

低复杂度的可变分数时延滤波器设计

黄翔东* 徐婧文 张博 马欣
(天津大学电气自动化与信息工程学院 天津 300072)

摘要:为实现低复杂度、高精度的可变分数时延滤波器设计, 该文提出一种截止频率可控的高效设计法。该方法将全相位滤波器的解析设计与三次样条插值和泰勒级数展开相结合, 既可以通过设置时延参数精确地调整滤波器的分数时延, 又可以通过设置截止频率参数快速配置 Farrow 结构中各子滤波器的抽头系数, 从而灵活地调整滤波器的截止频率。仿真实验表明, 所提方法适用于设计具有中、低截止频率的可变分数时延滤波器, 其设计复杂度相比于现有的加权最小二乘设计法低 1 个数量级。

关键词: 可变分数时延滤波器; 解析设计; 三次样条插值; 可控的截止频率

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)04-0985-07

DOI: 10.11999/JEIT170349

Low-complexity Design of Variable Fractional Delay Filters

HUANG Xiangdong XU Jingwen ZHANG Bo MA Xin

(School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In order to design variable fractional delay filters with low complexity and high accuracy, an efficient design method with controllable cut-off frequency is proposed, which integrates the analytic all-phase filter design, the cubic spline interpolation and Taylor series expansion. In the proposed design, not only the time delay of the filter can be precisely adjusted by setting the delay parameter, but also the tap coefficients of each subfilter in the Farrow structure can be rapidly configured via setting the cut-off frequency parameter, thus the cut-off frequency of the filter can be adjusted flexibly. Numerical simulations show that, the proposed method is especially suitable to design variable fractional delay filters with low or middle cut-off frequencies, and its computation complexity is one order of magnitude lower than that of the existing Weighted Least Squares (WLS) design.

Key words: Variable Fractional Delay (VFD) filter; Closed-form design; Cubic spline interpolation; Controllable cut-off frequency

1 引言

可变分数时延 (Variable Fractional Delay, VFD) 数字滤波器广泛应用于采样率转换^[1]、时延估计^[2]、梳状滤波器设计^[3]、离散时间信号插值^[4]、图像插值^[5]与雷达波束形成^[6]等场合。文献[7]提出一种用于 VFD 滤波器设计的 Farrow 结构, 该结构由多个直接型有限冲激响应 (Finite Impulse Response, FIR) 子滤波器组成, 只需用不同幂次方的时延参数对这些 FIR 滤波器做线性组合即可灵活调节滤波器的群时延, 因而 20 多年来, Farrow 结构成为 VFD 滤波器的主流框架^[8-14]。相应地, VFD 滤波器的设计, 实际上就是对 Farrow 结构多个子滤波器的系数

进行配置的问题。实际应用中, 总是期望该系数配置以高效、解析的方式实现, 然而现有的两种主流方法 (极小极大方法^[9-11]与加权最小二乘法 (Weighted Least Squares, WLS)^[12-14]) 很难满足这个需求。

极小极大方法 (Minimax) 通过最小化滤波器的当前传输特性与期望传输特性之间的最大幅度误差来获得滤波器系数。文献[9]指出, 该方法要求对所有子滤波器的系数分别优化, 并且每次优化都涉及多次迭代更新, 因此运算复杂度很高, 相较于优化设计方法, 解析设计法更受欢迎。

与极小极大方法不同, WLS 方法通过求解线性方程获得滤波器系数^[14], 因此该方法是一种解析设计方法。然而, 该线性方程的求解包含矩阵求逆, 有必要提出一种低复杂度的 VFD 滤波器解析设计法。故本文将全相位滤波器解析设计、三次样条插值和泰勒级数展开做有机结合, 推导出 Farrow 结构

收稿日期: 2017-04-19; 改回日期: 2018-03-12; 网络出版: 2018-03-20

*通信作者: 黄翔东 xduan@tju.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61671012)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61671012)

