一类2次多项式混沌系统的均匀化方法研究

臧鸿雁[①] 黄慧芳*[②] 柴宏玉[①]

[①](北京科技大学数理学院 北京 100083)

[②](厦门大学嘉庚学院信息科学与技术学院 漳州 363105)

摘 要：该文给出了一般的2次多项式混沌系统与Tent映射拓扑共轭的充分条件，并依据该条件，给出了一类2次多项式混沌系统及其概率密度函数；进一步得到了能够将这类系统均匀化的变换函数；给出了一个新的2次多项式混沌系统并进行均匀化处理，对其产生的序列进行了信息熵、Kolmogorov熵和离散熵分析，结果显示该均匀化方法的均匀化效果显著且不改变序列混沌程度。

关键词：混沌系统；均匀化；拓扑共轭；熵

中图分类号：TN918.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2019)07-1618-07

DOI: 10.11999/JEIT180735

Homogenization Method for the Quadratic Polynomial Chaotic System

ZANG Hongyan[①] HUANG Huifang[②] CHAI Hongyu[①]

[①](*School of Mathematics and Physics*, *University of Science and Technology Beijing*, *Beijing* 100083, *China*)

[②](*School of Information Science and Technology*, *Xiamen University Tan Kah Kee College*, *Zhangzhou* 363105, *China*)

Abstract: A sufficient condition for general quadratic polynomial systems to be topologically conjugate with Tent map is proposed. Base on this condition, the probability density function of a class of quadratic polynomial systems is provided and transformations function which can homogenize this class of chaotic systems is further obtained. The performances of both the original system and the homogenized system are evaluated. Numerical simulations show that the information entropy of the uniformly distributed sequences is closer to the theoretical limit and its discrete entropy remains unchanged. In conclusion, with such homogenization method all the chaotic characteristics of the original system is inherited and better uniformity is performed.

Key words: Chaotic system; Homogenization; Topologically conjugate; Entropy

1 引言

在过去的40年里，混沌作为一种有意思的复杂非线性动力学现象得到了深入的研究。1975年，文献[1]首次对“混沌”一词运用数学定义进行描述。混沌的非周期特性和初值敏感性使其在多个领域内都有应用潜力[2,3]，近年来得到了广泛关注。

基于混沌系统的流密码的研究中，混沌系统本身的随机性是决定密码系统安全性的重要因素[4,5]，而大部分混沌系统的分布并不是均匀的，混沌系统的均匀化，或许能成为优化混沌系统随机性的重要手段。在众多混沌系统中，Tent映射具有均匀分布的特性，文献[6]通过证明Logistic映射和Chebyshev映射均与Tent映射具有拓扑共轭关系，从而得到了Logistic映射和Chebyshev映射的概率密度函数。文献[7]使用均匀化和反向误差分析的结果来量化时间积分器的误差如何影响轨迹的平均行为，从而使数值模拟收敛于均匀化多尺度系统的概率密度函数。像Tent映射这样的能够产生随机性良好的均匀混沌序列的系统十分值得深入研究。因此，均匀化混沌序列的方法应运而生[8,9]。文献[8]利用设计的变换函数对抛物线映射进行变换，使得Logistic映射经过变换后能够产生均匀分布的混沌序列。文献[9]基于均匀化趋势定理和偏差定理提出了一种混沌序列均匀化的普适算法。均匀化方法有效性的验证，可以通过统计直方图查看序列的分布情况，或分析序列的信息熵。而离散混沌系统的混乱程度

收稿日期：2018-07-19；改回日期：2019-01-17；网络出版：2019-02-14

*通信作者： 黄慧芳 13661363592@163.com

基金项目：中央高校基本科研业务费专项基金(06108236)

Foundation Item: The Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (06108236)

