

# 一种适用于小样本的迭代多重信号分类算法

王娟 王彤\* 吴建新

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 当样本数不足时, 由采样协方差矩阵特征分解得到的噪声子空间偏离其真实值, 使得多重信号分类(MUSIC)算法目标角度(DOA)估计性能下降。为了解决这个问题, 该文提出了一种迭代算法通过校正信号子空间来提高MUSIC算法性能。该方法首先利用采样协方差矩阵特征分解得到的噪声子空间粗略估计目标角度; 其次基于信源的稀疏性和导向矢量的低秩特性, 由上一步得到的目标角度以及其邻域角度对应的导向矢量构造一个新的信号子空间; 最后通过解一个优化问题来校正信号子空间。仿真结果表明, 该算法有效地提高了子空间估计精度。基于新的信号子空间实现MUSIC DOA估计可以使得性能得到改善, 且在低样本数下改善尤为明显。

**关键词:** 目标角度估计; 多重信号分类算法; 迭代; 优化问题

中图分类号: TN959.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)02-0445-07

DOI: 10.11999/JEIT190160

## Iterative Multiple Signal Classification Algorithm with Small Sample Size

WANG Juan WANG Tong WU Jianxin

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** For cases with small samples, the estimated noise subspace obtained from sample covariance matrix deviates from the true one, which results in Multiple Signal Classification (MUSIC) Direction-Of-Arrival (DOA) estimation performance breakdown. To deal with this problem, an iterative algorithm is proposed to improve the MUSIC performance by modifying the signal subspace in this paper. Firstly, the DOAs are roughly estimated based on the noise subspace obtained from sample covariance matrix. Then, considering the sparsity of signals and the low-rank property of steering matrix, a new signal subspace is got from the steering matrix consisting of estimated DOAs and their adjacent angles. Finally, the signal subspace is modified by solving an optimization problem. Simulation results demonstrate the proposed algorithm can improve the subspace estimation accuracy and furtherly improve the MUSIC DOA estimation performance, especially in small sample cases.

**Key words:** Direction-Of-Arrival (DOA) estimation; Multiple Signal Classification (MUSIC); Iterative; Optimization problem

### 1 引言

目标角度估计(Direction-Of-Arrival, DOA)<sup>[1-3]</sup>算法由于其雷达、声呐、无线通讯等领域的广泛应用受到越来越多的关注。其中, 多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)<sup>[1]</sup>算法利用信号与噪声子空间之间的正交性来确定目标角度。在大样本数情况下, 通过采样协方差矩阵的特征分解得到较精确的噪声子空间, 算法的性能较好。反之, 在样本数不足时, 由采样协方差矩阵特征分解得到的噪声子空间偏离其真实值, 使得

MUSIC算法的性能严重下降, 偏离了克拉美罗界(Cramer-Rao Low Bound, CRLB)<sup>[4]</sup>。近几十年来, 许多科研工作者对其进行深层次的研究和探索, 提出了一系列的改进算法来提高MUSIC算法性能。这些算法可以大致分为两类: 提高协方差矩阵的估计精度和直接改善子空间的估计精度。

提高协方差矩阵的估计精度的方法有前后向平均<sup>[5]</sup>, 伪噪声重采样<sup>[6-8]</sup>以及通过去除原始采样协方差矩阵中信号与噪声之间的互相关项<sup>[9,10]</sup>等。众所周知, 即使估计的协方差矩阵较精确, 在低信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)条件下, 噪声子空间与信号子空间也不能很好地分离。基于此, 人们提出直接对信号子空间或噪声子空间改进来提高性能, 典型的有加权的噪声子空间<sup>[11]</sup>算法。本文通过修正信号子空间来提高MUSIC算法性能。首先,

收稿日期: 2019-03-18; 改回日期: 2019-08-30; 网络出版: 2019-09-04

\*通信作者: 王彤 twang@mail.xidian.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61471285)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61471285)

利用采样协方差矩阵特征分解得到的噪声子空间粗略地估计目标DOA；其次基于信源的稀疏性和导向矢量的低秩特性，由上一步得到的目标角度以及其邻域角度对应的导向矢量构造一个新的信号子空间；最后通过解一个优化问题来校正信号子空间并以其误差的范数值来衡量信号子空间的估计精度。仿真结果表明，新的信号子空间有效地抑制由样本数不足引起的子空间泄露问题。基于新的信号子空间实现MUSIC DOA估计可以使得性能得到改善，且在低样本数下改善尤为明显。

## 2 信号模型

考虑一个 $N$ 元阵，其中第 $n$ 个阵元到第1个阵元的间距为 $d_n$ ， $d_1 = 0$ 。假设有 $P$ 个窄带远场目标，目标角度为 $\{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_P\}$ 。那么第 $l$ 个采样时刻接收信号矢量为

$$\mathbf{x}(l) = \mathbf{A}\mathbf{s}(l) + \mathbf{n}(l), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