子滤波器的解析配置公式, 实现了低复杂度 VFD 滤波器的高效、解析设计。

2 Farrow 滤波结构

对于以 Farrow 结构作为框架的 VFD 滤波器, 其传输函数可表示为^[7]

$$H(z, p) = \sum_{n=-N}^N h_n(p)z^{-n} \quad (1)$$

其中, 分数 p ($p \in [-0.5, 0.5]$) 是用于调节群时延的参数, 而 $h_n(p)$ 可进一步表示为关于 p 的多项式:

$$h_n(p) = \sum_{m=0}^M a(n, m)p^m \quad (2)$$

联立式(1), 式(2), 有

$$H(z, p) = \sum_{m=0}^M \left[\sum_{n=-N}^N a(n, m)z^{-n} \right] p^m = \sum_{m=0}^M G_m(z)p^m \quad (3)$$

因此, $H(z, p)$ 可由图 1 所示的 Farrow 结构实现。相应地, VFD 滤波器的设计, 即转化为图 1 中子滤波器系数 $a(n, m)$ 的合理配置问题。

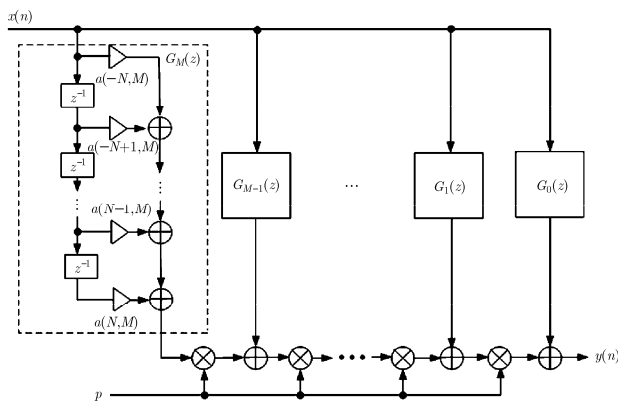


图 1 可变分数时延滤波器的 Farrow 结构

3 VFD 滤波器的解析设计

本文提出的 VFD 滤波器设计包含 3 个部分(即全相位滤波器设计、三次样条插值和泰勒级数展开), 这 3 部分设计都可解析实现, 故本文方法计算复杂度低。

3.1 全相位滤波器的解析设计

文献[15]指出: 给定满足 $H(k) = H(N - k)$ 的频率采样向量 \mathbf{H} , 及由常用窗 $f(n)$ (关于窗函数的选择对滤波器性能的影响详见文献[16])和翻转的矩形窗卷积得到的非零元素取值在 $n \in [-N + 1, N - 1]$ 的单窗卷积窗 $w_c(n)$, 即

$$w_c(n) = f(n) * R_N(-n) \quad (4)$$

其中, $*$ 表示卷积操作。只需将 \mathbf{H} 定义域延拓后的 IDFT 结果 $h(n)$ 与 $w_c(n)$ 相乘, 便可得到全相位滤波器系数 $g(n)$ 。

$$g(n) = h(n)w_c(n), \quad n \in [-N + 1, N - 1] \quad (5)$$

将式(5)的 $g(n)$ 除以因子 $C = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)$, 即可得到归一化传输曲线^[17,18]。对于低通滤波器设计, 若频率向量设定如式(6)形式^[16]:

$$\mathbf{H} = \left[\underbrace{1, \dots, 1}_K, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2K+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{K-1} \right] \quad (6)$$

则全相位 FIR 滤波器系数 $g(n)$ 可解析表示为

$$g(n) = \begin{cases} \frac{w_c(n)}{N} \frac{\sin[n(2K-1)\pi/N]}{\sin(\pi n/N)}, & n \in [-N+1, -1] \cup [1, N-1] \\ \frac{2K-1}{N}, & n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

文献[16]中证明, 滤波器 $g(n)$ 的传输特性 $G(j\omega)$ 可通过对频率向量 \mathbf{H} 做内插得到, 并且其内插函数恰好是归一化卷积窗 $w_c(n)$ 的傅里叶频谱 $W_c(j\omega)$, 因此 $G(j\omega)$ 等于

$$G(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)W_c[j(\omega - k2\pi/N)] \quad (8)$$

且传输曲线 $G(j\omega)$ 恰好通过 \mathbf{H} 中的 N 个频率采样点, 令 $\Delta\omega = 2\pi/N$, 从而有

$$G(jk\Delta\omega) = H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

设定 $N = 10, K = 3, w_c(n)$ 为汉宁单窗, 将这些参数代入式(7)即可得到全相位滤波器 $g(n)$, 其幅度曲线如图 2 所示。

从图 2 可看出, 由于 $G(j\omega)$ 通过所有的频率设置点, 故其在过渡带 $\omega \in [K-1, K]\Delta\omega$ 上近似为直线, 从而 3 dB 截止频率 ω_{cut} 近似满足

$$\frac{K\Delta\omega - \omega_{\text{cut}}}{\Delta\omega} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (10)$$

