

一种基于奇偶校验码级联极化码的低复杂度译码算法

刘顺兰* 王 燕

(杭州电子科技大学电子信息学院 杭州 310018)

摘要: 极化码作为一种纠错码, 具有较好的编译码性能, 已成为 5G 短码控制信道的标准编码方案。但在码长较短时, 其性能不够优异。作为一种新型级联极化码, 奇偶校验码与极化码的级联方案提高了有限码长的性能, 但是其译码算法有着较高的复杂度。该文针对这一问题, 提出一种基于奇偶校验码级联极化码的串行抵消局部列表译码(PC-PSCL)算法, 该算法在编码前进行外码构造, 通过高斯近似(GA)得到的子信道错误概率选取较不可靠的信息位, 对选取的较不可靠的信息位进行串行抵消列表(SCL)译码和奇偶校验, 其余信息比特仅进行串行抵消(SC)译码。仿真结果表明, 在高斯信道下, 当码长为512, 码率为1/2, 误帧率为 10^{-3} , 最大列表长度为8时, 该文提出的低复杂度译码算法比SCL译码算法获得了0.5 dB的增益; 与基于奇偶校验的SCL译码算法性能相近, 但是空间复杂度和时间复杂度分别降低了38.09%, 15.63%。

关键词: 极化码; 奇偶校验码; 串行抵消列表; 复杂度

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2022)02-0637-09

DOI: 10.11999/JEIT200840

A Low-complexity Decoding Algorithm Based on Parity-Check-Concatenated Polar Codes

LIU Shunlan WANG Yan

(School of Electronic Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Polar codes have perfect coding and decoding performance as a kind of error correction code, which have become a standard coding scheme for 5G short code control channel. While the length of polar codes is short, its performance is not good enough. A novel concatenating scheme, parity check codes concatenating polar codes, has improved the performance of the limited length of polar codes. However, its decoding algorithm has high complexity. In order to solve the problem, a Parity Check aided Partial Successive Cancellation List(PC-PSCL) algorithm based on parity-check-concatenated polar codes is proposed. In this algorithm, outer codes are constructed before encoding and the information bits with not enough reliability are selected through sub-channel error probability obtained by Gaussian Approximation (GA), which perform Successive Cancellation List (SCL) decoding with the help of parity check codes, while the remaining bits just perform Successive Cancellation (SC) decoding. The simulations in additive white Gaussian noise channel reveal that when the codes length is 512, the codes rate is 1/2, the frame error rate is 10^{-3} and the maximum list length is 8, the proposed low-complexity decoding algorithm achieves a gain of about 0.5 dB over the SCL decoding algorithm, keeps the similar performance compared with the original decoding algorithm, and the space complexity and time complexity of the decoding algorithm are reduced by 38.09% and 15.63% respectively.

Key words: Polar codes; Parity Check (PC) code; Successive Cancellation List (SCL); Complexity

收稿日期: 2020-09-28; 改回日期: 2021-07-18; 网络出版: 2021-12-10

*通信作者: 刘顺兰 liushunlan@hdu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(U1809201), 浙江省自然科学基金(LY18F010013)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (U1809201), The Zhejiang Provincial Natural Science Foundation (LY18F010013)

1 引言

极化码于2009年由Arikan^[1]首次提出,是唯一可以理论上证明可达到任意二进制离散无记忆对称信道容量的新型高效信道编码技术,并且由于其较低的编、译码复杂度等优势,受到了广泛的关注,因此,极化码成为近年来最具吸引力的信道编码之一^[2-4],成功入选5G标准,作为增强移动宽带场景中控制信道的编码方案^[5]。当极化码的长度趋于无穷时,才能更好地达到信道容量,然而在中短码长时性能不佳。为了提高极化码的纠错性能,先后提出了许多不同的译码方法。文献^[1]提出采用串行抵消(Successive Cancellation, SC)译码算法,由于SC译码算法是一种次优的译码算法,在有限长码长中性能有待提升,并且在译码时前面的信息位一旦判决出错,将会影响后面的译码结果,造成错误传播。为了解决这一问题,文献^[6,7]提出了串行抵消列表(Successive Cancellation List, SCL)译码算法,该算法通过扩张译码路径,提高了译码结果的正确性,但增加了时间复杂度和空间复杂度,成为一套功能强大并在不断改进的一种算法^[8]。文献^[9]引入循环冗余校验码与极化码级联,提出CRC辅助SCL译码算法(Cyclic redundancy Check Aided SCL, CA-SCL),有助于在SCL译码的列表中挑选出正确的译码结果。此后文献^[10]提出的奇偶校验码级联极化码引入校验比特,在译码过程中能够实时校验译码路径,即奇偶校验码辅助SCL译码算法(Parity Check Aided Successive Cancellation List, PC-SCL)。这两种译码算法虽然在性能上优于SC译码和SCL译码,但是与SCL译码一样,有着较大的复杂度。

根据极化码极化原理可知,在码长趋于无穷时,一部分信道的信道容量趋于1,另一部分的信道容量趋于0,在信道容量趋于1的信道上传输信息比特,趋于0的信道上传输冻结比特,而对于有限码长,存在着未被完全极化的子信道,这些子信道的可靠性较低。基于上述分析,本文提出了一种基于奇偶校验码级联极化码的低复杂度译码算法,即基于奇偶校验码级联极化码的串行抵消局部列表算法(Parity Check aided Partial Successive Cancellation List, PC-PSCL),对于可靠性较低的信息子信道进行SCL译码,并加入奇偶校验比特辅助校验,其余可靠性较高的信息子信道仅采取SC译码算法,该算法降低了复杂度,并在性能上逼近PC-SCL译码算法。