其中， $\mathbf{s}(l) = [s_1(l) s_2(l) \cdots s_P(l)]^T$ 是信号波形矢量， $(\cdot)^T$ 是转置， $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \cdots \mathbf{a}(\theta_P)]$ 是相对应的信号导向矢量矩阵，其中，第 $p$ 个信号的导向矢量为 $\mathbf{a}(\theta_p) = [1 \exp^{j2\pi \sin \theta_p d_2 / \lambda} \cdots \exp^{j2\pi \sin \theta_p d_N / \lambda}]^T$ 。 $\mathbf{n}(l)$ 为0均值高斯白噪声矢量， $L$ 为样本数。

假设噪声与信号统计独立，理论协方差矩阵为 $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(l)\mathbf{x}^H(l)] = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}$ 。其中， $\mathbb{E}[\cdot]$ 是数学期望， $(\cdot)^H$ 是共轭转置， $\mathbf{S}$ 是波形相关矩阵， $\sigma_n^2$ 是噪声功率， $\mathbf{I}$ 是单位阵。对矩阵 $\mathbf{R}$ 进行特征分解可得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{G}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{G}_n \mathbf{U}_n^H = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \quad (2)$$

其中， $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{P+1} = \cdots = \lambda_N$ 是 $\mathbf{R}$ 的特征值， $\mathbf{e}_i$ 是特征矢量， $\mathbf{U}_s$ 和 $\mathbf{U}_n$ 分别是 $P$ 个大特征值对应特征矢量张成的信号子空间和小特征值对应特征矢量张成的噪声子空间， $\mathbf{G}_s$ 和 $\mathbf{G}_n$ 为对应的特征值矢量。

理想的协方差矩阵在实际中很难得到，通常用 $L$ 个样本估计得到的采样协方差矩阵代替，即 $\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(l)\mathbf{x}^H(l)$ 。它的特征分解形式为

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{G}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{G}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H = \sum_{i=1}^N \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i^H \quad (3)$$

其中， $\tilde{\lambda}_i$ 是 $\tilde{\mathbf{R}}$ 的特征值，且 $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2 > \cdots > \tilde{\lambda}_N$ ， $\tilde{\mathbf{e}}_i$ 是相对应的特征矢量， $\tilde{\mathbf{U}}_s$ 和 $\tilde{\mathbf{U}}_n$ 分别为信号与噪声子空间， $\tilde{\mathbf{G}}_s$ 和 $\tilde{\mathbf{G}}_n$ 是相对应的特征值矢量。子空间的维数可根据文献[12]确定，假设确定的信号子空间维数为 $\tilde{P}$ 。

传统的MUSIC算法谱估计函数为<sup>[1]</sup>

$$f(\theta) = \left\| \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{a}(\theta) \right\|_2^2 \quad (4)$$

其中， $\|\cdot\|_2^2$ 表示2-范数。根据式(4)在参数范围内进行谱峰值搜索，找出极大值对应的角度即为信号方向。

## 3 算法原理

根据文献[13]，当样本数趋于无穷时，信号子空间和噪声子空间很容易分离；然而，在样本数不足时，估计的采样协方差矩阵偏离其理想值，其特征值和特征矢量也偏离理想值。一般认为由大特征值对应的特征矢量张成信号子空间，而在小样本和低SNR条件下，大特征值中包含更多地噪声分量，信号子空间与噪声子空间很难分离。综上所述，受噪声的影响以及样本数的限制，式(2)和式(3)等式左右两边的各项都存在差异。根据文献[14]，可以利用估计的信号子空间与真实信号子空间对应的投影矩阵之间的误差来衡量信号子空间的精度。其误差表达式为

$$\left\| \tilde{\mathbf{P}}_s - \mathbf{P}_s \right\|_2 \quad (5)$$

其中， $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H$ 和 $\mathbf{P}_s = \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H$ 分别是估计的信号子空间 $\tilde{\mathbf{U}}_s$ 和真实信号子空间 $\mathbf{U}_s$ 的投影矩阵。

直接利用式(4)中谱估计函数来对目标角度进行粗略估计 $\{\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 \cdots \tilde{\theta}_P\}$ 。很明显，受采样噪声子空间的影响，估计的目标角度包含一定的误差。可以假设存在一个小的角度值 $\delta\theta$ ，使得真实的目标角度总是位于这个角度区域内，即 $\theta_p \in \mathbf{Q}_p = \{\theta | \tilde{\theta}_p - \delta\theta \leq \theta \leq \tilde{\theta}_p + \delta\theta\}$ ，那么 $\{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_P\} \subset \bigcup_{p=1}^{\tilde{P}} \mathbf{Q}_p$ ，将整个角度域 $\bigcup_{p=1}^{\tilde{P}} \mathbf{Q}_p$ 按等角度间隔 $\Delta\theta$ 划分，由各点对应的导向矢量构成的导向矩阵设为 $\tilde{\mathbf{A}}$ 。根据文献[15]，考虑信源的稀疏性和导向矢量的低秩特性，矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 可以用其主特征矢量近似表示，即

