第42卷 第12期 电 子 与 信 息 学 报 Vol. 42No. 12
2020年12月 Journal of Electronics & Information Technology Dec. 2020

$K_{2,4,p}$的点可区别IE-全染色

陈祥恩*① 张 爽① 李泽鹏②

①(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)

②(兰州大学信息科学与工程学院 兰州 730000)

摘 要：该文利用色集合事先分配法、构造染色法、反证法讨论了完全三部图$K_{2,4,p}$的点可区别IE-全染色问题，确定了$K_{2,4,p}$的点可区别IE-全色数。

关键词：完全三部图；IE-全染色；点可区别IE-全染色；点可区别IE-全色数

中图分类号：O157.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2020)12-2999-06

DOI: 10.11999/JEIT190829

Vertex Distinguishing IE-total Coloring of $K_{2,4,p}$

CHEN Xiang'en① ZHANG Shuang① LI Zepeng②

①(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

②(*School of Information Science and Engeering, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *China*)

Abstract: Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete tripartite graphs $K_{2,4,p}$ are discussed by using the methods of distributing the color sets in advance, constructing the colorings and contradiction. The vertex-distinguishing IE-total chromatic numbers of $K_{2,4,p}$ are determined.

Key words: Complete tripartite graphs; IE-total coloring; Vertex-distinguishing IE-total coloring; Vertex distinguishing IE-total chromatic number

1 引言

点可区别一般边染色是由Harary等人于1985年在文献[1]中提出的，在文献[1–6]中均有研究。近些年来点可区别的未必正常的全染色也被研究，IE-全染色就是一种未必正常的全染色。点可区别IE-全染色在文献[7]中提出。图G的一般全染色是指若干种颜色对图G的全体顶点及边的一个分配，图G的IE-全染色是指使得图G的任意两个相邻的顶点的颜色不同的一个一般全染色。设f是图G的IE-全染色，x为G的一个顶点，将在f下x的颜色及与x关联的边的颜色所构成的集合记为$C_f(x)$或$C(x)$，称之为顶点x在f下的色集合。设f是图G的IE-全染色，若对图G的任意两个不同的顶点u,v，有$C(u)\neq C(v)$，则f称为图G的点可区别IE-全染色，简记为VD IETC。对图G进行点可区别IE-全染色所需要的最少颜色数称为G的点可区别IE-全色数，记为$\chi_{vt}^{ie}(G)$。图G的k-IE-全染色是指使用了k种颜色的图G的IE-全染色。图G的k-点可区别IE-全染色是指图G的使用了k种颜色的点可区别IE-全染色，简记为k-VDIETC。

本文研究$K_{2,4,p}$的点可区别IE-全染色，并给出了它们的点可区别IE-全色数。本文述及的完全三部图$K_{m,n,p}$的顶点集合V=$X\cup Y\cup Z$，其中X=$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y$=$\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$，$Z$=$\{z_1, z_2, \cdots, z_p\}$，边集合$\{x_iy_j|i=1, 2, \cdots, m, j=1,2, \cdots,n\}\cup\{y_jz_t|j=1,2, \cdots,n, t=1, 2, \cdots, p\}\cup\{x_iz_t|i=1, 2, \cdots, m, t=1, 2, \cdots, p\}$。

值得一提的是，许进等人[8–14]对极大平面图及其着色问题进行了深入研究，李泽鹏等人[15,16]对唯一3色平面图得出了重要结果，朱恩强等人[17]深入地探索了无圈4色三角剖分图。

为了叙述方便，本文做出如下约定：在本文一提到或要给出一个图的l-VDIETC时，总认为所使用的l种颜色为1, 2, ⋯, l；所谓$\{1, 2, \cdots, l\}$的一个i-子集是指$\{1, 2, \cdots, l\}$的含有i个元素的子集；当A是$\{1, 2, \cdots, l\}$的子集时，用$\overline{A}$表示A的补集。

收稿日期：2019-10-28；改回日期：2020-08-25；网络出版：2020-09-04

*通信作者： 陈祥恩 chenxe@nwnu.edu.cn

基金项目：国家自然科学基金(11761064, 61163037)，兰州大学中央高校基本科研业务费专项基金(lzujbky-2018-37)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (11761064 61163037), Special Fund for the Operating Expenses of Basic Scientific Research in Central Universities of Lanzhou University (lzujbky-2018-37)