反之, 若给定参数 N 与截止频率 ω_{cut} (在实际应用中, 可借助频率估计器获得^[19]), 则参数 K 可以表示为

$$K = \left\lceil \frac{N\omega_{\text{cut}}}{2\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rceil \quad (11)$$

这里 $\lceil \cdot \rceil$ 表示四舍五入为整数。

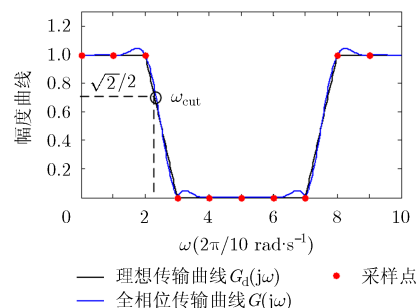


图 2 全相位滤波器的传输曲线 ($N=10, K=3$)

文献[16]指出, $G(j\omega)$ 具有零相位特性, 结合定义域 $n \in [-N+1, N-1]$, 故式(7)中全相位滤波器 $g(n)$ 的群时延恒等于 0。为获得分数时延, 需要将离散定义域 $n \in [-N+1, N-1]$ 延拓为连续定义域 $t \in [-N+1, N-1]$, 对 $g(n)$ 施加插值措施即可实现这个扩展。

3.2 基于三次样条插值的定义域延拓

对 $g(n)$ 做定义域延拓的可选择的插值算法很多, 出于降低计算复杂度和节省硬件资源的考虑, 本文引入三次样条插值 ($M=3$) 对全相位滤波器系数 $g(n)$ 做定义域延拓。

对于 $2N-1$ 个全相位滤波器系数 $g(-N+1), \dots, g(N-1)$, 存在 $2N-2$ 个单位区间 $t \in [n, n+1], n = -N+1, -N+2, \dots, N-2$ 。故将取值离散的 $g(n)$ 插值延拓为取值连续的函数 $g(t)$ 后, 该连续函数可表示为 $2N-2$ 个分段函数 $g_n(t)$ 的逼近, 即

$$g(t) \approx \begin{cases} g_{-N+1}(t), & t \in [-N+1, -N+2] \\ g_{-N+2}(t), & t \in [-N+2, -N+3] \\ \vdots \\ g_0(t), & t \in [0, 1) \\ \vdots \\ g_{N-2}(t), & t \in [N-2, N-1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

其中, $g_n(t)$ 是如式(13)所示的三次多项式。

$$g_n(t) = \begin{cases} b_{n,0} + b_{n,1}t + b_{n,2}t^2 + b_{n,3}t^3, & t \in [n, n+1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (13)$$

根据三次样条插值的定义^[20], 式(13)中的 4 个参数可分别计算如式(14):

$$\left. \begin{aligned} b_{n,0} &= g(n) \\ b_{n,1} &= g(n+1) - g(n) - \frac{g''_{n+1} + 2g''_n}{6} \\ b_{n,2} &= g''_n / 2 \\ b_{n,3} &= \frac{g''_{n+1} - g''_n}{6} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, g''_n, g''_{n+1} 分别为在 n 和 $n+1$ 两个位置算出的数值二阶导数。

3.3 Farrow 结构的子滤波器系数配置

为得到图 1 所示的 Farrow 结构子滤波器系数 $a(n, m)$, 需对连续函数 $g(t)$ 进行泰勒级数展开。具体而言, 除去 $t = -N+1$ 和 $t = N-1$ 这两个边界点, 泰勒展开的固定点可选为剩下的 $2N-3$ 个全相位滤波器离散取值点 $t = n, n \in [-N+2, N-2]$ 。不失一般性, 令 $t = n + p$, 分为两种情况进行讨论。

(1)情况 1: $0 \leq p \leq 0.5$, 该情况下, t 落在区间 $[n, n+1)$ 内, 因此 $g(t)$ 可以被 $g_n(t)$ 的泰勒系数展开式逼近

$$g(t) \approx g_n(n+p) = g_n(n) + \frac{g_n^{(1)}(n)}{1!} p + \frac{g_n^{(2)}(n)}{2!} p^2 + \frac{g_n^{(3)}(n)}{3!} p^3 \quad (15)$$