的度量，可以利用Kocarev等[10,11]提出的有限集合上的离散熵[12]的指标进行检测。

文献[13]给出了一个2次多项式混沌系统，证明了该系统与Tent映射满足拓扑共轭，并进一步给出了该系统的概率密度，将该混沌系统进行了均匀化，本文将文献[13]的结论进一步推广，并结合文献[14]提出的一般2次多项式映射存在3-周期点的充分必要条件，进一步提出了一般2次多项式混沌系统与Tent映射拓扑共轭的充分条件，由此得到了这一类系统的概率密度，通过概率密度函数对这类系统进行变换，从而达到均匀化的目的; 最后进行数值模拟实验，通过对信息熵、Kolmogorov熵、离散熵等特性进行评价，表明了该均匀化方法的有效性。

2　一般2次多项式混沌系统及其概率密度求解

文献[14]通过在复数域上分解实系数多项式，提出了一般非线性多项式的3-周期点的等价命题，并基于多项式的完全判别系统，提出了一般2次多项式3-周期点存在性的充要条件，表述为如下引理:

引理1[14]　2次多项式$f(x)=ax^2+bx+c$有实的3-周期点的充分必要条件是$b^2-4ac-2b\geq 7$。

定义1[15]　设$f:X\to X$和$g:Y\to Y$为两个映射，如果存在一个可逆映射$h:X\to Y$，使得$f(h(x))=h(g(x))$，则称f和g是拓扑共轭的。

拓扑共轭是动力系统中的重要理论，满足拓扑共轭关系的两个系统将具有相同的动力行为。

下面提出一般2次多项式混沌系统与Tent映射满足拓扑共轭关系的充分条件，定理表述如下：

定理1　在区间$\left[\dfrac{-4-b}{2a},\dfrac{4-b}{2a}\right]$或者$\left[\dfrac{4-b}{2a},\dfrac{-4-b}{2a}\right]$上，一般2次多项式函数$f(x)=ax^2+bx+c$，以及三角函数

$$h(x)=\frac{2}{a}\cos\pi x-\frac{b}{2a} \tag{1}$$

如果参数a,b,c满足条件

$$b^2-4ac-2b=8 \tag{2}$$

则$f(x)$与Tent映射关于$h(x)$拓扑共轭。

证明：设Tent映射为

$$g(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases} \tag{3}$$

为使函数$f(x)$与Tent映射$g(x)$关于变换$h(x)$拓扑共轭，则需要证明$f(h(x))=h(g(x))$。基于拓扑共轭定义，一方面

$$\begin{aligned}h(g(x))&=\begin{cases}\dfrac{2}{a}\cos 2\pi x-\dfrac{b}{2a}, & 0\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{a}\cos\pi(2-2x)-\dfrac{b}{2a}, & \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}\\ &=\frac{2}{a}\cos 2\pi x-\frac{b}{2a}\\ &=h(2x)\end{aligned} \tag{4}$$

另一方面

$$\begin{aligned}f(h(x))&=ah^2(x)+bh(x)+c\\ &=a\left(h(x)+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\ &=a\left(\frac{2}{a}\cos\pi x\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\ &=\frac{2}{a}\cos 2\pi x+\frac{2}{a}-\frac{b^2}{4a}+c\end{aligned} \tag{5}$$

又因为$b^2-4ac-2b=8$，所以式(5)

$$\begin{aligned}f(h(x))&=\frac{2}{a}\cos 2\pi x+\frac{8-b^2+4ac}{4a}\\ &=\frac{2}{a}\cos 2\pi x-\frac{b}{2a}\end{aligned}$$

与式(4)相等。

综上，$f(x)$与Tent映射$g(x)$关于$h(x)$拓扑共轭。　　证毕

下面基于引理2给出一般2次多项式混沌系统的概率密度。

引理2[16]　如果映射$f(x)$和$g(x)$关于$h(x)$拓扑共轭，$\rho_g(x)$是映射$g(x)$的概率密度函数，那么映射$f(x)$的概率密度函数

$$\rho_f(x)=\rho_g\left(h^{-1}(x)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|. \tag{6}$$