2 准备工作

引理1 当$k≥10$且$p>\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6$时，$K_{2,4,p}$不存在$(k-1)$-VDIETC。

证明：用反证法证明$K_{2,4,p}$不存在$(k-1)$-VDIETC，假如$K_{2,4,p}$有$(k-1)$-VDIETC g。

断言1：任意1-子集均不是$X∪Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$\{1\}$为X中某点的色集合，则Z中每个点必含1，故$p\le\sum_{i=1}^{6}\binom{k-2}{i}$，与$p>\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6$矛盾。

断言2：任意2-子集均不是$X∪Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$\{1,2\}$为$X∪Y$中某点的色集合，则Z中每个点必含1或2，故$p\le2\sum_{i=1}^{6}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=1}^{5}\binom{k-3}{i}$，与$p>\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6$矛盾。

(1) 当$X∪Y$中点的颜色至少有3种互不相同时，不妨设为1, 2, 3，则$\{1, 2, 3\}$的1-子集、2-子集、3-子集均不能作为Z中任一点的色集合，从而$p\le\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-7$。这与$p>\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6$矛盾。

(2) 当$X∪Y$中点的颜色刚好有2种互不相同时，不妨设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$。

断言3：$\{1, 2\}$不能作为Z中任一点的色集合。

因为$\overline{C(x_i)}, \overline{C(y_j)}$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$，这6个集合互不相同，所以其中至少有3个不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$。不妨设$\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$都不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$，然后分两种情况进行讨论。

当$|\overline{C(y_j)}|\le7$, $j=2, 3, 4$时，$\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$都不能作为$Z$中任一点色集合，故$p\le\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6$矛盾。

存在$j\in\{2, 3, 4\}$，使得$|\overline{C(y_j)}|\ge8$。那么$\overline{C(y_j)}$的i-子集$(i=1, 2, \cdots, 7)$均不是Z中任一点的色集合，故$p\le\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-254$矛盾。

证毕

引理2 当$k\ge10$且$\sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6<p\le\sum_{i=1}^{7}\binom{k}{i}-6$时，$K_{2,4,p}$存在$k$-VDIETC。

证明：为了给出$K_{2,4,p}$的k-IE-全染色g，先对$K_{2,4,p}$的每个顶点对应$\{1,2,\cdots,k\}$的一个子集，令$D(x_1)=\{1, 2, \cdots, k\}$, $D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$, $D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$, $D(y_2)=D(x_1)\setminus\{3\}$, $D(y_3)=D(x_1)\setminus\{4\}$, $D(y_4)=D(x_1)\setminus\{1,3\}$, $D(z_i)=\{i+4\}$, $i=1,2,\cdots,k$-4, $D(z_{k-3})=\{1,5\}$, $D(z_{k-2})=\{2, 5\}$, $D(z_{k-1})=\{3,5\}$, $D(z_k)=\{4, 5\}$, $\{1, 2, \cdots, k\}$的3-子集、4-子集、…、7-子集以及除$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$外的2-子集排成一个序列T_1，令$D(z_{k+1})$, $D(z_{k+2})$, …, $D(z_p)$依次是T_1中的第1, 2, …, p-k项。这一点是可以做到的，因为T_1中含$\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{7}-6$项，而$p$-$k\le\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{7}-6$，即$p\le\sum_{i=1}^{7}\binom{k}{i}-6$。证毕