结合式(2)与式(15), 可推导出 Farrow 结构的子滤波器系数 $a(n, m)$ 具有如式(16)形式

$$a(n, m) = \frac{g_n^{(m)}(n)}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (16)$$

根据式(13), 式(16)中的各阶导数可表示为

$$\left. \begin{aligned} g_n(n) &= g(n) \\ g_n^{(1)}(n) &= b_{n,1} + 2b_{n,2}n + 3b_{n,3}n^2 \\ g_n^{(2)}(n) &= 2b_{n,2} + 6b_{n,3}n \\ g_n^{(3)}(n) &= 6b_{n,3} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

进一步结合式(16)与式(17), 我们可归纳得到子滤波器系数的统一公式为

$$a(n, m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 b_{n,i} n^i, & m = 0 \\ \frac{\sum_{i=m}^3 b_{n,i} \prod_{j=3-i}^{m+2-i} (3-j) n^{i-m}}{m!}, & m = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad n \in [-N+2, N-2] \quad (18)$$

(2)情况 2: $-0.5 \leq p < 0$, 该情况下, t 落在区间 $[n-1, n)$ 内, 因此 $g(t)$ 可以被 $g_{n-1}(t)$ 的泰勒系数展开式逼近

$$g(t) \approx g_{n-1}(n+p) = g_{n-1}(n) + \frac{g_{n-1}^{(1)}(n)}{1!} p + \frac{g_{n-1}^{(2)}(n)}{2!} p^2 + \frac{g_{n-1}^{(3)}(n)}{3!} p^3 \quad (19)$$

经过类似于情况 1 ($0 \leq p \leq 0.5$) 的推导, 该情况的子滤波器系数的统一公式可以被归纳为

$$a(n, m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 b_{n-1,i} n^i, & m = 0 \\ \frac{\sum_{i=m}^3 b_{n-1,i} \prod_{j=3-i}^{m+2-i} (3-j) n^{i-m}}{m!}, & m = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad n \in [-N+2, N-2] \quad (20)$$

3.4 3 步解析设计及复杂度分析

总结以上 3 部分, 本文提出的 VFD 滤波器可归纳为表 1 中的 3 个步骤。

分别对 3 个步骤所耗费的计算复杂度(主要是乘法计算量)定量分析如下:

对于步骤 1, 考虑到全相位滤波器 $g(n)$ 具有对

表1 3步解析设计流程

输入参数: 分数时延 p 、采样点个数 N 、截止频率 ω_{cut} 和归一化卷积窗 $w_c(n)$ 。
步骤 1 根据解析式(7), 结合式(11)生成全相位滤波器 $g(n)$, $-N+1 \leq n \leq N-1$ 。
步骤 2 将 $g(n)$ 代入解析式(14), 算出各分段函数的样条系数 $b_{n,m} (-N+1 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq 3)$ 。
步骤 3 根据 p 值的不同情况, 将 $b_{n,m}$ 代入泰勒解析式(18) 或者式(20)中, 求得 Farrow 结构的子滤波器系数 $a(n,m), -N+2 \leq n \leq N-2, 0 \leq m \leq 3$ 。

称性(即 $g(n) = g(-n)$), 从解析式(7)可得出: 计算 $2N-1$ 个全相位滤波器 $g(n)$ 总共耗费的乘法次数为 $M_1 = 3(N-1) + 1 = 3N-2$ 。对于步骤 2, 因为全相位滤波器 $g(n)$ 的长度为 $2N-1$, 所以消耗的乘法数为 $M_2 = (2N-1)^2 = 4N^2 - 4N + 1$ 。对于步骤 3, 由于 n 存在 $2N-3$ 种取值的可能所以消耗的乘法数为 $M_3 = 14(2N-3)$ 。

综上所述, 本文提出的 VFD 滤波器系数配置方法共消耗 $M_1 + M_2 + M_3 = 4N^2 + 27N - 43$ 次乘法(即乘法计算量 $\propto N^2$)。比较而言, 对于文献[12-14]所提出的 WLS 设计, 尽管这些文献中没有对其系数配置复杂度做定量分析, 但调研发现这些文献的系数配置都需求解线性方程 $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$, 其中 \mathbf{A} 是通过 WLS 优化准则得到 $N \times N$ 的矩阵, 其矩阵求逆操作 \mathbf{A}^{-1} 所消耗的乘法计算量 $\propto N^3$ 。因而本文设计的计算复杂度远低于 WLS 优化法。