定理2　一般2次多项式$f(x)=ax^2+bx+c$，其中　$b^2-2b-4ac=8$　，　$x\in\left[\dfrac{-4-b}{2a},\dfrac{4-b}{2a}\right]$　或$x\in\left[\dfrac{4-b}{2a},\dfrac{-4-b}{2a}\right]$，$f(x)$　的概率密度为

$$\rho(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{2a}{\pi\sqrt{16-b^2-4abx-4a^2x^2}}\right|, & x\in\left[\dfrac{-4-b}{2a},\dfrac{4-b}{2a}\right]\text{或}x\in\left[\dfrac{4-b}{2a},\dfrac{-4-b}{2a}\right]\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7}$$

证明 已知Tent映射的概率密度函数为

$$\rho_{\mathrm{T}}(x)=1, x\in(0,1) \tag{8}$$

由于$f(x)$与Tent映射关于$h(x)=\frac{2}{a}\cos\pi x-\frac{b}{2a}$拓扑共轭，则有

$$\begin{aligned}\rho_f(x)&=\rho_{\mathrm{T}}\left(h^{-1}(x)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|\\&=\left|\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{a}{2}x+\frac{b}{4}\right)\right)}{\mathrm{d}x}\right|\\&=\left|\frac{a}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}x+\frac{b}{4}\right)^2}}\right|\\&=\left|\frac{2a}{\pi\sqrt{16-b^2-4abx-4a^2x^2}}\right|\end{aligned} \tag{9}$$

综上得证函数

$$\rho_f(x)=\left|\frac{2a}{\pi\sqrt{16-b^2-4abx-4a^2x^2}}\right| \tag{10}$$

是$f(x)$的概率密度函数。 证毕

由$f(x)$的概率密度函数可知一般2次多项式混沌系统产生的序列是不均匀分布的，因此存在统计特性明显的弱点，需要对其进行改善，最直接的方法就是均匀化处理。以下给出基于概率密度函数的均匀化方法。

3 一般2次多项式混沌系统的均匀化

定理3 已知随机变量X的概率密度如式(7)，则随机变量

$$Z=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{a}{2}X-\frac{b}{4}\right) \tag{11}$$

在区间$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上的服从均匀分布。

证明 随机变量Z的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)\\&=P\left(\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{a}{2}X-\frac{b}{4}\right)\le z\right)\\&=P\left(-\frac{a}{2}X-\frac{b}{4}\le\sin\pi z\right)\\&=P\left(aX\ge-2\sin\pi z-\frac{b}{2}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

(1) 当$a<0$时，$\rho_f(x)=-\frac{2a}{\pi\sqrt{16-b^2-4abx-4a^2x^2}}$，则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\left(aX\ge-2\sin\pi z-\frac{b}{2}\right)\\&=P\left(X\le\frac{-2\sin\pi z}{a}-\frac{b}{2a}\right)\\&=\int_{-\infty}^{-\frac{2\sin\pi z}{a}-\frac{b}{2a}}\rho_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{13}$$

将式(13)左右两边求导，得到Z的概率密度

$$\begin{aligned}\rho_Z(z)&=\begin{cases}\dfrac{\left(-\frac{2a}{\pi}\right)\cdot\left(-\frac{2}{a}\pi\cos\pi z\right)}{\sqrt{16-b^2+4ab\left(\frac{2\sin\pi z}{a}+\frac{b}{2a}\right)-4a^2\left(\frac{2\sin\pi z}{a}+\frac{b}{2a}\right)^2}}, & x\in\left[\frac{4-b}{2a},\frac{-4-b}{2a}\right]\\0, & \text{其它}\end{cases}\\&=\begin{cases}\cos\pi z/\sqrt{\cos^2\pi z}, & -1\le\sin\pi z\le1\\0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\le z\le\frac{1}{2}\\0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned} \tag{14}$$