下面给出$K_{2,4,p}$的一个k-IE-全染色g。令$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$；用$\max D(z_i)$染点z_i, $i=1, 2, \cdots, p$。用$\min[D(x)\cap D(y)]$染边xy, $\forall x\in X$, $y\in Y$。而z_i的关联边均染以$i+4$, $i=1, 2, \cdots, k$-4；当$|D(z_i)|=2$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in X∪Y$；当$|D(z_i)|=3$时，设$D(z_i)=\{a, b, c\}$,而$a<b<c$，用a染边x_1z_i，用b染边y_1z_i，用c染边x_2z_i，用$\min[D(y)\cap D(z_i)]$染边yz_i, $y\in\{y_2, y_3, y_4\}$；当$|D(z_i)|=4$时，设$D(z_i)=\{a,b, c, d\}$，而$a<b<c<d$，用a染边x_1z_i，用b染边y_1z_i，用c染边x_2z_i，用d染边y_2z_i, y_3z_i, y_4z_i；当$|D(z_i)|=5$时，设$D(z_i)=\{a, b, c,d,e\}$,而$a<b<c<d<e$，用a,b,c,d,e分别染边x_1z_i, y_1z_i, x_2z_i, y_2z_i和边y_3z_i, $g(y_4z_i)=\min[D(y_4)\cap D(z_i)]$；当$|D(z_i)|=6$或者7时，设$|D(z_i)|=\{a_j|j=1,2,\cdots,l\}$，$l$为6或者7，其中$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$ ($<a_7$)，用a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6分别染x_1z_i, y_1z_i, x_2z_i, y_2z_i, y_3z_i, y_4z_i。最后得到的$K_{2,4,p}$的k-IE-全染色g是点可区别的，因为$v\in V(K_{2,4,p})$均有$C(u)=C(v)$。

3 主要结果及其证明

定理1 对正整数$p\ge4$，有

$$\chi_{vt}^{\mathrm{ie}}(K_{2,4,p})=\begin{cases}4, & p=4;\\ 5, & 5\le p\le19;\\ 6, & 20\le p\le51;\\ 7, & 52\le p\le115;\\ 8, & 116\le p\le243;\\ 9, & 244\le p\le495;\\ k, & \sum_{i=1}^{7}\binom{k-1}{i}-6<p\le\\ & \sum_{i=1}^{7}\binom{k}{i}-6, k\ge10\end{cases}$$

证明：由引理1及引理2可知，当$k≥10$且

$\sum_{i=1}^{7}\begin{pmatrix} k-1 \\ i \end{pmatrix}-6<p\le\sum_{i=1}^{7}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}-6$时结论成立。以下考虑其他情况。

情形1：$244\le p\le 495$。

用反证法证明$K_{2,4,p}$不存在8-VDIETC，假如$K_{2,4,p}$有8-VDIETC g。

断言1：任意1-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$\{1\}$为X中某点的色集合，则Z中每个点必含1，故$p\le\sum_{i=1}^{6}\begin{pmatrix} 7 \\ i \end{pmatrix}=126$，矛盾。

断言2：任意2-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则$p\le 2\sum_{i=0}^{6}\begin{pmatrix} 6 \\ i \end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{5}\begin{pmatrix} 6 \\ i \end{pmatrix}=190$，矛盾。

(1) 当$X\cup Y$中点的颜色至少有3种互不相同时，不妨设为1, 2, 3，则$\{1, 2, 3\}$的1-子集、2-子集、3-子集均不能作为Z中任一点的色集合，并且$X\cup Y$中至少5个点的色集合既不是$\{1, 2, 3\}$的子集，也不是Z中点的色集合。由断言1、断言2知，这12个色集合彼此不同，故$p\le\sum_{i=1}^{7}\begin{pmatrix} 8 \\ i \end{pmatrix}-11=242$，矛盾。

(2) 当$X\cup Y$中点的颜色刚好有2种互不相同时，不妨设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$。

断言3：$\{1,2\}$不能作为Z中任一点的色集合。

因为$\overline{C(x_i)},\overline{C(y_j)}$,$i=1,2,j=1,2,3,4$，这6个集合互不相同，所以其中至少有3个不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$。不妨设$\overline{C(y_2)},\overline{C(y_3)},\overline{C(y_4)}$都不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$。此时，$\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$,$\overline{C(y_2)}$, $\overline{C(y_3)}$, $\overline{C(y_4)}$以及$X\cup Y$中至少5个点的色集合不能作为Z中任一点的色集合。由3个断言知，这11个色集合彼此不同。故$p\le\sum_{i=1}^{7}\begin{pmatrix} 8 \\ i \end{pmatrix}-11=243$，矛盾。