4 性能分析

4.1 VFD 滤波器与全相位滤波器的关系

众所周知, 三次样条插值能够保证在任何相邻区间内曲线连续。故在区间 $t \in [n-1, n)$ 和 $t \in [n, n+1)$ 的连接点 $t = n$ 处, 插值多项式 $g_n(t)$, $g_{n-1}(t)$ 应满足

$$g_n(t)|_{t=n} = g_{n-1}(t)|_{t=n} \Rightarrow g_n(n) = g_{n-1}(n) = g(n) \quad (21)$$

结合式(21)与式(15), 式(19)可知, 截掉两个边界系数 $g(-N+1), g(N-1)$, 全相位滤波器 $g(n)$ 即对应图 1 中 Farrow 结构的子滤波器 $G_0(z)$ 。

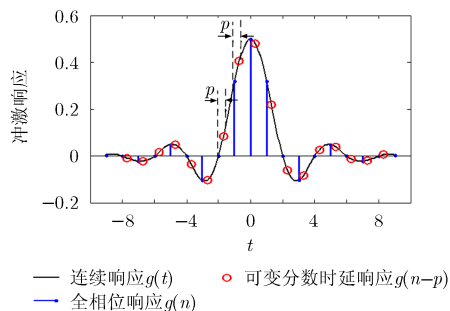


图3 3种冲激响应的关系

用 $\tilde{g}(n)$ 表示本方法设计出的 VFD 滤波器, 从前述的定义域拓展可推知: $g(n)$ 与 $\tilde{g}(n)$ 都可通过对连续冲激响应 $g(t)$ 做等间隔采样得到, 它们的采样点分别是 $t = n$ 与 $t = n + p$ (如图 3 所示), 由此可得

$$\tilde{g}(n) \approx g(n-p), \quad -0.5 \leq p \leq 0.5 \quad (22)$$

因此, VFD 滤波器 $\tilde{g}(n)$ 近似为全相位滤波器 $g(n)$ 分数时延后的版本。

4.2 截止频率和群时延的可变性

根据傅里叶变换性质, 从式(22)可推知 $\tilde{g}(n)$, $g(n)$ 的传输特性 $\tilde{G}(j\omega)$, $G(j\omega)$ 应满足

$$\tilde{G}(j\omega) \approx e^{-j\omega p} G(j\omega) \quad (23)$$

因此, 理论上 $\tilde{G}(j\omega)$ 是 $G(j\omega)$ 相移后的版本, 两者的幅度传输特性是一致的。

从式(23)中可推知, 在通带内, $\tilde{G}(j\omega)$, $G(j\omega)$ 的相位特性 $\tilde{\varphi}(\omega)$, $\varphi(\omega)$ 应满足

$$\tilde{\varphi}(\omega) \approx -p\omega + \varphi(\omega), \quad \omega \in [0, \omega_c] \quad (24)$$

因此, 它们的群时延 $\tilde{\tau}(\omega)$ 与 $\tau(\omega)$ (为 $\tilde{\varphi}(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 的导数)满足

$$\tilde{\tau}(\omega) \approx -\frac{d\tilde{\varphi}(\omega)}{d\omega} = p - \tau(\omega) \quad (25)$$

如 3.1 节所述, 全相位滤波器的群时延 $\tau(\omega)$ 等于 0, 因此可得到

$$\tilde{\tau}(\omega) \approx p, \quad \omega \in [0, \omega_c] \quad (26)$$

故而 $\tilde{G}(j\omega)$ 的群时延可通过参数 p 灵活调节。

5 仿真实验

5.1 幅频响应仿真

令输入参数 $p = 0.3, N = 10, \omega_c = 0.5\pi$ (由式(11)可算得 $K = 3$), $w_c(n)$ 为汉宁单窗卷积窗。图 4 给出了本文方法设计的 VFD 滤波器的幅度传输曲线 $|\tilde{G}(j\omega)|$ 以及原全相位滤波器的幅频曲线 $|G(j\omega)|$ 。