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}}_s \mathbf{c} \quad (6)$$

其中， $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{V}}$ 为奇异值分解。 $\tilde{\mathbf{U}}$ 和 $\tilde{\mathbf{V}}$ 分别为矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的左右奇异矩阵， $\tilde{\mathbf{G}}$ 为它的奇异值矩阵， $\tilde{\lambda}_n$ 为 $\text{diag}(\tilde{\mathbf{G}})$ 的第 $n$ 个元素，且 $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2 > \cdots > \tilde{\lambda}_N > \cdots > \tilde{\lambda}_N$ 。由 $K$ 个大奇异值对应的左奇异矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}$ 的前 $K$ 列扩展了导向矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的主子空间 $\tilde{\mathbf{U}}_s$ ，即 $\tilde{\mathbf{U}}_s = \tilde{\mathbf{U}}(:, 1:K)$ 。 $K$ 可以近似地看作导向矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的秩，它的值可以通过以下式子来刻画，一般设为满足下列条件的最大整数 $\sum_{n=1}^K |\tilde{\lambda}_n|^2 / \sum_{n=1}^N |\tilde{\lambda}_n|^2 = \eta \geq \eta_0$ ，其中，

$\eta \in (0, 1]$ ,  $\eta$ 代表主分量能量与整体能量之比, 越接近1逼近质量越高。一般地,  $K$ 的选择应满足  $\eta \geq \eta_0$ 来保证矩阵的逼近效果, 通常设为  $\eta_0 = 0.999$ 。

理论上, 真实的信号子空间  $\tilde{U}_s$  应包含于子空间  $\tilde{U}_s$ 。本文通过求解如式(7)的优化问题来估计信号子空间

$$\min_{\tilde{P}_s} \left\| \tilde{P}_s - \tilde{P}_s \right\|_2, \text{ s.t. } \tilde{P}_n \tilde{P}_s = \mathbf{0} \quad (7)$$

其中,  $\tilde{P}_s = \tilde{U}_s \left( \tilde{U}_s^H \tilde{U}_s \right)^{-1} \tilde{U}_s^H$  和  $\tilde{P}_n = \mathbf{I} - \tilde{P}_s$  分别是  $\tilde{U}_s$  和它的正交子空间的投影矩阵, 式(7)中约束条件确保估计的矩阵  $\tilde{P}_s$  落在子空间  $\tilde{U}_s$  内, 有望减弱  $\tilde{P}_s$  中不包含于  $\tilde{U}_s$  的误差分量。式(7)可转化为如式(8)的问题

$$\min_{\tilde{P}_s} \left\| \tilde{P}_s^{\parallel} - \tilde{P}_s \right\|_2 \quad (8)$$

它的解为

$$\tilde{P}_s = \sum_{i=1}^M \beta_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (9)$$

其中, 矩阵  $\tilde{P}_s^{\parallel}$  是半正定矩阵,  $\beta_i$  是矩阵  $\tilde{P}_s^{\parallel}$  的特征值, 且  $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_M > \beta_{M+1} = \dots = \beta_N$ ,  $\mathbf{u}_i$  是相对应的特征矢量。  $M$  是矩阵  $\tilde{P}_s^{\parallel}$  特征值大于0的个数,  $M$  值一般满足  $M \leq \min(\tilde{P}, K)$ 。

最终, 改进的MUSIC算法的谱估计函数为

$$f'(\theta) = \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_s) \mathbf{a}(\theta) \right\|^2 \quad (10)$$

本文算法的具体实现步骤如下:

步骤1 估计采样协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$  并进行协方差矩阵特征分解得到信号子空间  $\tilde{U}_s$  和噪声子空间  $\tilde{U}_n$ ;

步骤2 根据式(4)粗略估计目标角度  $\{\tilde{\theta}_1^{(0)} \tilde{\theta}_2^{(0)} \dots \tilde{\theta}_P^{(0)}\}$ , 并设  $\tilde{P}_s^{(0)} = \tilde{P}_s = \tilde{U}_s \tilde{U}_s^H$ , 迭代次数  $i = 1$ ;

步骤3 由上一步估计得到的目标角度信息构造导向矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  并进行奇异值分解得到信号子空间  $\tilde{U}_s$ ;

步骤4 计算  $\tilde{U}_s$  的投影矩阵  $\tilde{P}_s = \tilde{U}_s \left( \tilde{U}_s^H \tilde{U}_s \right)^{-1} \tilde{U}_s^H$ , 获得  $\tilde{U}_s$  落在子空间  $\tilde{U}_s$  内的部分, 即  $\tilde{P}_s^{\parallel} = \tilde{P}_s \tilde{P}_s$ ;

步骤5 计算新的矩阵  $\tilde{P}_s^{(i)}$ , 根据式(10)进一步估计得到较精确的目标角度  $\{\tilde{\theta}_1^{(i)} \tilde{\theta}_2^{(i)} \dots \tilde{\theta}_M^{(i)}\}$ ;

步骤6 若  $\left\| \tilde{P}_s^{(i)} \right\|_2 - \left\| \tilde{P}_s^{(i-1)} \right\|_2 \leq \varepsilon$  或者  $i \geq \phi$ , 则迭代结束; 否则  $i = i + 1$  并跳回步骤3。式中  $\varepsilon$  为一个很小的常数,  $\phi$  为预设迭代次数, 根据算法收敛速度设定。