(2) 当$a>0$时，$\rho_f(x)=\frac{2a}{\pi\sqrt{16-b^2-4abx-4a^2x^2}}$，则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\left(aX\ge-2\sin\pi z-\frac{b}{2}\right)=P\left(X\ge\frac{-2\sin\pi z}{a}-\frac{b}{2a}\right)\\&=1-\int_{-\infty}^{-\frac{2\sin\pi z}{a}-\frac{b}{2a}}\rho_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{15}$$

$$\rho_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{2}{a}\pi\cos\pi z}{\sqrt{16-b^2+4ab\left(\dfrac{2\sin\pi z}{a}+\dfrac{b}{2a}\right)-4a^2\left(\dfrac{2\sin\pi z}{a}+\dfrac{b}{2a}\right)^2}}, & x\in\left[\dfrac{-4-b}{2a},\dfrac{4-b}{2a}\right]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\cos\pi z/\sqrt{\cos^2\pi z}, & -1\le\sin\pi z\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & -\dfrac{1}{2}\le z\le\dfrac{1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{16}$$

综上，$Z=\dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(-\dfrac{a}{2}X-\dfrac{b}{4}\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上服从均匀分布。　　证毕

X是混沌系统，由随机变量Z的定义可知其与随机变量X在给定区间内满足一一对应关系，因此Z也是混沌系统。

4　均匀化后的混沌系统的性能分析

基于引理1和定理1，取a,b,c满足$b^2-4ac-2b=8$，就可以得到与Tent映射拓扑共轭的2次多项式混沌系统，根据定理2给出系统的概率密度函数，并基于定理3对系统进行均匀化，分别计算原系统和均匀化后系统的信息熵，列举3个系统的详细数据如表1所示。

表 1　几个2次多项式混沌系统

混沌系统$f(x)$	概率密度	均匀化系统$z(x)$	$f(x)$信息熵	$z(x)$信息熵
$f(x)=\frac{7}{2}x^2+\frac{33}{10}x-\frac{53}{200}$	$\frac{7}{\pi\sqrt{-49x^2+46.2x+5.11}}$	$z(x)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{7}{4}x-\frac{33}{40}\right)$	8.6470	8.9651
$f(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{27}{20}$	$\frac{5}{\pi\sqrt{-25x^2+10x+63}}$	$z(x)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{5}{8}x+\frac{1}{8}\right)$	8.6380	8.9649
$f(x)=-\frac{5}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{\pi\sqrt{-25x^2+30x+7}}$	$z(x)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}\right)$	8.6412	8.9650

取$a=3.5$，$b=3.3$，$c=-0.265$，得到了如下与Tent映射拓扑共轭的2次多项式混沌系统

$$f(x)=3.5x^2+3.3x-0.265,x\in\left[-\frac{73}{70},\frac{1}{10}\right]\tag{17}$$

基于定理3对系统进行均匀化处理，得到均匀化后的系统

$$\left.\begin{aligned}x(n+1)&=3.5x(n)^2+3.3x(n)-0.265\\ z(n)&=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{7}{4}x(n)-\frac{33}{40}\right)\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

通过数值模拟对均匀化前后的混沌系统进行了实验，分别验证混沌系统的均匀性和混沌特性。下面给出文中涉及的指标的定义。

4.1　几种熵的定义

定义2　信息熵：设$\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一种信息源，$P$为$\boldsymbol{X}$上的一个概率分布，记$x_i$的概率为$p_i$。信源的信息熵记为$H(\boldsymbol{X})$，则

$$H(\boldsymbol{X})=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i\tag{19}$$