从图 4 可看出, $|\tilde{G}(j\omega)|$ 与 $|G(j\omega)|$ 几乎是重叠的 ($|\tilde{G}(j\omega)|$ 仅轻微地偏离频率采样点, 该小偏离由 4.1 节提及的边界截断引起), 这验证了 4.2 节得出的两者幅度响应一致的结论, 从而保证了群时延的理论特性。

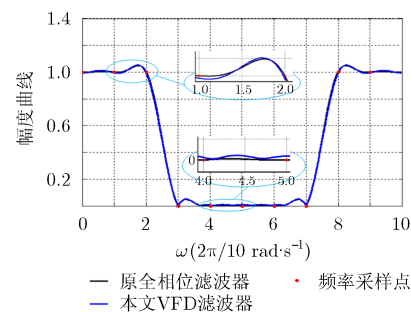


图4 原全相位滤波器和本文 VFD 滤波器的传输曲线

5.2 相频响应仿真

令输入参数 $p = 0.3, N = 10, \omega_{\text{cut}} = 0.6\pi, w_c(n)$ 为汉宁单窗卷积窗。图 5 给出了 VFD 滤波器的群时延曲线与理想群时延曲线 $\tau(\omega) = -p\omega$ 。可以看出，实际群时延曲线与理想曲线在通带几乎完全重合。从而验证了 4.2 节中的式(26)的正确性。

5.3 不同截止频率 ω_{cut} 下和不同群时延参数 p 的群时延误差变化

表 2 给出了截止频率 ω_{cut} 取为单调递增的 6 个值所对应的群时延误差 $\Delta\tau$ 的测试数据。

表 2 不同截止频率 ω_{cut} 的群时延误差($p=0.3, N=20$)

ω_{cut}	0.4π	0.5π	0.6π	0.7π	0.8π	0.9π
$\Delta\tau$	0.0010	0.0027	0.0061	0.0131	0.0270	0.0542

从表 2 可看出，群时延误差随着截止频率 ω_{cut} 的升高而单调增加。特别地，当截止频率 $\omega_{\text{cut}} > 0.7\pi$ 时，群时延误差大于 0.015(即相对误差 $> 0.015/0.3 \times 100\% = 5\%$)，这证明了本文方法适用于设计具有中、低截止频率的可变分数时延滤波器。

进一步，表 3 给出了截止频率 ω_{cut} 固定为 0.5π ，群时延参数 p 取为单调递增的 7 个值所对应的群时延误差 $\Delta\tau$ 的测试数据。

从表 3 可看出，群时延误差普遍很小，最高值仅为 0.0027(所对应的相对误差仅为 $0.0027/0.2 \times 100\% = 1.35\%$)。究其原因，是因为截止频率 $\omega_{\text{cut}} = 0.5\pi$ 处于本设计所允许的中、低频范围内，其对应的连续冲激响应 $g(t)$ 比较平缓，适合于三次样条插值做逼近。

5.4 本设计与解析 WLS 设计的比较

本节对两种解析设计(本文设计与 WLS 设计^[14])的群时延误差进行比较。给定相同的时延参数 $p=0.3$ 和频率采样整数 $N = 18$ ，与 WLS 方法不同(其每个子滤波器耗费 $2N - 1 = 35$ 个抽头系数)，本文方法

仅耗费 $2N - 3 = 33$ 个抽头系数；另外，由于采用了 3 次样条插值($M = 3$)，本文方法子滤波器个数恒为 4，而 WLS 设计则需考虑不同的 M 值情况进行测试。其群时延测试误差如表 4 所示。

从表 4 中可总结出如下规律：

(1)各种截止频率情况下，本文方法的群时延误差均很小(处于 10^{-2} 级)，相比较而言，本文方法更适用于具有低、中截止频率(如 $\omega_{\text{cut}} = 0.3\pi, \omega_{\text{cut}} = 0.5\pi$)的 VFD 滤波器设计。

(2)WLS 方法仅仅在截止频率为高频值(如 $\omega_{\text{cut}} = 0.9\pi$)时具有较小的群时延误差，仅适合于截止频率为高频值的 VFD 滤波器设计。