$K_{2,4,p}$的9-VDIETC可由$K_{2,4,495}$的9-VDIETC限制在$\{x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2,\cdots, z_p\}$上得出。下面给出$K_{2,4,495}$的9-VDIETC，令$D(x_1)=\{1,2,\cdots,9\}$, $D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$, $D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$, $D(y_2)=D(x_1)\setminus\{3\}$, $D(y_3)=D(x_1)\setminus\{4\}$, $D(y_4)=D(x_1)\setminus\{5\}$，将$\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$外的$\{1, 2, \cdots, 9\}$的其余的1-子集、2-子集、…、7-子集作为Z中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出$K_{2,4,495}$的9-VDIETC。

情形2：$116\le p\le 243$。

用反证法证明$K_{2,4,p}$不存在7-VDIETC，假如$K_{2,4,p}$有7-VDIETC g。

断言1：任意1-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$\{1\}$为X中某点的色集合，则Z中每个点必含1，故$p\le\sum_{i=1}^{6}\begin{pmatrix} 6 \\ i \end{pmatrix}=63$，矛盾。

断言2：任意2-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则$p\le 2\sum_{i=0}^{5}\begin{pmatrix} 5 \\ i \end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{5}\begin{pmatrix} 5 \\ i \end{pmatrix}=95$，矛盾。

(1) 当$X\cup Y$中点的颜色至少有3种互不相同时，不妨设为1, 2, 3，则$\{1, 2, 3\}$的1-子集、2-子集、3-子集以及$X\cup Y$中至少5个点的色集合均不能作为Z中任一点的色集合。由断言2知，这12个色集合彼此不同，故$p\le\sum_{i=1}^{7}\begin{pmatrix} 7 \\ i \end{pmatrix}-12=115$，矛盾。

(2) 当$X\cup Y$中点的颜色刚好有2种互不相同时，不妨设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1,2$,$j=1, 2, 3, 4$。

断言3：$\{1,2\}$不能作为Z中任意点的色集合。

因为$\overline{C(x_i)},\overline{C(y_j)}$, $i=1,2,j=1,2,3,4$，这6个集合互不相同，所以其中至少有3个不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$。不妨设$\overline{C(y_2)},\overline{C(y_3)},\overline{C(y_4)}$都不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$。此时，$\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$,$\overline{C(y_2)}$, $\overline{C(y_3)}$, $\overline{C(y_4)}$以及$X\cup Y$中每个点的色集合不能作为Z中任一点的色集合。由3个断言知，这12个色集合彼此不同。故$p\le\sum_{i=1}^{7}\begin{pmatrix} 7 \\ i \end{pmatrix}-12=115$，矛盾。

$K_{2,4,p}$的8-VDIETC可由$K_{2,4,243}$的8-VDIETC限制在$\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1,z_2, \cdots, z_p\}$上得出。下面给出$K_{2,4,243}$的8-VDIETC，令$D(x_1)=\{1, 2, \cdots, 8\}$，$D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$，$D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$，$D(y_2)=D(x_1)\setminus\{3\}$，$D(y_3)=D(x_1)\setminus\{4\}$，$D(y_4)=D(x_1)\setminus\{5\}$，将$\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$外的$\{1, 2, \cdots, 8\}$的其余的1-子集、2-子集、…、7-子集作为Z中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出$K_{2,4,243}$的8-VDIETC。

情形3：$52\le p\le 115$。

用反证法证明$K_{2,4,p}$不存在6-VDIETC，假如$K_{2,4,p}$有6-VDIETC g。

断言1：任意1-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$\{1\}$为X中某点的色集合，则Z中每个点必含1，故$p\le\sum_{i=1}^{5}\begin{pmatrix} 5 \\ i \end{pmatrix}=31$，矛盾。

断言2：任意2-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则$p\le 2\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}+\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}=47$，矛盾。

(1) 当$X\cup Y$中点的颜色至少有3种互不相同时，不妨设为1,2,3，则{1,2,3}的1-子集、2-子集、3-子集以及$X\cup Y$中至少5个点的色集合均不能作为Z中任一点的色集合。故$p\le\sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}-12=51$，矛盾。