2 极化码

极化码的构造是编码中的一个重要步骤,根据

极化码的构造可以进行极化子信道的选择。目前常用的子信道可靠性估计算法有:Arikan^[1]首次提出极化码时给出了一种只针对二进制擦除信道的巴氏参数法;Mori等人^[11]借鉴对LDPC码的研究成果,提出了密度进化法(Density Evolution, DE);Trifonov^[12]提出的适用于高斯信道的高斯近似法(Gaussian Approximation, GA),目前已成为一种比较有效的度量方法;Schürch^[13]揭示极化码子信道间的偏用通序关系,华为提出了利用极化权重(Polarization Weight, PW),并引入参数 β 扩展,来计算AWGN信道下子信道可靠度的算法^[14]。在构造完成后,就可以根据极化码极化原理将信息比特与冻结比特混合,即可靠性比较高的子信道传输信息比特,可靠性比较低的子信道传输冻结比特。

对于给定的码长 N ,极化码的编码方式为

$$c_1^N = u_1^N \mathbf{G}_N \quad (1)$$

其中, $u_1^N = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ 为信源序列, $c_1^N = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ 为编码后码字序列, \mathbf{G}_N 是极化码的生成矩阵, $\mathbf{G}_N = \mathbf{B}_N \mathbf{F}^{\otimes n}$, 其中 \mathbf{B}_N 称为位反转置换矩阵, $\mathbf{F}^{\otimes n}$ 为克罗内克积, 矩阵 $\mathbf{F} \triangleq [1, 0; 1, 1]$ 。设 \mathbf{A} 为对应信息比特信道的索引集合, $A \subset 1, 2, \dots, N$, 信息比特序列记为 $u_{\mathbf{A}}$, 也称为非固定比特, \mathbf{A}^c 为 \mathbf{A} 的补集, 对应冻结比特信道的索引集合, $u_{\mathbf{A}^c}$ 为冻结比特序列, 通常置为0。可将式(1)改为

$$c_1^N = u_{\mathbf{A}} \mathbf{G}_N(\mathbf{A}) \oplus u_{\mathbf{A}^c} \mathbf{G}_N(\mathbf{A}^c) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{G}_N(\mathbf{A})$ 表示由 \mathbf{A} 中元素对应的行构成的 \mathbf{G}_N 的子矩阵, $\mathbf{G}_N(\mathbf{A}^c)$ 同理, \oplus 表示模2加。

信源序列 u_1^N 编码得到码字 c_1^N , 使 c_1^N 通过信道 W^N 发送, 并且在信道输出端接收到 $y_1^N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, y_1^N 经过译码后生成 u_1^N 的估计值 $\hat{u}_1^N = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N)$, \hat{u}_i 表示第 i 个译码比特, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 当 \hat{u}_i 是冻结比特时, 直接得到 $\hat{u}_i = 0$, 当 \hat{u}_i 是信息比特时, 可通过计算式

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0, & L_N^{(i)} \geq 0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

生成其 \hat{u}_i 值。其中 $L_N^{(i)}$ 为对数似然比(Log Likelihood Ratio, LLR), 定义为

$$L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) = \ln \left(\frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | u_i = 0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | u_i = 1)} \right) \quad (4)$$

由文献^[1], 式(4)经过迭代计算后可重写为式(5)、式(6)。

$$\begin{aligned} L_N^{(2i-1)}(y_1^N, \hat{u}_1^{2i-2}) \\ = 2 \operatorname{arctanh}((\tanh(L_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,e}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,o}^{2i-2})/2)) \\ \times \tanh(L_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2})/2)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{L}_N^{(2i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{2i-1}) = \mathbf{L}_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) + (-1)^{\hat{u}_{1,o}^{2i-2}} \cdot \mathbf{L}_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,e}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,o}^{2i-2}) \quad (6)$$

上述SC译码过程是串行进行的，因此容易存在错误传播现象。SCL译码算法在SC算法的基础上引入了保留 L 条路径的思想，对于每条路径计算路径度量(Path Metric, PM)^[15]

$$\text{PM}_i^{(l)} \triangleq \sum_{k=1}^i \ln(1 + e^{-(1-2\hat{u}_k(l))\mathbf{L}_N^{(k)}(l)}), i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (7)$$

其中， l 表示第 l 条路径索引值， $\hat{u}_k(l)$ 表示第 l 条路径中第 k 个译码比特估计值， $\mathbf{L}_N^{(k)}(l)$ 表示第 l 条路径的对数似然比， $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ 。在实际应用中，为了便于硬件实现^[16]，式(7)可用下式替代

$$\text{PM}_i^{(l)} = \begin{cases} \text{PM}_{i-1}^{(l)}, & \hat{u}_i(l) = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(\mathbf{L}_N^{(i)}(l))) \\ \text{PM}_{i-1}^{(l)} + |\mathbf{L}_N^{(i)}(l)|, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

在每条路径扩展后都在不可靠的路径上加上一个惩罚值 $|\mathbf{L}_N^{(i)}(l)|$ ，因此当译码结束后得到 L 个译码序列，选取路径度量最小的序列为最终的译码结果。

SCL译码算法通过对信息位进行路径扩展，相对于SC译码算法提高了译码的可靠性，PC-SCL译码算法在SCL译码算法的基础上添加了PC校验比特，辅助路径筛选，进一步提高了译码算法的性能，但与SCL译码算法一样， L 倍路径的增加带来了较大的复杂度。本文提出的PC-PSCL译码算法在保持与PC-SCL译码算法相近性能的情况下，复杂度有了较大的下降，如下文所述。