与此相比，如前所述，本文方法的第 1 路子滤波器 $G_0(z)$ 为全相位滤波器，而不是单位脉冲响应滤波器，故完全不受此限制。

5.5 算法运行时间比较

本仿真实验在 Windows 8 和 MatlaR2013b 上运行，CPU 主频 3.2 GHz，内存 8 GB。设定 $p = 0.3, \omega_{\text{cut}} = 0.7\pi$ ，WLS 设计的 $M = 4$ ，将本文设计与 WLS 设计在不同滤波器阶数($N = 8, 9, \dots, 31$)情况下的算法运行时间进行比较，结果如图 6 所示。

从图 6 中可看出，WLS 方法耗费的时间随着滤波器阶数变大明显增加(从 8.03 s 升至 48.16 s)，而本文方法的运行时间曲线直观上几乎保持不变，大致都等于 4.80 s。这是因为，表 1 所列出的本文方法的设计步骤仅仅包含 4 个解析式的简单计算，完全没有涉及矩阵求逆操作；而 WLS 方法包含矩阵求逆运算，且求逆矩阵的尺寸随 N 值增大而变大，故其计算复杂度远远高于本文方法。

6 结论

本文提出一种低复杂度的可变分数时延滤波器解析设计方法，该方法将全相位滤波器的设计、三次样条插值与泰勒系数展开进行了有机的综合，实

表 3 不同截止频率 ω_c 的群时延误差($\omega_{\text{cut}} = 0.5\pi, N=20$)

p	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$\Delta\tau$	0.0027	0.0017	0.0000	0.0017	0.0027	0.0027	0.0016

表 4 两方法的群时延误差($p=0.3, N=18$)

$\omega_{\text{cut}} = 0.3\pi$		$\omega_{\text{cut}} = 0.5\pi$		$\omega_{\text{cut}} = 0.9\pi$			
本文算法($M=3$)	M WLS	本文算法($M=3$)	M WLS	本文算法($M=3$)	M WLS		
0.0005	2	2.1833	0.0010	2	0.2130	2	0.0125
	4	0.9023		4	0.2997	4	0.0001
	6	0.6538		6	0.3798	6	0.0000
	8	2.2082		8	0.5242	8	0.0000

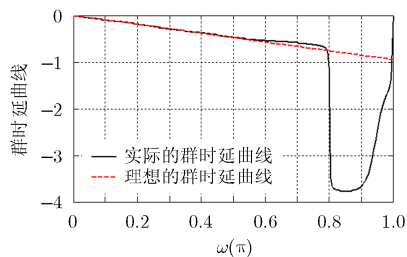


图5 VFD滤波器的群时延曲线

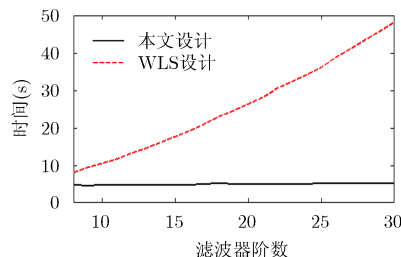


图6 两种设计在不同滤波器阶数时的运行时间

现了 Farrow 结构抽头系数的快速配置。理论分析和仿真实验都已证明, 本文方法兼顾了低复杂度、高灵活性(在调节群时延和截止频率两个性能方面)和高精度, 故本设计在采样频率转换、时延估计及雷达系统的波束形成等领域有较大的应用前景。