当信源等概率分布时，信息熵能取到最大值为$\log_2(n)$，这就是最大熵原理。

定义3[3]　Kolmogorov熵(K熵)：将一个n维动力系统的相空间分割为一系列边长为ε的n维立方体盒子，对于状态空间的一个吸引子和一条落在吸引域中的轨道，取时间间隔为一个很小量τ，$P(i_0,i_1,\cdots,i_d)$为联合概率，表示起始时刻系统轨道在第i_0格子中，$t=1$时在第i_1个格子中，$t=2$时在第i_2个格子中，$\cdots$，$t=d$时在第i_d个格子中的概率，则Kolmogorov熵定义为

$$K=-\lim_{\tau\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{d\to\infty}\frac{1}{d\tau}\sum_{i_0,i_1,\cdots,i_d}P(i_0,i_1,\cdots,i_d)\cdot\ln P(i_0,i_1,\cdots,i_d)\tag{20}$$

K熵可用于整体度量系统运动的混沌程度。对于规则运动$K=0$；对于纯随机运动$K=\infty$；对1维映射，K值等于正的Lyapunov指数。

定义4[12]　离散熵：设$S=\{s_0,s_1,\cdots,s_{L-1}\}$是序集关系为“$<$”的有限集合，$F:S\to S$是一个双射，$\sigma_n$表示所有$\{0,1,\cdots,n-1\}$的排列，$\pi\equiv[\pi(0),\pi(1),\cdots,\pi(n-1)]\in\sigma_n$，其中，$2\le n\le L$。令

$$Q_\pi(n)=\left\{s\in S:F^{\pi(0)}(s)<\cdots<F^{\pi(n-1)}(s)\right\}\tag{21}$$

$$q_\pi(n)=\frac{|Q_\pi(n)|}{\sum_{\tau\in\sigma_n}|Q_\tau(n)|} \tag{22}$$

对确定的n, $n\geq 2$，映射F的离散熵

$$H_\delta^{(n)}(F)=-\frac{1}{n-1}\sum_{\pi\in\sigma_n}q_\pi(n)\log_2 q_\pi(n) \tag{23}$$

$H_\delta^{(n)}(F)$描述了映射F的每相邻$n(2\leq n\leq \max_{s\in S}\{\mathrm{Per}(s)\})$长元素的混乱程度，其中，$\mathrm{Per}(s)$为集合$S$的周期。当选取元素长度大于$\max_{s\in S}\{\mathrm{Per}(s)\}$，映射$F$的离散熵为0。

文献[12]进一步对式(23)取算术平均数，更准确地将离散熵定义为

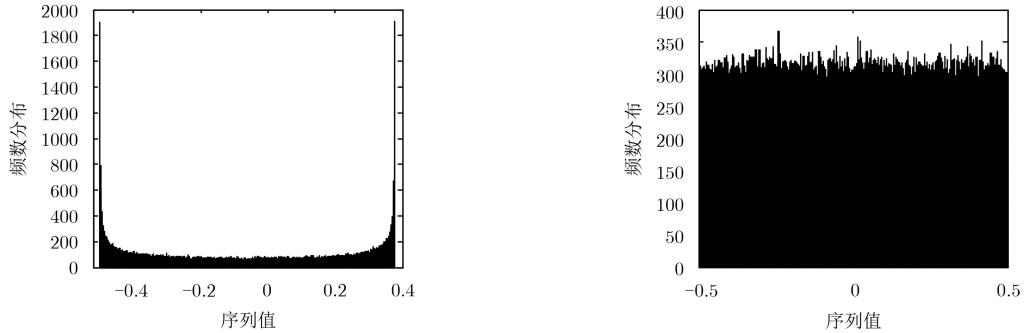
$$h_\delta(F)=\frac{1}{n_{\max}-1}\sum_{n=2}^{n_{\max}}H_\delta^{(n)}(F) \tag{24}$$