3 PC-PSCL译码算法

本文采取的PC码级联极化码(PC-Polar)方案，如图1所示，PC码作为外码，极化码作为内码进行编码，信息比特 $v_1^Q = (v_1, v_2, \dots, v_Q)$ 经过外码构造，选择较不可靠的信息位构成信息比特序列 $s_1^I = (s_1, s_2, \dots, s_I)$ ，剩余信息比特为 $w_1^{Q-I} = (w_1, w_2, \dots, w_{Q-I})$ ，对 s_1^I 信息序列进行PC编码，编码完成后与 w_1^{Q-I} 信息比特混合，得到带有 M 个奇偶校验比特的外码码字 $x_1^{Q+M} = (x_1, x_2, \dots, x_{Q+M})$ ，极化码的信息位上放置外码码字 x_1^{Q+M} ，冻结位放置冻结比特，极化码编码后得到码字 c_1^N 。

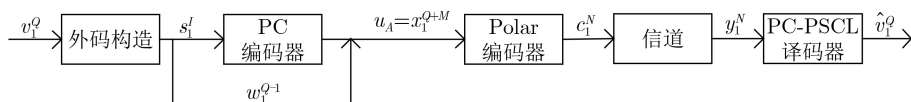


图1 PC-Polar级联方案

在接收端， y_1^N 经过PC-PSCL译码器，PC校验比特与被校验信息比特的译码有关，若PC比特前的信息比特译码错误会导致校验比特译码错误从而影响路径度量，而PC-SCL译码算法、PC-PSCL译码算法通过路径度量选择可靠性更高的路径，因此PC-PSCL译码算法与PC-SCL译码算法一样在性能上远远优于SCL译码和SC译码。在复杂度方面，PC-PSCL译码算法对信道极化后较不可靠的信息位采取SCL译码算法，并加以奇偶校验码的辅助，其余子信道进行SC译码，与SCL译码算法、PC-SCL译码算法相比大大降低了复杂度。

3.1 理论分析

本文通过高斯近似^[12]估计子信道的可靠性，在噪声方差为 σ^2 的AWGN信道下，假定全0传输，根据文献[17]， $\mathbf{L}_N^{(i)} \sim N(\mathbf{E}[\mathbf{L}_N^{(i)}], 2\mathbf{E}[\mathbf{L}_N^{(i)}])$ ，由式(5)、式(6)可以递推得到对数似然比的期望形式

$$\mathbf{E}[\mathbf{L}_N^{(2i-1)}] = \varphi^{-1}(1 - (1 - \varphi(\mathbf{E}[\mathbf{L}_{N/2}^{(i)}]))^2) \quad (9)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{L}_N^{(2i)}] = 2\mathbf{E}[\mathbf{L}_{N/2}^{(i)}] \quad (10)$$

其中，函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh \frac{\mu}{2} \exp\left(-\frac{(\mu-x)^2}{4x}\right) d\mu, & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

一般地，函数 $\varphi(x)$ 通过数值计算得到，采用如式(12)所示的近似形式

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-0.4527x^{-0.86} + 0.0218), & 0 < x < 10 \\ \sqrt{\frac{\pi}{x}} \left(1 - \frac{10}{7x}\right) \exp\left(-\frac{x}{4}\right), & x \geq 10 \end{cases} \quad (12)$$

由式(3)可以推导得到每个子信道的错误概率为

$$\begin{aligned} P_e(i) &= P_e(L_N^{(i)} < 0) = P_e\left(\frac{L_N^{(i)} - \mathbf{E}[L_N^{(i)}]}{\sqrt{2\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}} < \frac{-\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}{\sqrt{2\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}}\right) \\ &= P_e\left(\frac{L_N^{(i)} - \mathbf{E}[L_N^{(i)}]}{\sqrt{2\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}} > \frac{\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}{\sqrt{2\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\mathbf{E}[L_N^{(i)}]}/2\right), \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 函数 $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]$, 函数 $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$.

在PC-PSCL译码算法中, 根据 $P_e(i)$ 选取信息比特中子信道错误概率相对较高的一些信息比特进行SCL译码和奇偶校验, 假设错误概率相对较高的信息比特个数在总信息比特个数中的占比为 b , 由式(13)得知可以将 $E[L_N^{(i)}]$ 作为信息比特是否扩展的依据。当 b 一定时, 会有对应的子信道错误概率 $P_{e-b}(i)$, 当 $P_e(i) \geq P_{e-b}(i)$ 时, 表示第 i 个信息比特需要进行扩展, 否则进行SC译码, 即

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0, & L_N^{(i)} > E_b[L_N^{(i)}] \\ 1, & L_N^{(i)} < -E_b[L_N^{(i)}] \\ \text{保留0和1,} & |L_N^{(i)}| \leq E_b[L_N^{(i)}] \end{cases} \quad (14)$$

其中, $E_b[L_N^{(i)}] = \beta E[L_N^{(i)}]$, $\beta > 0$, b 与 β 呈正相关。

根据文献[18], 给定信息信道集合 \mathbf{A} , 事件“极化码在PC-PSCL译码算法下出错”定义为

$$E = \{(u_1^N, \hat{u}_1^N, y_1^N) \in \mathcal{X}^N \times \mathcal{X}^N \times \mathcal{Y}^N : u_A \neq \hat{u}_A\} \quad (15)$$

以上错误分为两种情况, 一种是正确路径在译码过程中已经丢失, 用符号 \mathcal{C} 表示, 另一种是译码结束后正确路径存在但不具有最小的路径度量被丢弃, 用 $\bar{\mathcal{C}}$ 表示, 那么

$$P_E(N, \mathbf{A}, L, \beta) = P(\mathcal{C}) + P(E|\bar{\mathcal{C}})P(\bar{\mathcal{C}}) \quad (16)$$