参考文献

- [1] 陈彩莲, 于宏毅, 沈彩耀, 等. 采样率转换中 Farrow 滤波器实现结构研究[J]. 信息工程大学学报, 2009, 10(3): 329-332.
CHEN Cailian, YU Hongyi, SHEN Caiyao, *et al.* Efficient implementation for sample rate conversion using Farrow structure[J]. *Journal of Information Engineering University*, 2009, 10(3): 329-332.
- [2] OLSSON M, JOHANSSON H, and LOWENBORG P. Time-delay estimation using Farrow-based fractional-delay FIR filters: Filter approximation vs. estimation errors[C]. European Signal Processing Conference, Florence, Italy, 2006: 1-5.
- [3] PEI Soochang and TSENG Chiencheng. A comb filter design using fractional-sample delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1998, 45(5): 649-653. doi: 10.1109/82.673650.
- [4] LIU Guosui and WEI Cheho. A new variable fractional sample delay filter with nonlinear interpolation[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1992, 39(2): 123-126. doi: 10.1109/82.205818.
- [5] DENG Tianbo. High-resolution image interpolation using lagrange-type variable fractional delay filter[C]. International Technical Conference on Circuits Systems, Computers and Communications, Chiang-Mai, 2006: 541-544.
- [6] 韦文, 李宁, 汤俊, 等. 基于分数时延的宽带自适应波束形成[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2011, 51(7): 988-992. doi: 10.16511/j.cnki.qhdxxb.2011.07.016.
WEI Wen, LI Ning, TANG Jun, *et al.* Wideband adaptive beamforming based on fractional delay[J]. *Journal of Tsinghua University(Natural Science)*, 2011, 51(7): 988-992. doi: 10.16511/j.cnki.qhdxxb.2011.07.016.
- [7] FARROW C W. A continuously variable digital delay element[C]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1988, Espoo, Finland, 3: 2641-2645. doi: 10.1109/ISCAS.1988.15483.
- [8] HAI Huyen Dam. Design of allpass variable fractional delay filter with powers-of-two coefficients[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(10): 1643-1646. doi: 10.1109/LSP.2015.2420652.
- [9] JOHANSSON H and HERMANOWICZ E. Two-rate based low-complexity variable fractional delay FIR filter structures [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, 60(1): 136-149. doi: 10.1109/TCSI.2012.2215697.
- [10] DENG Tianbo and SOONTORNWONG P. Delay-error-constrained minimax design of all-pass variable-fractional-delay digital filters[J]. *Signal Processing*, 2016, 120(C): 438-447. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.10.002.
- [11] DENG Tianbo. Coefficient-relation development and low-complexity odd-order variable-fractional-delay filter design[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(2): 1195-1208.
- [12] DENG Tianbo. Design and parallel implementation of FIR digital filters with simultaneously variable magnitude and non-integer phase-delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 2003, 50(5): 243-250. doi: 10.1109/TCSII.2003.809713.
- [13] DENG Tianbo and LIAN Yong. Weighted-least-squares design of variable fractional-delay FIR filters using coefficient symmetry[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(8): 3023-3038. doi: 10.1109/TSP.2006.875385.
- [14] HUANG Yunda, PEI Soochang, and SHYU Jongjy. WLS design of variable fractional-delay FIR filters using coefficient relationship[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2009, 56(3): 220-224. doi: 10.1109/TCSII.2008.2011598.
- [15] 黄翔东, 王兆华. 基于两种对称频率采样的全相位 FIR 滤波器设计[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(2): 478-481.
HUANG Xiangdong and WANG Zhaohua. All-phase FIR filter design based on two kinds of symmetric frequency sampling[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(2): 478-481.
- [16] HUANG Xiangdong, JING Senxue, WANG Zhaohua, *et al.* Closed-form FIR filter design based on convolution window

- spectrum interpolation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(5): 1173–1186. doi: 10.1109/TSP.2015.2494869.
- [17] HUANG Xiangdong, WANG Yuedong, YAN Ziyang, *et al.* Closed-form FIR filter design with accurately controllable cut-off frequency[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2017, 36(2): 721–741. doi: 10.1007/s00034-016-0330-7.
- [18] 黄翔东, 韩溢文, 闫子阳, 等. 基于全相位滤波的互素谱分析的高效设计[J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(1): 23–33. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2017.01.05.
- HUANG Xiangdong, HAN Yiwen, YAN Ziyang, *et al.* Efficient design of co-prime spectral analysis based on all-phase filtering[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(1): 23–33. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2017.01.05.
- [19] 黄翔东, 王越冬, 靳旭康, 等. 无窗全相位 FFT/FFT 相位差频移补偿频率估计器[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(5): 1135–1142. doi: 10.11999/JEIT151041.
- HUANG Xiangdong, WANG Yuedong, JIN Xukang, *et al.* No-windowed apFFT/FFT phase difference frequency estimator based on frequency-shift & compensation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(5): 1135–1142. doi: 10.11999/JEIT151041.
- [20] VASEGHI S V. *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2000: 305–306.
- 黄翔东: 男, 1979 年生, 博士, 副教授, 博士生导师, 研究方向为滤波器设计、频谱分析和信号处理等.
- 徐婧文: 女, 1994 年生, 硕士生, 研究方向为滤波器设计等.
- 张 博: 女, 1992 年生, 硕士生, 研究方向为滤波器设计等.
- 马 欣: 女, 1972 年生, 博士, 讲师, 研究方向为谱分析、信号处理等.