其中，$n_{\max}=\max\left\{n:H_\delta^{(n)}(F)\neq 0\right\}$。

4.2 混沌系统性能检测

4.2.1 统计直方图分析

对均匀化前后的混沌系统生成的序列进行数值统计，并给出统计直方图如图1(a)和图1(b)。可以看出，经过均匀化处理后的混沌序列均匀性明显改善。



(a)均匀化前序列 (b)均匀化后序列

图 1 统计直方图

4.2.2 信息熵分析

信息熵用以度量信源的不确定性程度。本文分析了均匀化前后系统产生的序列的信息熵。数值模拟由式(17)和式(18)分别迭代得到2个长度为N的离散混沌序列$x(n)$和$z(n)$，依据其取值范围等分成M个区间，统计落在每个区间内的离散序列值的个数，记为$n_i(i=1,2,\cdots,M)$，则每个区间的统计概率$p_i=n_i/N$，有$\sum_{i=1}^{M}p_i=1$。根据最大信息熵原理，信息熵最大值为$-\sum_{i=1}^{M}1/M\log_2 1/M=\log_2 M$。设定序列长$N=500000$，当$M$值取100, 300, 500时分别测试均匀化前后信息熵，并与理论最大熵对比，结果如表2。

表 2 系统均匀化前后的信息熵与最大熵比较

(N,M)	均匀化前信息熵	均匀化后信息熵	最大熵
(500000, 100)	6.3530	6.6437	6.6439
(500000, 300)	7.9137	8.2284	8.2288
(500000, 500)	8.6431	8.9651	8.9658

由表2的结果可知，在统计区间数M不同的3组实验中，均匀化后的序列较均匀化前序列的信息熵都明显接近于最大熵，表明序列均匀化处理的有效性，结果相对理想。

4.2.3 离散熵和K熵

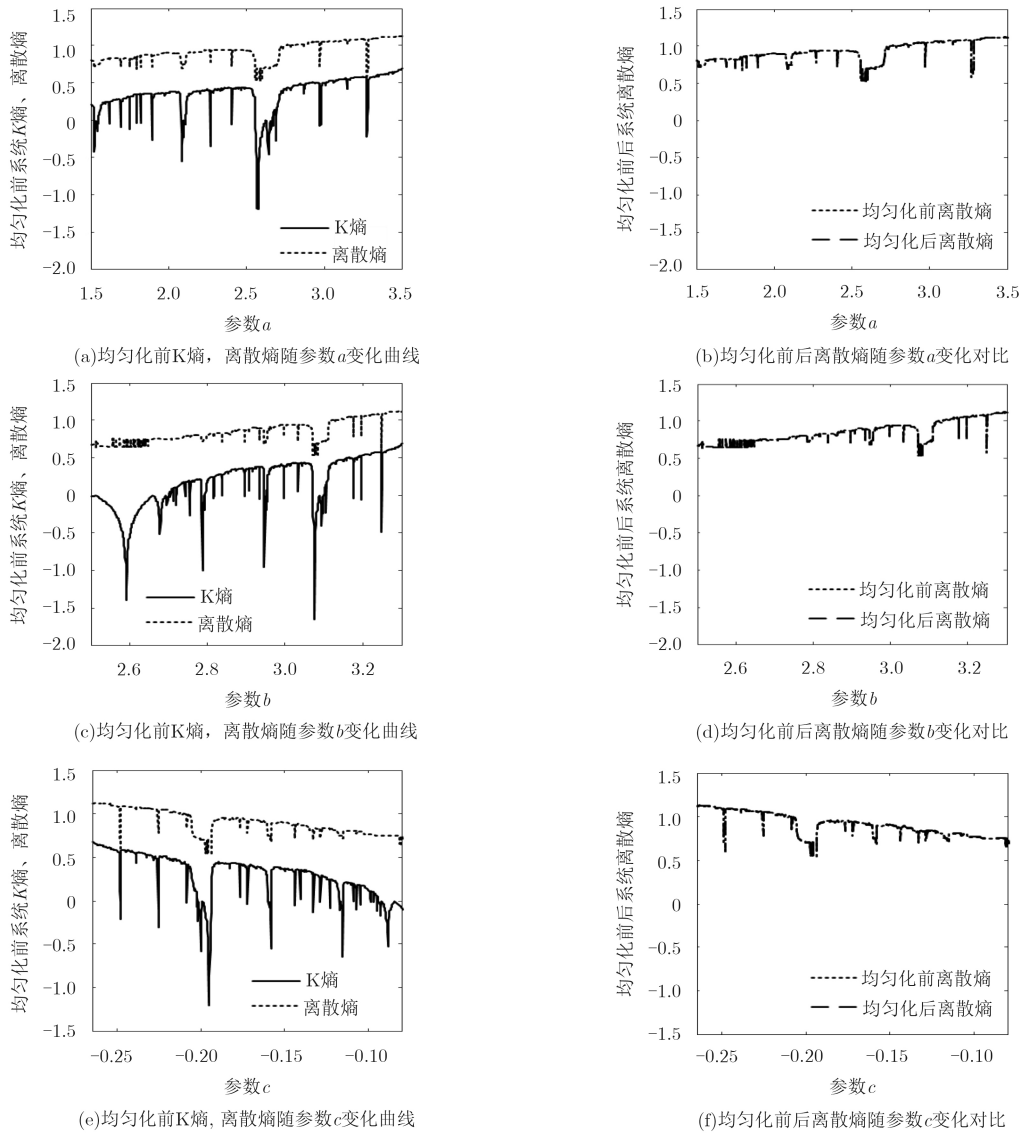
离散熵(DE)的概念由文献[12]提出用于度量有限集合上离散系统的混沌程度。离散熵$h_\delta(F)$考虑了相邻$n(n\geq 2)$长序列的每一种排列，共$n!$种。本文选取$2\leq L\leq 7$特殊情况，每次选定1个系统参数，对均匀化前后的系统分别进行模拟，并与系统的K熵(即正的Lyapunov指数)对比。