事件 \mathcal{C} 的概率可以进一步分解为

$$P(\mathcal{C}) = \sum_{i \in \mathbf{A}} P(\mathcal{C}_i) \quad (17)$$

其中, 事件 \mathcal{C}_i 表示正确路径在第 i 层的译码过程中丢失。

同样, 事件 \mathcal{C}_i 可以分为两类事件, 一是受路径 L 的限制, 即正确路径的路径度量大于其余 L 条路径度量没有被保留, 用符号 \mathcal{F}_i 表示该事件, 二是第 i 个信息比特没有扩展导致译码错误, 用 \mathcal{T}_i 表示。于是

$$P(\mathcal{C}_i) = P(\mathcal{F}_i) + P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i)P(\bar{\mathcal{F}}_i) \quad (18)$$

对于PC-SCL译码算法(相当于 $\beta = +\infty$), 条件概率 $P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i) = 0$, 则由式(16)—式(18)可以推导得到, PC-PSCL译码算法相对于PC-SCL译码算法引入的性能损失上界为

$$\begin{aligned} P_E(N, \mathbf{A}, L, \beta) - P_E(N, \mathbf{A}, L, +\infty) \\ \leq \sum_{i \in \mathbf{A}} P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i) + \sum_{i \in \mathbf{P}} \Delta P(\mathcal{F}_i) \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\Delta P(\mathcal{F}_i)$ 为PC-PSCL译码算法在经过奇偶校验后保留的路径数 L_p 受到限制引起的性能损失, $1 \leq L_p \leq L_{\max}$ 。在译码过程中, 对正确路径的分裂

特性给出一个显式的定量分析具有一定的难度, 原因在于每次译码路径超过上限后都会对各条路径的可靠性进行排序, 只保留最可靠的若干条路径进入下一级的译码。除了正确路径本身, 还要考虑错误路径与正确路径之间的关系, 这就会导致显式的分析变得较为复杂^[19], 因此下文通过仿真分析 L_p 对译码算法的影响。

文献[19]由式(9)、式(10)推出命题: 在假设高斯近似的前提下, 即 $L_N^{(i)} \sim N(E[L_N^{(i)}], 2E[L_N^{(i)}])$, 那么对于任何的消息序列 u_1^N , 如果有 $\hat{u}_1^{i-1} = u_1^{i-1}$, 则

$$E[L_N^{(i)}] = \begin{cases} E[L_0(u_i)], & u_i = 0 \\ -E[L_0(u_i)], & u_i = 1 \end{cases} \quad (20)$$

其中, $E[L_0(u_i)]$ 表示在噪声方差为 σ^2 的高斯信道上发送全零码字时, $L_N^{(i)}$ 对应的对数似然比的期望值。此命题说明 $L_N^{(i)}$ 的分布根据 u_i 的取值是对称的, 当 $u_i = 0$ 时, 根据式(14), 当 $L_N^{(i)} < -\beta E[L_N^{(i)}]$, \hat{u}_i 译码错误, 通过简单的归一化, 可得条件概率 $P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i)$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i) &= P(L_N^{(i)} < -\beta E[L_N^{(i)}]) \\ &= P\left(\frac{L_N^{(i)} - E[L_N^{(i)}]}{\sqrt{2E[L_N^{(i)})}} < \frac{-\beta E[L_N^{(i)}] - E[L_N^{(i)}]}{\sqrt{2E[L_N^{(i)})}}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

引入奇偶校验比特集合 \mathbf{P} 后, 由于奇偶校验比特不做扩展, 其错误概率可用式(13)表示, 因此条件概率 $P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i)$ 可完整地表示为

$$P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i) = \begin{cases} 0, & i \in \mathbf{A}^c \\ Q((1+\beta)\sqrt{E[L_N^{(i)})}/2), & i \in \mathbf{A} \\ Q(\sqrt{E[L_N^{(i)})}/2), & i \in \mathbf{P} \end{cases} \quad (22)$$

由以上分析可知: β 越大(即 b 越大), 分支扩展的信息比特个数越多, 由于 $Q(x)$ 函数单调递减, 因此 $P(\mathcal{T}_i|\bar{\mathcal{F}}_i)$ 越小, 即性能损失越少; 对于奇偶校验比特来说, 放置的子信道越可靠, 引入的额外性能损失就越少。

3.2 外码构造

本文提出的PC-PSCL译码算法, 在极化码编码前, 需构造外码块, 包括在传输信息比特的子信道中选择相对较不可靠信息子信道以及奇偶校验位。构造算法如下:

步骤1 根据高斯近似, 子信道错误概率小于目标概率的子信道传输信息比特, 在传输这些信息比特中的子信道仍存在有些信道相对而言较不可靠, 用其索引下标值构成集合 \mathbf{B} , $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, 在 \mathbf{B} 中选择 $M-1$ 个可靠性最高的信息子信道放置奇偶校

验位，则 B 集合以奇偶校验比特为限，被分成 M 个外码块，第 M 位奇偶校验位取 B 中的最后一位索引，保证检验 B 中所有的信息比特。如图2所示， $p_j \in B, j = 1, 2, \dots, M$ 表示第 j 个奇偶校验位的索引，因此 B 集合被划分为 M 个外码块，表示为 $T_j \subset B, j = 1, 2, \dots, M$ 。

步骤2 以 $T_j = \{t_{1,j}, t_{2,j}, \dots, t_{m_j,j}\}, j = 1, 2, \dots, M$ 表示第 j 个外码块，其中 m_j 表示第 j 个外码块的长度， $t_{m_j,j}$ 表示第 j 个外码块的第 m_j 个索引，即第 j 个外码块的最后一位。由步骤1易知在每个外码块中 $t_{m_j,j}$ 位放置奇偶校验比特，则第 j 个奇偶校验比特取值由奇偶校验方程式(23)求得

$$u_{p_j} = \left(\sum_{t \in Z_j} u_t \right) \bmod 2, j = 1, 2, \dots, M, \quad (23)$$