(2) 当$X\cup Y$中点的颜色刚好有2种互不相同时，不妨设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$。

断言3：{1,2}不能作为Z中任意点的色集合。

因为$\overline{C(x_i)},\overline{C(y_j)}$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$，这6个集合互不相同，所以至少有3个不是$\varnothing$, {1}, {2}。不妨设$\overline{C(y_2)},\overline{C(y_3)},\overline{C(y_4)}$都不是$\varnothing$, {1}, {2}。此时，{1},{2}, {1, 2}, $\overline{C(y_2)}$, $\overline{C(y_3)}$, $\overline{C(y_4)}$以及$X\cup Y$中每个点的色集合不能作为Z中任一点的色集合。由3个断言知，这12个色集合彼此不同。故$p\le\sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}-12=51$，矛盾。

$K_{2,4,p}$的7-VDIETC可由$K_{2,4,115}$的7-VDIETC限制在$\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3,y_4, z_1,z_2, \cdots, z_p\}$上得出。下面给出$K_{2,4,115}$的7-VDIETC，令$D(x_1)=\{1, 2, \cdots,7\}$,$D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$, $D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$, $D(y_2)=D(x_1)\setminus\{3\}$, $D(y_3)=D(x_1)\setminus\{4\}$, $D(y_4)=D(x_1)\setminus\{5\}$，将{1, 2}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}外的{1, 2, …, 7}的其余的1-子集、2-子集、…、7-子集作为Z中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出$K_{2,4,115}$的7-VDIETC。

情形4：$20\le p\le 51$。

用反证法证明$K_{2,4,p}$不存在5-VDIETC，假如$K_{2,4,p}$有5-VDIETC g。

断言1：任意1-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设{1}为X中某点的色集合，则Z中每个点必含1，故$p\le\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}=15$，矛盾。

断言2：任意2-子集均不是X中任一点的色集合。

否则$p+4\le 2\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}+\sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}=23$，$p\le 19$，矛盾。

(1) 当$X\cup Y$中点的颜色至少有3种互不相同时，不妨设为1, 2, 3，则{1, 2, 3}的1-子集、2-子集以及$X\cup Y$中每个点的色集合均不能作为Z中任一点的色集合。故$p\le\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}-12=19$，矛盾。

(2) 当$X\cup Y$中点的颜色刚好有2种互不相同时，不妨设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$。

断言3：{1,2}不能作为Z中任意点的色集合。

因为$\overline{C(x_i)},\overline{C(y_j)}$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$，这6个集合互不相同，所以至少有3个不是$\varnothing$, {1}, {2}。不妨设$\overline{C(y_2)},\overline{C(y_3)},\overline{C(y_4)}$都不是$\varnothing$, {1}, {2}。

断言4：{1,2}不能作为Y中任意点的色集合。

否则，{3}, {4}, {5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}, {3, 4, 5}以及$X\cup Y$中每个点的色集合均不能作为Z中任一点的色集合，故$p\le\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}-13=18$，矛盾。

所以，{1}, {2}, {1, 2}, $\overline{C(y_2)}$, $\overline{C(y_3)}$, $\overline{C(y_4)}$以及$X\cup Y$中每个点的色集合不能作为Z中任一点的色集合。故$p\le\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}-12=19$，矛盾。

$K_{2,4,p}$的6-VDIETC可由$K_{2,4,51}$的6-VDIETC限制在$\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3,y_4, z_1,z_2, \cdots, z_p\}$上得出。下面给出$K_{2,4,51}$的6-VDIETC，令$D(x_1)=\{1, 2, \cdots, 6\}$, $D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$, $D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$, $D(y_2)=D(x_1)\setminus\{3\}$, $D(y_3)=D(x_1)\setminus\{4\}$, $D(y_4)=D(x_1)\setminus\{5\}$，将{1, 2}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}外的{1, 2, …, 6}的其余的1-子集、2-子集、…、6-子集作为Z中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出$K_{2,4,51}$的6-VDIETC。