选定参数$a\in[1.5,3.5]$，均匀化后的系统为

$$\left.\begin{aligned}x(n+1)&=ax(n)^2+3.3x(n)-0.265\\ z(n)&=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{a}{2}x(n)-\frac{33}{40}\right)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

模拟均匀化前系统的K熵、离散熵，如图2(a)所示，均匀化前和均匀化后系统的离散熵如图2(b)所示；类似地，分别选定参数$b\in[1.5,3.3]$, $c\in[-0.265,0]$进行模拟，结果分别如图2(c)、图2(d)和图2(e)、图2(f)所示。

从图2(a), 图2(c), 图2(e) 3个图可以看出，均匀化前系统的离散熵的图线近似为其K熵曲线偏移了固定常量，这也说明了离散熵度量系统混沌程度的合理性; 图2(b), 图2(d), 图2(f)显示均匀化前后系统的离散熵完全相同，充分表明均匀化后的系统保持了原系统的混沌特性。



(a)均匀化前K熵，离散熵随参数a变化曲线　(b)均匀化前后离散熵随参数a变化对比

(c)均匀化前K熵，离散熵随参数b变化曲线　(d)均匀化前后离散熵随参数b变化对比

(e)均匀化前K熵, 离散熵随参数c变化曲线　(f)均匀化前后离散熵随参数c变化对比

图 2 均匀化前后系统K熵与离散熵对比图

5　结论

本文将文献[13]的结果推广到了一般2次多项式混沌系统，给出了一般的2次多项式混沌系统与Tent映射拓扑共轭的充分条件，并依据该条件，推出一类2次多项式混沌系统的概率密度函数，进一步得到了能够将这类系统均匀化的变换函数。用该均匀化方法对一个新的混沌系统进行均匀化处理，分析均匀化后系统产生的序列的信息熵，结果极接近于理论最大熵的值，说明均匀效果良好；数值模拟实验分别分析了系统的K熵与离散熵，结果表明离散熵近似为以固定常量偏移后的K熵，并且均匀化后的混沌系统保持了原系统的混沌程度。

参 考 文 献

[1] LI T Y and YORKE J A. Period three implies chaos[J]. *American Mathematical Monthly*, 1975, 82(10): 985–992. doi: 10.1007/978-0-387-21830-4_6.