$$u_t \in \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$$

其中， Z_j 为第 j 个校验方程中的信息比特索引值， $\max(Z_j) < p_j, \max(Z_j)$ 表示 Z_j 中的最大索引，而 Z_j 里面的值参照文献[10]里的随机构造方法，为第 j 个校验比特所在外码块及其以前的 $j - 1$ 个外码块的信息比特按照一定的概率选出，即

$$Z_j \subset \{T_1, T_2, \dots, T_j\}, j = 1, 2, \dots, M \quad (24)$$

步骤3 将外码块对应到子信道上，如图3所示，完成外码构造后，将包含奇偶校验比特的序列送入polar码编码。

例如，在码长 $N = 256$ ，信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)等于1.5 dB时，经过高斯近似得到的子信道错误概率如图4所示。子信道错误概率越接近0，说明该信道越可靠，反之，子信道错误概率越接近0.45，说明该信道越不可靠，而子信道错误概率处于0到0.45之间的信道称为未完全极化信道。假设码率 $R = 1/2$ ，选定目标概率0.0425，子信道错误概率低于0.0425的信道传输信息比特，反

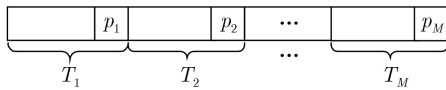


图2 PC-PSCL译码算法外码构造示意图

之传输冻结比特。在信息比特中选择较不可靠信息位，取信息比特总数的50%，此时 $b = 50\%$ ，集合 B 为子信道错误概率低于0.0425的64个信道，取奇偶校验比特个数 M 为5，按照上述的步骤1选取奇偶校验比特集合 P ， P 中前4个奇偶校验位选择集合 B 中子信道错误概率较低的信道，第5位取集合 B 中的最后一个比特，则 $P = \{64, 119, 159, 217, 233\}$ ，因此外码块 $T = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ 的取值如表1所示。

3.3 PC-PSCL译码具体实现

由上述构造算法可知，本文提出的级联极化码包含多个外码块，以一个外码块为例阐述译码过程，具体算法流程图如图5所示，多个译码块类似。假设外码块为 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ ， i 表示译码比特索引值。

当 $1 \leq i < t_1$ 时，说明该段不是外码中的比特，进行SC译码。若第 i 位是信息位，则是较可靠的信息位，直接根据式(3)和式(4)判断其值；若是冻结位，直接设置为收发双方都已知的固定位0。

当 $t_1 \leq i \leq t_m$ 时，该段主要有两种情况：

(1) $i \in T$ 。说明第 i 位是外码块中的比特，此时有两种情况，一是被选取的较不可靠的信息位，将该信息位进行路径扩展，同时保留0和1两条路径，

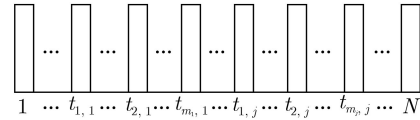


图3 含有外码块码长为 N 的极化码示意图

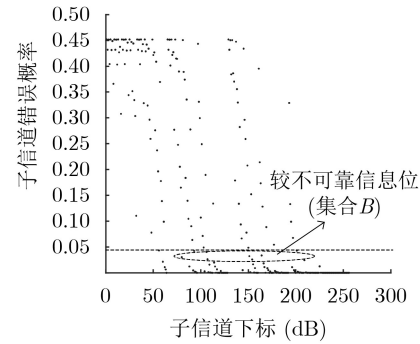


图4 $N = 256$ 信道极化示意图

表1 外码块 T 的取值

外码块	取值
T_1	{56, 60, 62, 63, 64}
T_2	{80, 88, 92, 93, 94, 95, 103, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 114, 115, 116, 117, 118, 119}
T_3	{121, 144, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 159}
T_4	{164, 166, 167, 168, 170, 171, 173, 178, 179, 181, 185, 196, 198, 199, 201, 202, 203, 205, 209, 210, 211, 213, 217}
T_5	{225, 226, 227, 229, 233}