由上述步骤可知, 目标角度是通过迭代估计产

生的, 最终确保子空间  $\tilde{U}_s$  中包含真实目标信息, 而估计的矩阵  $\tilde{P}_s$  也落在子空间  $\tilde{U}_s$  内, 有望减弱  $\tilde{P}_s$  中不包含于  $\tilde{U}_s$  的误差分量。此外, 该算法也可以看作在目标角度估计前做波束域预处理来削弱  $\tilde{P}_s$  的噪声分量。

#### 4 性能分析

基于子空间的目标角度估计算法性能与子空间的估计精度相关, 以  $\left\| \tilde{P}_s - P_s \right\|_2$  来衡量传统MUSIC算法信号子空间估计的精度。令  $\tilde{P}_s = P_s + \Delta P_s$ , 则信号子空间  $\tilde{P}_s$  的估计精度为

$$\rho = \left\| \tilde{P}_s - P_s \right\|_2 = \text{tra}(\Delta P_s \Delta P_s) \quad (11)$$

其中,  $\text{tra}(\cdot)$  表示矩阵的迹。根据文献[10],  $\Delta P_s$  关于采样协方差矩阵估计误差  $\Delta \mathbf{R}$  展开形式为  $\Delta P_s = P_n \Delta \mathbf{R} U_s G_s^{-1} U_s^H + U_s G_s^{-1} U_s^H \Delta \mathbf{R} P_n$ , 其中  $P_n = U_n U_n^H$ 。结合  $P_n U_s = \mathbf{0}$ ,  $\rho$  的表达式可写成

$$\rho = 2 \text{tra} \left( U_s G_s^{-1} U_s^H \Delta \mathbf{R} P_n \Delta \mathbf{R} U_s G_s^{-1} U_s^H \right) \quad (12)$$

根据文献[10], 对于任意方阵  $\mathbf{B}$ , 有  $E[\Delta \mathbf{R} \mathbf{B} \Delta \mathbf{R}] = \frac{1}{L} \text{tra}(\mathbf{R} \mathbf{B}) \mathbf{R}$ , 且  $E[\Delta \mathbf{R}] = \mathbf{0}$ , 因此

$$\begin{aligned} E[\rho] &= \frac{2}{L} \text{tra}(\mathbf{R} P_n) \\ &\quad \text{tra} \left( U_s G_s^{-1} U_s^H \mathbf{R} U_s G_s^{-1} U_s^H \right) \\ &= \frac{2\sigma_n^2 (N - P)}{L} \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p} \end{aligned} \quad (13)$$

从式(13)可以看出, 基于采样协方差矩阵估计信号子空间, 其估计精度与  $\sigma_n^2/L$  成正比, 在低信噪比和小样本情况下, 信号子空间的估计精度较差。

接下来以  $\left\| \tilde{P}_s - P_s \right\|_2$  来衡量本文算法信号子空间的估计精度。首先, 假设第  $p$  个信号频率估计误差为  $\Delta w_p$ , 根据文献[10], 目标频率估计误差关于采样协方差矩阵误差  $\Delta \mathbf{R}$  的表达式为

$$\begin{aligned} \Delta w_p &\triangleq \tilde{w}_p - w_p \\ &= \frac{\mathbf{d}_p^H P_n \Delta \mathbf{R} U_s G_s^{-1} U_s^H \mathbf{a}_p - \mathbf{a}_p^H U_s G_s^{-1} U_s^H \Delta \mathbf{R} P_n \mathbf{d}_p}{2j \mathbf{d}_p^H P_n \mathbf{d}_p}, \\ &\quad p = 1, 2, \dots, P \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $\tilde{w}_p$  是估计的目标频率,  $\mathbf{d}_p = \frac{\partial \mathbf{a}_p}{\partial w_p}$ 。假设选取的频率间隔为  $\{w | \tilde{w}_p - \delta w \leq w \leq \tilde{w}_p + \delta w\}$ , 则频率边界误差, 即真实目标频率与频率间隔内各频点最大误差为  $dw_p = \begin{cases} \Delta w_p - \delta w, & \Delta w_p \leq 0 \\ \Delta w_p + \delta w, & \Delta w_p > 0 \end{cases}$

将  $P_{\tilde{\mathbf{A}}} = \tilde{\mathbf{A}} \left( \tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H$  在目标真实频率附近的1阶泰勒展开近似表达为  $P_{\tilde{\mathbf{A}}} \approx P_{\mathbf{A}} + dP_s$ , 其中,

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H = \mathbf{P}_s, \quad d\mathbf{P}_s \approx \sum_{p=1}^P \frac{\partial \mathbf{P}_A}{\partial w_p} dw_p, \\ \frac{\partial \mathbf{P}_A}{\partial w_p} = \mathbf{P}_n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_p} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H + \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_p} \right)^H \mathbf{P}_n.$$

信号子空间 \$\tilde{\mathbf{U}}\_s\$ 由 \$\tilde{\mathbf{A}}\$ 的特征矢量近似表示, 考虑到 \$\tilde{\mathbf{U}}\_s\$ 与 \$\mathbf{U}\_s\$ 间的近似误差较小, 为了计算方便, 本文假设 \$\tilde{\mathbf{U}}\_s\$ 的投影矩阵 \$\tilde{\mathbf{P}}\_s\$ 的估计误差为 \$\Delta \tilde{\mathbf{P}}\_s \approx d\tilde{\mathbf{P}}\_s\$。令 \$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{P}}\_s \tilde{\mathbf{P}}\_s\$, 并忽略 \$\Delta \tilde{\mathbf{P}}\_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}\_s\$ 项, 则它的误差为

$$\Delta \mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s + \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \quad (15)$$