情形5：$5\le p\le 19$。

用反证法证明$K_{2,4,p}$不存在4-VDIETC，假如$K_{2,4,p}$有4-VDIETC g。使用的4种颜色为1,2,3,4。

断言1：{1, 2, 3, 4}的1-子集不是X中任一点的色集合。

否则，不妨设$g(x_1)=\{1\}$，那么，$Y\cup Z$中每个点色集合均含1，但{1, 2, 3, 4}的含1的子集共有8个，不能区分$Y\cup Z\cup\{x_1\}$中至少10个顶点，矛盾。

断言2：当$p\ge 6$时，{1, 2, 3, 4}的1-子集不是Y中任一点的色集合。

否则，$g(y_1)=\{1\}$，那么，$X\cup Z$中每个点色集合均含1，但{1, 2, 3, 4}的含1的子集共有8个，不能区分$X\cup Z\cup\{y_1\}$中至少9个顶点，矛盾。

以下分两种情况讨论：

(1) 当$p\ge 6$。当$X\cup Y$中点的颜色里互不相同的恰有3种时，不妨设为1, 2, 3, Z中每个点的色均为4，但是{1, 2, 3, 4}的含4的子集共有8个，不能区分$6+p$个顶点，矛盾。故{4}不是任意点的色集合，即任意1-子集均不是任一点的色集合，从而$6+p\le\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}-4=11$, $p\le 5$，矛盾。

当$X\cup Y$中点的颜色恰好有2种互不相同时，不妨设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$。此时，$\{1\}$, $\{2\}$不是任意点的色集合。如果$\{3\}$, $\{4\}$均是Z中点的色集合，那么$X\cup Y$中每个点的色集合均包含3和4，而$\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$不能区分$X\cup Y$中的6个顶点，矛盾；如果$\{3\}$,$\{4\}$中恰有一个是Z中某点的色集合，不妨设$\{3\}$是，$\{4\}$不是，此时$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$，均不是任意点的色集合，说明$6+p\le\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}-5=11$, $p\le5$，矛盾。

(2) 当$p=5$。先考虑染了点的颜色只有3种的情形，可设$g(x_i)=1$, $g(y_j)=2$, $i=1, 2$, $j=1, 2, 3, 4$, $g(z)=3$，这时任意1-子集不是任一点的色集合，否则，当某个顶点的色集合为1-子集时，那么所有点的色集合都含同一种颜色，而含一种固定颜色的子集仅有8个，图$K_{2,4,5}$的含有11个顶点，矛盾。因此$\{1, 2, 3, 4\}$的所有2-子集、3-子集、4-子集均为$K_{2,4,5}$中顶点的色集合，此时，这11个集合刚好可以区分$K_{2,4,5}$的11个顶点，但由于$\{3, 4\}$是Z中某点的色集合，$\{1, 2\}$是$X\cup Y$中某点的色集合，二者的交是空集，矛盾。

再考虑染了点的颜色刚好是3种的情形：

(1) 染了X 中点的色有2种，不妨设$g(x_i)\in\{1, 4\}$,$i=1, 2$, $g(x_1)=1$, $g(x_2)=4$, $g(y_j)=2$, $j=1, 2, 3, 4$, $g(z_s)=3$, $s=1, 2, 3, 4, 5$。

断言3：$\{1\}$,$\{4\}$不是任意点的色集合。(否则，不妨设$g(x_1)=\{1\}$，则$Y\cup Z\cup\{x_1\}$中每个点的色集合均含1，而$\{1, 2, 3, 4\}$的含1的子集共有8个，不能区分10个顶点，矛盾。)

断言4：$\{2\}$, $\{3\}$不是任意点的色集合。(否则，不妨设$g(y_1)=\{2\}$，则$K_{2,4,5}$的每个点的色集合均含2，而$\{1, 2, 3, 4\}$的含2的子集共有8个，不能区分11个顶点，矛盾。)

因此，每个2-子集、3-子集、4-子集均为$K_{2,4,5}$中点的色集合，由于$\{1, 4\}$只能是X中某点的色集合，$\{2, 3\}$只能是$Y\cup Z$某顶点的色集合，二者之交为空集，矛盾。

(2) 染了Y中点的色有2种，不妨设$g(x_i)=1$,$i=1,2$, $g(y_j)\in\{2,4\}$,$j=1,2,3,4$, $g(z_s)=3$, $s=1,2,3,4,5$。