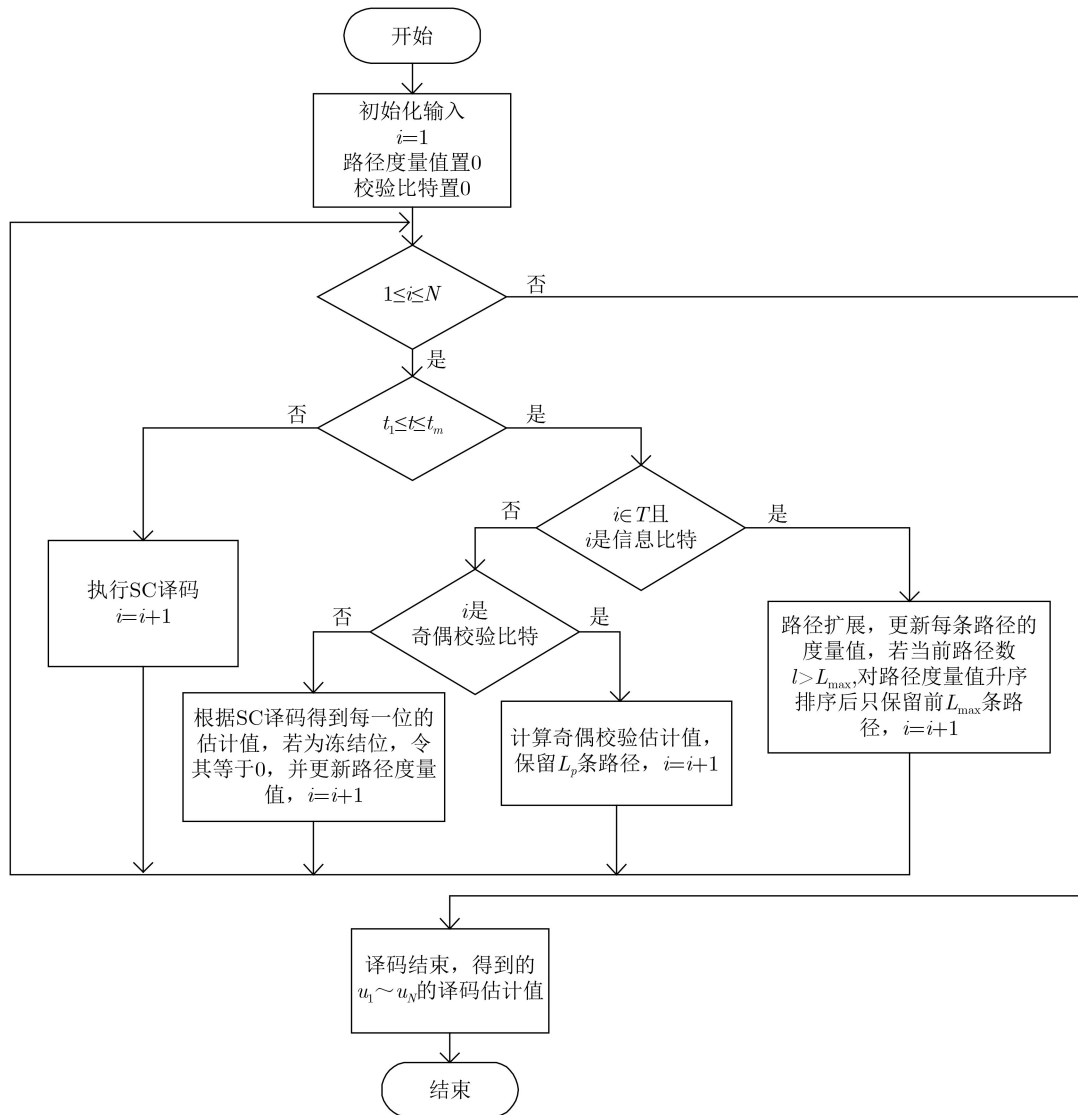


图5 PC-PSCL译码算法流程图

并记录路径度量值。假设此时扩展路径一共有 l 条, 当 l 大于设定的最大保留路径数 L_{\max} 时, 选择路径度量较小的 L_{\max} 条路径保留; 二是第 i 位是奇偶校验位, 根据式(23)奇偶校验方程得到奇偶校验估计值, 保留一条或多条通过奇偶校验的路径, 路径数记为 L_p , 若奇偶校验均未通过, 则选择路径度量最小的 L_p 条路径作为外码块区间内的估计序列。

(2) $i \notin T$ 。表明第 i 位是冻结位或者较可靠的信息位, 若该位是信息位则进行SC译码判决, 记录对数似然比, 若是冻结位直接判为0。

当 $t_m < i \leq N$ 时, 经过前两阶段的译码, 到此阶段时, 存在 L_p 条译码路径, 对 t_m 之后的译码比特继续SC译码。

由上述的译码过程分析可知, PC-PSCL译码算法只对外码块中的信息比特分支扩展、奇偶校验, 其余比特均只进行SC译码。本文的译码算法

利用了SC译码具有较低复杂度这一优点, 在外码块中引入SCL译码和奇偶校验, 弥补了SC译码性能不佳的问题, 相对于PC-SCL译码算法既降低了复杂度, 又保持了较好的性能。

3.4 PC-PSCL译码算法复杂度分析

如图6(a)是SCL译码算法所占用的存储空间, 文献[10]中表示提出的PC-SCL译码算法复杂度与SCL译码算法复杂度相近, 因此本文用SCL译码的复杂度近似, 在保存路径数达到 L_{\max} 之前, 路径数随着比特数 i 的增大呈指数型增长, 很快就能达到 L_{\max} 。由于 $N \gg L_{\max}$, 在保留路径数没有扩展到 L_{\max} 之前没有占用的部分空间忽略不计, 那么PC-SCL译码的空间复杂度为 $O(L_{\max}N)$ 。本文提出的PC-PSCL存储空间如图6(b)所示, 在外码块 $T = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ 中执行列表长度不超过 L_{\max} 的SCL译码算法, 对每段外码块进行奇偶校验后保留

L_p 条路径，所以PC-PSCL译码算法的复杂度与外码块 T 的区间长度和 L_p 有关，设外码块区间总长度为 T' ， $T' = \sum_{i=1}^M T'_i$ ， T'_i 为每一段区间长度，最长外码块区间长度为 $T'_{i_{\max}}$ ， $i = 1, 2, \dots, M$ ，则本文译码算法的空间复杂度为 $O(L_{\max}T'_{i_{\max}} + NL_p)$ 。改进的译码算法除了节省了存储空间，在计算量上也有所体现。SCL译码算法的计算量为 $L_{\max}N\log_2 N$ ，而PC-PSCL译码算法将极化码进行分段，在外码块译码时计算量为 $L_{\max}T'\log_2 N$ ，其余比特只进行SC译码，计算量为 $L_p(N - T')\log_2 N$ 。具体的译码算法复杂度比较如表2所示。

4 仿真结果和分析

本文在加性高斯白噪声信道下对比了几种不同译码算法的误帧率(Frame Error Rate, FER)，仿真次数为15000次。

图7是不同码长，码率为1/2， $L_{\max} = 8$ ，奇偶校验比特数 M 为5， $b = 50\%$ 的仿真结果，其中 L_p 取值分别为1, 2, 4。如图7(a)中 $N = 512$ ，由图7(a)可知：在PC-PSCL译码算法中，当 L_p 逐渐增大时，性能越来越好，但复杂度也增加，具体复杂度情况如表3所示。在 $L_p = 2$ 时，PC-PSCL译码算法性能已经优于SCL译码算法，与PC-SCL译码算法有着