\$\mathbf{Z}\$ 的特征分解为 \$\mathbf{Z} = \sum\_{i=1}^N \beta\_i \mathbf{u}\_i \mathbf{u}\_i^H = \mathbf{m}\_s \mathbf{b}\_s \mathbf{m}\_s^H + \mathbf{m}\_n \mathbf{b}\_n \mathbf{m}\_n^H\$, \$\Delta \mathbf{m}\_s = \mathbf{m}\_n \mathbf{m}\_n^H \Delta \mathbf{Z} \mathbf{m}\_s \mathbf{b}\_s^{-1}\$, 又有 \$\tilde{\mathbf{P}}\_s = \sum\_{i=1}^M \beta\_i \mathbf{u}\_i \mathbf{u}\_i^H = \mathbf{m}\_s \mathbf{b}\_s \mathbf{m}\_s^H\$, 所以

$$\Delta \tilde{\mathbf{P}}_s = \mathbf{P}_{ms} \Delta \mathbf{Z} \mathbf{P}_{mn} + \mathbf{P}_{mn} \Delta \mathbf{Z} \mathbf{P}_{ms} \quad (16)$$

其中, \$\mathbf{P}\_{ms} = \mathbf{m}\_s \mathbf{m}\_s^H\$ 和 \$\mathbf{P}\_{mn} = \mathbf{m}\_n \mathbf{m}\_n^H\$ 分别为 \$\mathbf{m}\_s\$ 和 \$\mathbf{m}\_n\$ 的投影矩阵。结合 \$\mathbf{P}\_{ms} \mathbf{P}\_{ms} = \mathbf{P}\_{ms}\$, \$\mathbf{P}\_{mn} \mathbf{P}\_{mn} = \mathbf{P}\_{mn}\$ 以及 \$\mathbf{P}\_{ms} \mathbf{P}\_{mn} = \mathbf{0}\$, 本文算法中信号子空间的估计精度为

$$\rho_1 = \|\tilde{\mathbf{P}}_s - \mathbf{P}_s\|_2 \\ = 2\text{tra}(\mathbf{P}_{ms} \Delta \mathbf{Z} \mathbf{P}_{mn} \Delta \mathbf{Z}) \\ = 2\text{tra} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{ms} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \\ + \mathbf{P}_{ms} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \\ + \mathbf{P}_{ms} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \\ + \mathbf{P}_{ms} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \end{pmatrix} \quad (17)$$

式(17)期望值 \$E(\rho\_1)\$ 的计算包含4个迹函数的期望值的计算, 依次为

$$E[\text{tra}(\mathbf{P}_{ms} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s)] \\ = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p} \mathbf{e}_p^H \mathbf{P}_{mn} \mathbf{e}_p \times \sum_{p=P+1}^N \sigma_n^2 \mathbf{e}_p^H \mathbf{P}_{ms} \mathbf{e}_p \quad (18)$$

$$E \left[ \text{tra} \left( \mathbf{P}_{ms} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \right) \right] \\ = -\frac{\sigma_n^2}{L} \sum_{p=1}^P \frac{1}{2j d_p^H \mathbf{P}_n d_p} \\ \cdot \text{tra} \left( \mathbf{a}_p^H \mathbf{U}_s \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{P}_{mn} \mathbf{P}_n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_p} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right. \\ \left. \cdot \mathbf{A}^H \mathbf{P}_s \mathbf{P}_{ms} \mathbf{P}_n d_p \right) \quad (19)$$

$$E \left[ \text{tra} \left( \mathbf{P}_{ms} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \right) \right] \\ = \left( E \left[ \text{tra} \left( \mathbf{P}_{ms} \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \right) \right] \right)^* \quad (20)$$

$$E \left[ \text{tra} \left( \mathbf{P}_{ms} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \mathbf{P}_{mn} \tilde{\mathbf{P}}_s \Delta \tilde{\mathbf{P}}_s \right) \right] = -\frac{1}{L} \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^P \\ \frac{2\sigma_n^2 \text{Re} \left( d_p^H \mathbf{P}_n d_r \mathbf{a}_r^H \mathbf{U}_s \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}_p \right) + (\delta w)^2}{2j d_p^H \mathbf{P}_n d_p (2j d_r^H \mathbf{P}_n d_r)} \\ \cdot \text{tra} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_p} \right)^H \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{mn} \mathbf{P}_n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_r} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right. \\ \left. \cdot \mathbf{A}^H \mathbf{P}_{ms} \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right) \quad (21)$$