断言5：$\{1\}$,$\{3\}$不是任意点的色集合。(否则，每个顶点的色集合均含一种共同色，矛盾。)

断言6：$\{2\}$, $\{4\}$不全是$K_{2,4,5}$中点的色集合。(否则，$X\cup Z$中每个顶点的色集合都包含2和4，而$\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$不能区分$X\cup Z$中的7个顶点，矛盾。)

这样，$\{1, 2, 3, 4\}$的所有2-子集、3-子集、4-子集中最多排除1个，剩下的10个均为$K_{2,4,5}$中点的色集合。

断言7：$\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$不全是$K_{2,4,5}$中点的色集合。(否则，若$\{1, 3\}$是$X\cup Z$中某点的色集合，$\{2, 4\}$是Y中某点的色集合，二者的交是空集，矛盾。)

由断言7，可以先假设$\{2,4\}$为$K_{2,4,5}$中某点的色集合。由断言6知，$\{2\}$, $\{4\}$仅有1个是$K_{2,4,5}$中某点的色集合，不妨设$g(y_1)=\{2\}$，这样$X\cup Z$中每个点的色集合均含2，由于含2的子集只有8个，从而$g(y_2)$, $g(y_3)$, $g(y_4)$里均不含2，但含4，且不等于$\{4\}$，所以他们只能是$\{1, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$。即此时$\{1, 2, 3, 4\}$的15个子集中，除去$\{1\}$, $\{3\}$, $\{4\}$和$\{1, 3\}$，其余11个集合均为$K_{2,4,5}$中点的色集合。此时，$\{2, 3\}$是Z中某点的色集合，$\{1, 4\}$是Y中某点的色集合，由于二者的交为空集，矛盾。

(3) 染了Z中点的色有2种，不妨设$g(x_i)=1$, $i=1, 2$, $g(y_j)=2$, $j=1, 2, 3, 4$, $g(z_s)\in\{3, 4\}$,$s=1, 2, 3, 4, 5$。

断言8：$\{1\}$, $\{2\}$不是任意点的色集合。(否则，每个点的色集合均含一种共同色，矛盾。)

断言9：$\{3\}$, $\{4\}$不全是$K_{2,4,5}$中点的色集合。(否则，$X\cup Y$中每个点的色集合都包含3和4，而$\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$，不能区分$X\cup Y$中的6个顶点，矛盾。)

断言10：$\{1, 2\}$,$\{3, 4\}$不全是$K_{2,4,5}$中点的色集合。(否则，$\{1, 2\}$是$X\cup Y$中某点的色集合，$\{3, 4\}$是Y中某点的色集合，二者的交是空集，矛盾。)

因此，由断言10，不妨设$\{1, 2\}$不是$K_{2,4,5}$中点的色集合，由断言9知，$\{3\}$, $\{4\}$中不全是Z中某点的色集合，不妨先设$\{4\}$是，$\{3\}$不是，此时，除去$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$外$\{1, 2, 3, 4\}$的11个集合均为$K_{2,4,5}$中点的色集合，不妨设$g(z_1)=4$，那么$X\cup Y$中每个点的色集合都含4。包含1和4、包含2和4的色集合共有6个，刚好可以区分$X\cup Y$的6个顶点，并且此时$\{1, 4\}$必为X中点的色集合，$\{2, 3\}$必为Z中点的色集合，二者的交为空集，矛盾。

$K_{2,4,5}$的5-VDIETC可由$K_{2,4,19}$的5-VDIETC限制在$\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3,y_4, z_1, z_2, \cdots, z_p\}$上得出。下面给出$K_{2,4,19}$的5-VDIETC，令$D(x_1)=\{1, 2, \cdots, 5\}$, $D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$, $D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$, $D(y_2)=D(x_1)\setminus\{3\}$,$D(y_3)=D(x_1)\setminus\{4\}$,$D(y_4)=D(x_1)\setminus\{5\}$，将$\{1,2\}$,$\{1\}$,$\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$外的$\{1, 2, \cdots, 5\}$的其余的1-子集、2-子集、…、5-子集作为Z中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出$K_{2,4,19}$的5-VDIETC。