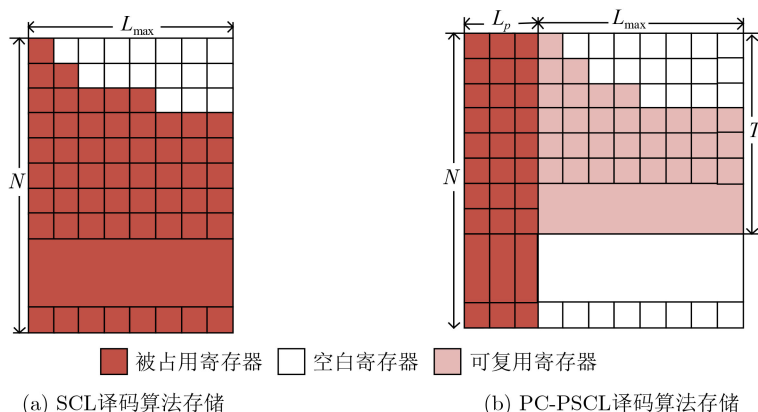


图6 在不同译码算法下存储空间占用情况

表2 3种译码算法复杂度对比

译码算法	空间复杂度	时间复杂度
SC译码	$O(N)$	$O(N\log_2 N)$
PC-SCL译码	$O(L_{\max}N)$	$O(L_{\max}N\log_2 N)$
PC-PSCL译码	$O(L_{\max}T'_{i_{\max}} + NL_p)$	$O((L_{\max}T' + L_p(N - T'))\log_2 N)$

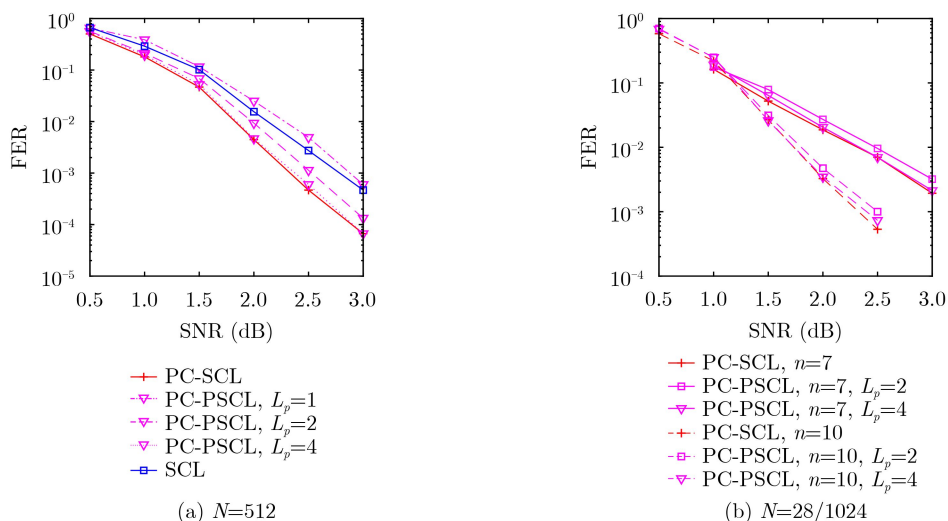


图7 不同码长、不同 L_p 情况下译码算法的性能

较小的差距,但空间复杂度节省了近63.09%; $L_p = 4$ 时,PC-PSCL译码算法性能逼近PC-SCL译码算法,比SCL译码算法获得了0.5 dB的增益,但较PC-SCL译码算法空间复杂度节省了近38.09%,时间复杂度节省了近15.63%。若考虑到性能和复杂度的折中,以牺牲较小的性能为代价, $L_p = 2$ 也不失为一个较好的选择。图7(b)考虑 $N = 128$ 和 $N = 1024$ 的情况,由图7(b)可以看到码长越长,译码性能越好,在 $L_p = 4$ 时PC-PSCL译码算法的性能与PC-SCL译码算法的性能相近,可以推断出在 $L_p = 4$ 时,PC-PSCL译码算法中经过奇偶校验保留的路径已经较为准确。

图8是码长为256,码率为1/2, $L_{\max} = 8$,奇偶校验比特数 M 为5, $L_p = 4$,选取的较不可靠信息比特占比 b 分别为20%,30%,50%的仿真结果。由图8可以看出:在 $b=20%$ 和30%的时候,PC-PSCL译码算法的性能较PC-SCL译码算法有着一定的差距,但 b 增大至50%时,PC-PSCL译码算法的性能逼近PC-SCL译码算法。因此,随着 b 的增大,扩展信息比特变多,PC-PSCL译码算法性能逐渐变好,同时复杂度也增大,如表4所示。

表3 $N = 512$ 时两种译码算法复杂度对比

译码算法	L_p	时间复杂度	空间复杂度
PC-PSCL	1	26784 (27.34%)	1000 (75.59%)
	2	28224 (23.44%)	1512 (63.09%)
	4	31104 (15.63%)	2536 (38.09%)
PC-SCL	—	36864	4096

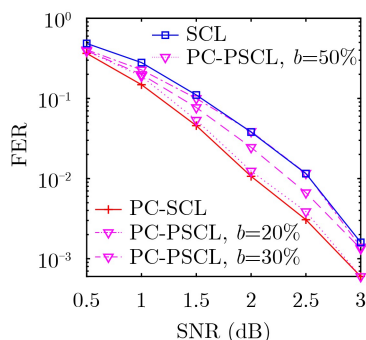


图8 $N = 256$ 时不同 b 译码算法的性能

表4 $N = 256$ 时两种译码算法复杂度对比

译码算法	b	时间复杂度	空间复杂度
PC-PSCL	20%	11968 (26.95%)	1136 (44.53%)
	30%	13024 (20.51%)	1176 (42.58%)
	50%	13152 (19.73%)	1240 (39.45%)
PC-SCL	—	16384	2048