利用式(18)、式(19)、式(20)和式(21), 最终可得到信号子空间估计精度的期望值 \$E[\rho\_1]\$ 的表达式

$$E[\rho_1] = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p} \mathbf{e}_p^H \mathbf{P}_{mn} \mathbf{e}_p \times \sum_{p=P+1}^N \sigma_n^2 \mathbf{e}_p^H \mathbf{P}_{ms} \mathbf{e}_p \\ - \frac{2\sigma_n^2}{L} \text{Re} \left( \sum_{p=1}^P \frac{1}{2j d_p^H \mathbf{P}_n d_p} \right. \\ \left. \cdot \text{tra} \left( \mathbf{a}_p^H \mathbf{U}_s \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{P}_{mn} \mathbf{P}_n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_p} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \mathbf{A}^H \mathbf{P}_s \mathbf{P}_{ms} \mathbf{P}_n d_p \right) \right) + \frac{1}{2L} \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^P \\ \frac{2\sigma_n^2 \text{Re} \left( d_p^H \mathbf{P}_n d_r \mathbf{a}_r^H \mathbf{U}_s \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}_p \right) + (\delta w)^2}{d_p^H \mathbf{P}_n d_p d_r^H \mathbf{P}_n d_r} \\ \cdot \text{tra} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_p} \right)^H \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{mn} \mathbf{P}_n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial w_r} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right. \\ \left. \cdot \mathbf{A}^H \mathbf{P}_{ms} \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right) \quad (22)$$

其中, \$\text{Re}(\cdot)\$ 表示取实部操作。从式(22)可以看出, 信号子空间的估计精度与样本数 \$L\$、噪声功率 \$\sigma\_n^2\$ 以及频率间隔 \$\delta w\$ 等参数有关, 在低信噪比和小样本情况下, 信号子空间的估计精度较差。此外, 频率间隔 \$\delta w\$ 增加时, 信号子空间估计精度也会有轻微的下降。

## 5 仿真实验

本文以一个阵元数 \$N = 10\$ 的半波长均匀等距线阵为例, 对本文提出算法的性能进行仿真分析, 仿真试验次数设为 \$Q = 500\$。

### 实验1 信号子空间估计精度

令 \$\tilde{\mathbf{P}}\_{sq} = \tilde{\mathbf{U}}\_s \tilde{\mathbf{U}}\_s^H\$ 和 \$\tilde{\mathbf{P}}\_{sq}\$ 分别为传统MUSIC算法以及本文算法在第 \$q\$ 次仿真时得到的信号子空间投影矩阵, 则其估计精度可以定义为 \$10 \lg \left( \frac{1}{Q} \sum\_{q=1}^Q \|\tilde{\mathbf{P}}\_{sq} - \mathbf{P}\_s\|\_2 \right)\$ 和 \$10 \lg \left( \frac{1}{Q} \sum\_{q=1}^Q \|\tilde{\mathbf{P}}\_{sq} - \mathbf{P}\_s\|\_2 \right)\$。假设有两个不相关的窄带信源, 角度分别为 \$-3^\circ\$ 和 \$3^\circ\$。图1(a)和图1(b)分别给出了角度间隔 \$\delta\theta = 4^\circ\$ 和 \$\delta\theta = 2^\circ\$ (角度区域内按栅格 \$\Delta\theta = 0.05^\circ\$ 均匀划分) 多次迭代(迭代次数为

$I$ )信号子空间估计精度随着假设的初始误差变化曲线。从图1可以看出，本文算法信号子空间精度可提高大约5 dB。初始角度误差较小，1次迭代就可以获得较精确的信号子空间，而初始误差大时，需多次迭代。此外，对比图1(a)和图1(b)可以看出，角度间隔较小时，估计得到的信号子空间可提高大约1 dB，但是需要多次迭代，考虑到计算负荷，在后文的仿真中仅迭代1次，设置角度间隔为 $\delta\theta = 4^\circ$ 。

图2(a)和图2(b)分别给出了信号子空间的估计精度随着SNR和样本数变化曲线，并与理论推导结果对比。从图2中可以看出，信号子空间的估计精

度随着信噪比和样本数的增加而提高。在不同的样本数以及SNR条件下，本文算法相比于传统算法信号子空间精度可提高大约5 dB以上。

**实验2 目标分辨能力比较**

假设有两个不相关的窄带信源，角度分别为 $-1^\circ$ 和 $2^\circ$ 。若此角域内存在两个峰值点，本文认为可分辨两目标；否则，我们认为不能够分辨两目标。图3(a)和图3(b)分别给出了目标分辨率随着SNR和样本数变化曲线。从图3中可以看出，SNR小于14 dB及样本数小于 $6N$ 时，本文算法相比于传统算法目标分辨能力好。