[2] MANFREDI P, VANDE GINSTE D, STIEVANO I S, *et al*. Stochastic transmission line analysis via polynomial chaos methods: an overview[J]. *IEEE Electromagnetic Compatibility Magazine*, 2017, 6(3): 77–84. doi: 10.1109/memc.0.8093844.

[3] KUMAR S, STRACHAN J P, and WILLIAMS R S. Chaotic dynamics in nanoscale NbO2 Mott memristors for analogue computing[J]. *Nature*, 2017, 548(7667): 318–321. doi: 10.1038/nature23307.

[4] 廖晓峰, 肖迪, 陈勇, 等. 混沌密码学原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 16–40.
LIAO Xiaofeng, XIAO Di, CHEN Yong, *et al*. Theory and Applications of Chaotic Cryptography[M]. Beijing: Science Press, 2009: 16–40.

[5] KOCAREV L and TASEV Z. Public-key encryption based

on Chebyshev maps[C]. Proceedings of the 2003 International Symposium on Circuits and Systems, Bangkok, Thailand, 2003: 28–31. doi: 10.1109/ISCAS.2003.1204947.

[6] ROBINSON R C. An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2012: 24–50.

[7] FRANK J and GOTTWALD G A. A note on statistical consistency of numerical integrators for multiscale dynamics[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2018, 16(2): 1017–1033. doi: 10.1137/17M1154709.

[8] 黄诚, 易本顺. 基于抛物线映射的混沌LT编码算法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(10): 2527–2531.
HUANG Cheng and YI Benshun. Chaotic LT encoding algorithm based on parabolic map[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(10): 2527–2531.

[9] 曹光辉, 张兴, 贾旭. 基于混沌理论运行密钥长度可变的图像加密[J]. 计算机工程与应用, 2017, 53(13): 1–8. doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1703-0178.
CAO Guanghui, ZHANG Xing, and JIA Xu. Image encryption with variable-length running key based on chaotic theory[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2017, 53(13): 1–8. doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1703-0178.

[10] KOCAREV L, SZCZEPANSKI J, AMIGO J M, *et al*. Discrete chaos-I: theory[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2006, 53(6): 1300–1309. doi: 10.1109/TCSI.2006.874181.

[11] AMIGÓ J M, KOCAREV L, and SZCZEPANSKI J. Theory and practice of chaotic cryptography[J]. *Physics Letters A*, 2007, 366(3): 211–216. doi: 10.1016/j.physleta.2007.02.021.

[12] AMIGÓ J M, KOCAREV L, and TOMOVSKI I. Discrete entropy[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2007, 228(1): 77–85. doi: 10.1016/j.physd.2007.03.001.

[13] 臧鸿雁, 黄慧芳. 基于均匀化混沌系统生成S盒的算法研究[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(3): 575–581. doi: 10.11999/JEIT160535.
ZANG Hongyan and HUANG Huifang. Research on algorithm of generating S-box based on uniform chaotic system[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(3): 575–581. doi: 10.11999/JEIT160535.

[14] 周海玲, 宋恩彬. 二次多项式映射的3-周期点判定[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2009, 46(3): 561–564.
ZHOU Hailing and SONG Enbin. Discrimination of the 3-periodic points of a quadratic polynomial[J]. *Journal of Sichuan University: Natural Science Edition*, 2009, 46(3): 561–564.

[15] COLLET P and ECKMANN J P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems[M]. Boston: Birkhäuser, 2009.

[16] 郝柏林. 从抛物线谈起—混沌动力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2013: 114–118.
HAO Bolin. Starting with Parabola: An Introduction to Chaotic Dynamics[M]. Beijing: Peking University Press, 2013: 114–118.

臧鸿雁：女，1973年生，副教授，研究方向为非线性系统统同步理论与混沌密码学.

黄慧芳：女，1991年生，讲师，研究方向为混沌密码学.

柴宏玉：女，1990年生，硕士生，研究方向为非线性系统统同步理论与混沌密码学.