5 结束语

基于PC码辅助的SCL译码算法,本文提出了一种低复杂度译码算法——PC-PSCL译码算法,对选取的局部信息比特进行奇偶校验和SCL译码。仿真结果显示,本文提出的译码算法在奇偶校验后保留合适的路径情况下有着和PC-SCL译码算法相近的性能,但是复杂度大大降低。

参考文献

- [1] ARIKAN E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(7): 3051–3073. doi: 10.1109/TIT.2009.2021379.
- [2] HONG S N, HUI D, and MARIĆ I. Capacity-achieving rate-compatible polar codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2017, 63(12): 7620–7632. doi: 10.1109/TIT.2017.2756668.
- [3] BIOGLIO V and LAND I. Polar-code construction of Golay codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(3): 466–469. doi: 10.1109/LCOMM.2018.2793273.
- [4] 张孝甜, 赵生妹, 郑宝玉. 无线信道中的Polar码协商[J]. *信号处理*, 2018, 34(7): 793–798. doi: 10.16798/j.issn.1003-0530.2018.07.005.
- [5] ZHANG Xiaotian, ZHAO Shengmei, and ZHENG Baoyu. Key reconciliation using Polar code in wireless channel[J]. *Journal of Signal Processing*, 2018, 34(7): 793–798. doi: 10.16798/j.issn.1003-0530.2018.07.005.
- [6] 3GPP. 3GPP TS 38.212 v15.0. 0-2017 Multiplexing and channel coding (Release 15)[S]. Valbonne: 3GPP, 2017.
- [7] TAL I and VARDY A. List decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(5): 2213–2226. doi: 10.1109/TIT.2015.2410251.
- [8] CHEN Kai, NIU Kai, and LIN Jiaru. List successive cancellation decoding of polar codes[J]. *Electronics Letters*, 2012, 48(9): 500–501. doi: 10.1049/el.2011.3334.
- [9] ERCAN F, CONDO C, HASHEMI S A, et al. On error-correction performance and implementation of polar code list decoders for 5G[C]. 2017 55th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton), Monticello, USA, 2017: 443–449. doi: 10.1109/ALLERTON.2017.8262771.
- [10] NIU Kai and CHEN Kai. CRC-aided decoding of polar codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(10): 1668–1671. doi: 10.1109/LCOMM.2012.090312.121501.
- [11] 江涛, 王涛, 屈代明, 等. 极化码与奇偶校验码的级联编码: 面向5G及未来移动通信的编码方案[J]. *数据采集与处理*, 2017, 32(3): 463–468. doi: 10.16337/j.1004-9037.2017.03.004.

- JIANG Tao, WANG Tao, QU Daiming, *et al.* Concatenated coding of polar codes and parity-check codes: Coding scheme for 5G and future mobile communications[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2017, 32(3): 463–468. doi: [10.16337/j.1004-9037.2017.03.004](https://doi.org/10.16337/j.1004-9037.2017.03.004).
- [11] MORI R and TANAKA T. Performance of polar codes with the construction using density evolution[J]. *IEEE Communications Letters*, 2009, 13(7): 519–521. doi: [10.1109/LCOMM.2009.090428](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2009.090428).
- [12] TRIFONOV P. Efficient design and decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, 60(11): 3221–3227. doi: [10.1109/TCOMM.2012.081512.110872](https://doi.org/10.1109/TCOMM.2012.081512.110872).
- [13] SCHÜRCH C. A partial order for the synthesized channels of a polar code[C]. 2016 IEEE International Symposium on Information Theory, Barcelona, Spain, 2016: 220–224. doi: [10.1109/ISIT.2016.7541293](https://doi.org/10.1109/ISIT.2016.7541293).
- [14] HE Gaoning, BELFIORE J C, LAND I, *et al.* Beta-expansion: A theoretical framework for fast and recursive construction of polar codes[C]. 2017 IEEE Global Communications Conference, Singapore, 2017: 1–6. doi: [10.1109/GLOCOM.2017.8254146](https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2017.8254146).
- [15] BALATSOUKAS-STIMMING A, PARIZI M B, and BURG A. LLR-based successive cancellation list decoding of polar codes[C]. 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Florence, Italy, 2014: 3903–3907. doi: [10.1109/ICASSP.2014.6854333](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2014.6854333).
- [16] 王琼, 罗亚洁, 李思航. 基于分段循环冗余校验的极化码自适应连续取消列表译码算法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(7): 1572–1578. doi: [10.11999/JEIT180716](https://doi.org/10.11999/JEIT180716).
- WANG Qiong, LUO Yajie, and LI Sifang. Polar adaptive successive cancellation list decoding based on segmentation cyclic redundancy check[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(7): 1572–1578. doi: [10.11999/JEIT180716](https://doi.org/10.11999/JEIT180716).
- [17] CHUNG S Y, RICHARDSON T J, and URBANKE R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, 47(2): 657–670. doi: [10.1109/18.910580](https://doi.org/10.1109/18.910580).
- [18] CHEN Kai, NIU Kai, and LIN Jiaru. A reduced-complexity successive cancellation list decoding of polar codes[C]. 2013 IEEE 77th Vehicular Technology Conference, Dresden, Germany, 2013: 1–5. doi: [10.1109/VTCSpring.2013.6691844](https://doi.org/10.1109/VTCSpring.2013.6691844).
- [19] ZHANG Zhaoyang, ZHANG Liang, WANG Xianbin, *et al.* A split-reduced successive cancellation list decoder for polar codes[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, 34(2): 292–302. doi: [10.1109/JSAC.2015.2504321](https://doi.org/10.1109/JSAC.2015.2504321).
- 刘顺兰：女，1965年生，教授，研究方向为信息与信号处理、无线通信。
- 王 燕：女，1997年生，硕士生，研究方向为无线协作通信、信道编码。
- 责任编辑：马秀强