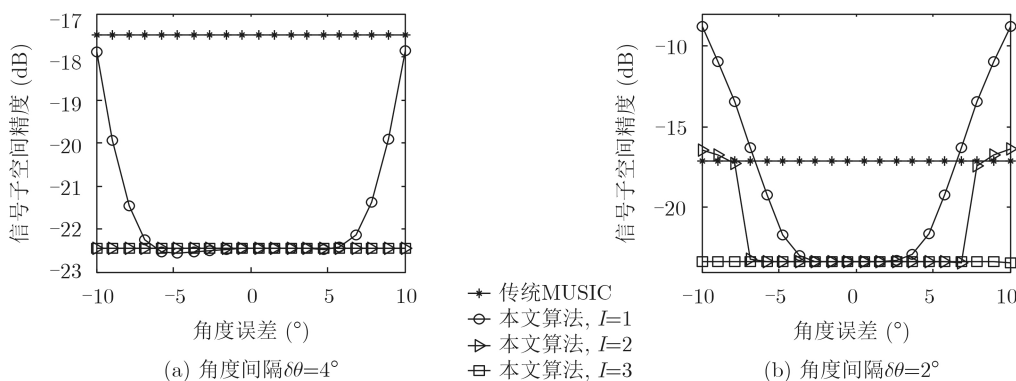


图1 信号子空间的估计精度随着角度误差变化曲线，SNR=5 dB,  $L = N$

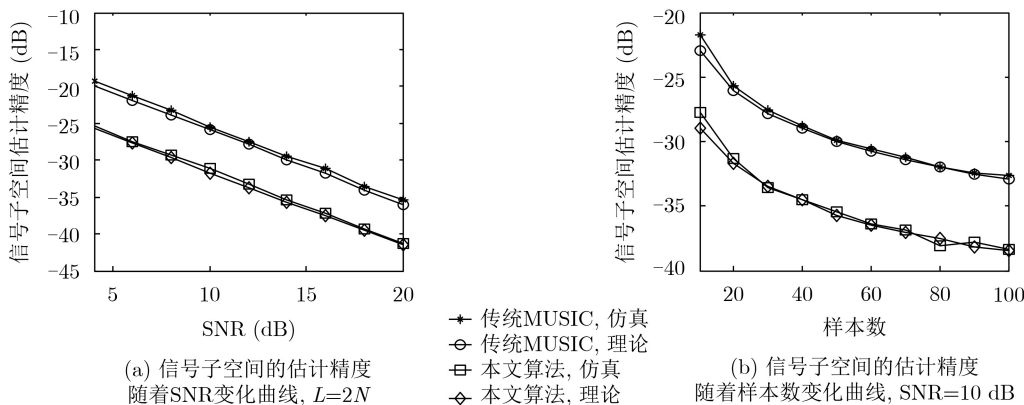


图2 信号子空间的估计精度

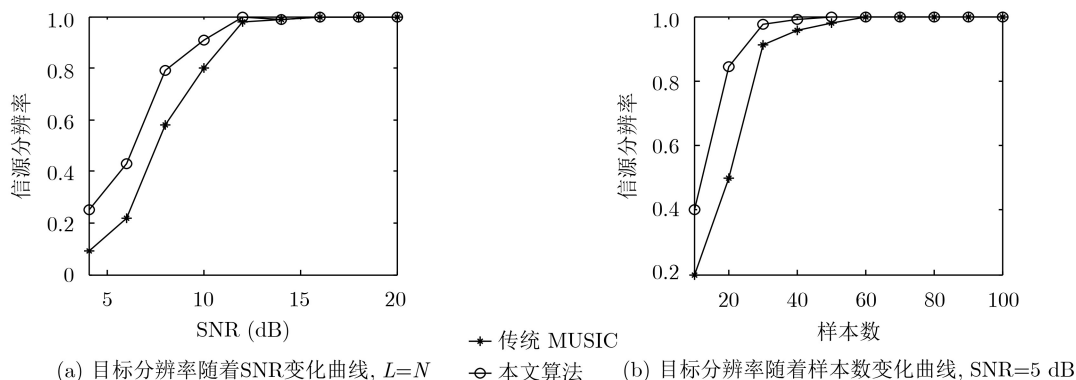


图3 目标分辨率

### 实验3 均方误差根(RMSE)比较

本文利用最小均方误差根(RMSE)来衡量目标角度估计精度,它定义为  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{QP} \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^P \|\tilde{\theta}_{qp} - \theta_p\|^2}$ , 其中  $\tilde{\theta}_{qp}$  表示第  $q$  次仿真试验中第  $p$  个信号的角度估计值。假设有两个不相关的窄带信号, 角度为  $-3^\circ$  和  $3^\circ$ 。

图4给出了RMSE随着SNR以及样本数的变化

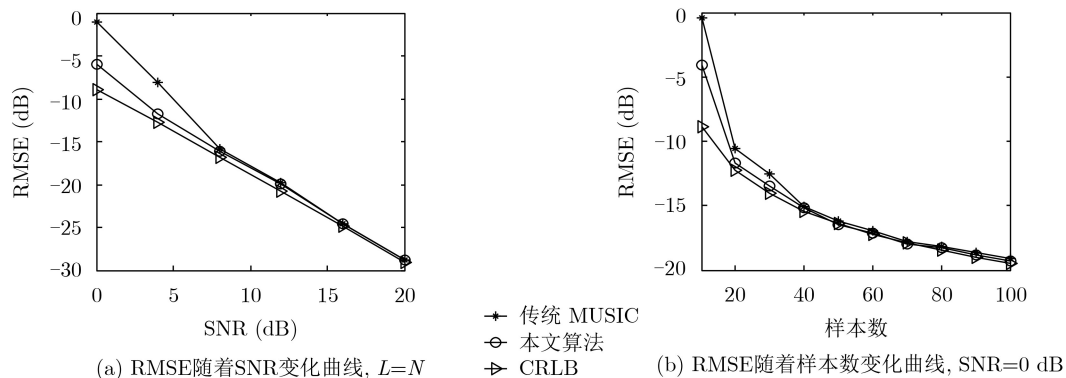


图4 RMSE

## 6 结论

本文通过解优化问题来计算新的信号子空间,进而得到相对应的噪声子空间的投影矩阵来改善MUSIC算法DOA估计性能。仿真实验证明了本文算法可以提高信号子空间的估计精度。相比于传统的MUSIC算法,本文改进算法可以得到更好的DOA估计精度,也可以更好地分辨两个空间角度相近的目标。

