi: [10.1049/iet-com.2016.1048](https://doi.org/10.1049/iet-com.2016.1048).
- [16] GUO Muran, ZHANG Y D, and CHEN Tao. DOA estimation using compressed sparse array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(15): 4133–4146. doi: [10.1109/TSP.2018.2847645](https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2847645).
- [17] LIU Chunlin, VAIDYANATHAN P P, and PAL P. Coprime coarray interpolation for DOA estimation via nuclear norm minimization[C]. 2016 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Montreal, Canada, 2016: 2639–2642. doi: [10.1109/ISCAS.2016.7539135](https://doi.org/10.1109/ISCAS.2016.7539135). doi: [10.1109/ISCAS.2016.7539135](https://doi.org/10.1109/ISCAS.2016.7539135).
- [18] LIU Ke and ZHANG Y D. Coprime array-based DOA estimation in unknown nonuniform noise environment[J]. *Digital Signal Processing*, 2018, 79: 66–74. doi: [10.1016/j.dsp.2018.04.003](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2018.04.003).
- [19] WANG Mianzhi and NEHORAI A. Coarrays, MUSIC, and the Cramér–rao bound[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(4): 933–946. doi: [10.1109/TSP.2016.2626255](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2626255).
- 刘 可: 男, 1986年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为阵列信号处理、矩阵优化、数据融合。
- 朱泽政: 男, 1996年生, 硕士生, 主要研究方向为阵列信号处理。
- 于 军: 男, 1984年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为信号处理、噪声检测、轴承寿命预测。
- 马俊达: 男, 1988年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为信号处理、运动控制。

责任编辑: 陈 倩