情形6：$p=4$。

易证$K_{2,4,p}$不存在3-VDIETC。在表1中给出了$K_{2,4,p}$的4-VDIETC。 证毕

表 1 $K_{2,4,\,p}$的4-VDIETC

		z_1	z_2	z_3	z_4	y_1	y_2	y_3	y_4
		3	3	3	3				
x_1	1	1	3	3	3	1	3	1	3
x_2	1	2	4	4	2	4	2	2	4
y_1	4	4	4	4	1				
y_2	2	2	2	3	3				
y_3	2	1	2	1	2				
y_4	4	3	4	4	3				

4 结束语

本文期望得出完全三部图的点可区别IE-全染色更广泛的结论，进一步再研究$K_3[tP_2]$的点可区别IE-全染色。

参 考 文 献

[1] HARARY F and PLANTHOLT M. The Point - Distinguishing Chromatic Index[M]. HARARY F, and MAYBEE J S. Graphs and Application. New York: Wiley, 1985: 147–162.

[2] HORVŇÁK M and SOTAK R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. *ARS Combinatoria*, 1996, 42: 233–242.

[3] HORVNAK M and SOTAK R. Localization of jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 1997, 17(2): 243–251. doi: 10.7151/dmgt.1051.

[4] HORŇÁK M and ZAGAGLIA SALVI N. On the point - distinguishing chromatic index of $K_{m,n}$[J]. *ARS Combinatoria*, 2006, 80: 75–85.

[5] ZAGAGLIA SALVI N. On the value of the point - distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. *ARS Combinatoria*, 1990, 29B: 235–244.

[6] CHEN Xiang'en. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths[J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2014, 64(3): 629–640. doi: 10.1007/s10587-014-0123-8.

[7] CHEN Xiang'en, GAO Yuping, and YAO Bing. Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete bipartite graphs $K_{m,n}$ $(m<n)$[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2013, 33(2): 289–306. doi: 10.7151/dmgt.1659.

[8] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(1)色多项式递推公式与四色猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs (1) recursion formula of chromatic polynomial and four-color conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.

[9] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(2)多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271–1296. doi: 10.11999/JEIT160224.
XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (2) Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271–1296. doi: 10.11999/JEIT160224.

[10] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(3)纯树着色与唯一4-色极大平面图猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1328–1353. doi: 10.11999/JEIT160409.
XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (3) purely tree-colorable and uniquely 4-colorable maximal planar graph conjectures[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1328–1353. doi: 10.11999/JEIT160409.

[11] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(4)-运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (4)-operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.

[12] XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. On purely tree-colorable planar graphs[J]. *Information Processing Letter*, 2016, 116(8): 532–536. doi: 10.1016/j.ipl.2016.03.011.

[13] 许进, 李泽鹏, 朱恩强. 极大平面图理论研究进展[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.
XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. Research progress on the theory of maximal planar graphs[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.

[14] 陈祥恩, 李婷. (k,l)-递归极大平面图的结构[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(9): 2281–2286. doi: 10.11999/JEIT171021.
CHEN Xiang'en and LI Ting. The structure of (k,l)-recursive maximal planar graph[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(9): 2281–2286. doi: 10.11999/JEIT171021.

[15] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, *et al*. Size of edge-critical uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2016, 339(4): 1242–1250. doi: 10.1016/j.disc.2015.11.009.

[16] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, *et al*. A note on uniquely 3-colourable planar graphs[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017, 94(5): 1028–1035. doi: 10.1080/00207160.2016.1167196.

[17] ZHU Enqiang, LI Zepeng, SHAO Zehui, *et al*. Acyclically 4-colorable triangulations[J]. *Information Processing Letters*, 2016, 116(6): 401–408. doi: 10.1016/j.ipl.2015.12.005.

陈祥恩：男，1965年生，教授，研究方向为图论及其应用.
张 爽：女，1995年生，硕士，研究方向为图论及其应用.
李泽鹏：男，1988年生，副教授，研究方向为图论及其应用.

责任编辑：余 蓉