### 参考文献

- [1] 闫锋刚, 刘秋晨, 邵多, 等. 基于谱分解的降阶求根MUSIC算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(10): 2421–2427. doi: [10.11999/JEIT170024](https://doi.org/10.11999/JEIT170024).  
YAN Fenggang, LIU Qiuchen, SHAO Duo, et al. Reduced-dimension Root-MUSIC algorithm based on spectral factorization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(10): 2421–2427. doi: [10.11999/JEIT170024](https://doi.org/10.11999/JEIT170024).
- [2] 文才, 吴建新, 王彤, 等. 波束-多普勒ESPRIT多目标DOA估计[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(5): 1136–1143. doi: [10.11999/JEIT170707](https://doi.org/10.11999/JEIT170707).  
WEN Cai, WU Jianxin, WANG Tong, et al. Multi-target DOA estimation using beam-doppler unitary ESPRIT[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(5): 1136–1143. doi: [10.11999/JEIT170707](https://doi.org/10.11999/JEIT170707).
- [3] BELLILI F, ELGUET C, AMOR S B, et al. Code-aided DOA estimation from turbo-coded QAM transmissions: Analytical CRLBs and maximum likelihood estimator[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2017, 16(5): 2850–2865. doi: [10.1109/TWC.2017.2669026](https://doi.org/10.1109/TWC.2017.2669026).
- [4] STOICA P and NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound: Further results and comparisons[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990, 38(12): 2140–2150. doi: [10.1109/29.61541](https://doi.org/10.1109/29.61541).
- [5] PILLAI S U and KWON B H. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(1): 8–15. doi: [10.1109/29.17496](https://doi.org/10.1109/29.17496).
- [6] VASYLYSHYN V. Removing the outliers in root-MUSIC via pseudo-noise resampling and conventional beamformer[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(12): 3423–3429. doi: [10.1016/j.sigpro.2013.05.026](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.05.026).
- [7] QIAN Cheng, HUANG Lei, and SO H C. Improved unitary root-MUSIC for DOA estimation based on pseudo-noise resampling[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(2): 140–144. doi: [10.1109/LSP.2013.2294676](https://doi.org/10.1109/LSP.2013.2294676).
- [8] VASYLYSHYN V I. DOA estimation using beamspace root-music based estimator bank[C]. The 11th International Conference on Antenna Theory and Techniques, Kiev, Ukraine, 2017: 367–369.
- [9] SHAGHAGHI M and VOROBYOV S A. Subspace leakage analysis and improved DOA estimation with small sample size[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(12): 3251–3265. doi: [10.1109/TSP.2015.2422675](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2422675).
- [10] SHAGHAGHI M and VOROBYOV S A. Iterative root-MUSIC algorithm for DOA estimation[C]. The 5th IEEE International Workshop on Computational Advances in

- Multi-Sensor Adaptive Processing, St. Martin, France, 2013: 53–56.
- [11] VINCENT F, PASCAL F, and BESSON O. A bias-compensated MUSIC for small number of samples[J]. *Signal Processing*, 2017, 138: 117–120. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.03.015](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.03.015).
- [12] WANG Cheng, TANG Jun, and YANG Bin. Fast and convenient implementation of iterative eigenspace-based beamforming[J]. *Electronics Letters*, 2015, 51(9): 720–722. doi: [10.1049/el.2015.0131](https://doi.org/10.1049/el.2015.0131).
- [13] YI Shanchao, WU Ying, and WANG Yunlong. Projection-based robust adaptive beamforming with quadratic constraint[J]. *Signal Processing*, 2016, 122: 65–74. doi: [10.1016/j.sigpro.2015.11.016](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.11.016).
- [14] NIE Weike, FENG Dazheng, XIE Hu, *et al.* Improved MUSIC algorithm for high resolution angle estimation[J]. *Signal Processing*, 2016, 122: 87–92. doi: [10.1016/j.sigpro.2015.12.002](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.12.002).
- [15] WU Jianxin, WANG Tong, and BAO Zheng. Angle estimation for adaptive linear array using PCA-GS-ML estimator[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(1): 670–677. doi: [10.1109/TAES.2013.6404132](https://doi.org/10.1109/TAES.2013.6404132).
- 王娟: 女, 1987年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、空时自适应处理、广域GMTI.
- 王彤: 男, 1974年生, 教授, 研究方向为合成孔径雷达成像、机载雷达运动目标检测.
- 吴建新: 男, 1982年生, 副教授, 研究方向为阵列信号处理、自适应信号处理、空时自适应处理.