基于拉格朗日乘子法的二维修正 DFT 调制滤波器组设计算法

周 芳^{*102} 水鵬朗¹⁰ 蒋俊正⁸⁸ ¹⁰(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071) ²⁰(桂林电子科技大学生命与环境科学学院 桂林 541004) ³⁰(桂林电子科技大学信息与通信学院 桂林 541004)

摘 要:基于拉格朗日乘子法,该文提出一种2维修正离散傅里叶变换调制滤波器组的迭代设计方法。在每次迭代 中,原型滤波器的设计描述成一个约束为2次函数的2次规划问题。引入拉格朗日乘子法将问题转化为无约束的优 化问题,通过求解线性矩阵方程得到优化问题的解。针对矩阵方程中的系数矩阵的特点,运用块LU分解,显著降 低了运算复杂度。仿真实验表明,与现有的设计方法相比,该文方法设计得到的2维修正离散傅里叶变换调制滤波 器组的重构误差和阻带衰减均有较大的改善。

关键词: 2 维修正滤波器组;离散傅里叶变换调制;迭代优化;拉格朗日乘子法;块LU分解
 中图分类号: TN911.72
 文献标识码: A
 文章编号: 1009-5896(2017)05-1261-05
 DOI: 10.11999/JEIT160651

Design of Two-dimensional Modified DFT Modulated Filter Banks Based on Lagrange Multiplier Method

ZHOU Fang^{0,2} SHUI Penglang⁰ JIANG Junzheng[®]

⁽¹⁾(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

⁽²⁾(School of Life and Environmental Sciences, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China) ⁽³⁾(School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Base on Lagrange multiplier method, an iterative algorithm is proposed to design the two-dimensional modified Discrete Fourier Transform (DFT) modulated filter bank. In each iteration, the design problem is described as a Quadratically Constrained Quadratic Program (QCQP). The Lagrange multiplier method is then employed to transform the constrained problem into an unconstrained one, the solution of which is obtained by solving a set of linear equations. By analyzing the coefficient matrix, block LU factorization is applied to considerably reduce the computational complexity. Numerical results and comparison with the existing methods demonstrate the improved performance of the proposed scheme, including the reconstruction error and stopband attenuation.

Key words: Two-dimensional modified filter bank; DFT modulated; Iteration optimization; Lagrange multiplier method; Block LU factorization

1 引言

2维多速率滤波器组作为多维信号的多分辨分 析处理工具,广泛应用于图像、视频等多维信号处 理领域^[1-13]。其中,2维DFT调制滤波器组由于结构 简单和设计相对容易而备受关注,原因在于各子带 滤波器由原型滤波器经过调制产生,并且可采用多

基金项目: 国家自然科学基金(61261032)

相位结构快速实现。2维DFT调制滤波器组中各子带 滤波器(原型滤波器除外)的频率支撑位于2维频率 平面上的某一个象限,在处理复值信号方面表现出 独特的优势。目前,已提出了不少2维DFT调制滤波 器组的设计算法。文献[8]提出了一种基于改进牛顿 法的2维过采样DFT调制滤波器组设计算法,该算法 的计算量较大,主要体现在矩阵求逆和采用精确步 长两方面。在文献[8]的基础上,文献[9]提出了一种 快速设计算法,显著地降低了算法的计算复杂度。 然而,对于2维临界采样的DFT调制滤波器组,由于 阻带衰减和混叠消除两者之间存在冲突,无法获得

收稿日期: 2016-06-21;改回日期:2016-11-28;网络出版:2017-02-09 *通信作者:周芳 fangzhou@stu.xidian.edu.cn

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61261032)

良好的整体性能^[10]。为此,文献[11]构造了具有两级 采样结构的2维临界采样修正DFT调制滤波器组,同 时将滤波器组的设计归结为一个无约束的优化问 题,目标函数为滤波器组的重构误差。由于该算法 没有考虑原型滤波器的频率特性,得到的原型滤波 器的阻带特性较差。为了改善原型滤波器的频率特 性,文献[12]中的目标函数为滤波器重构误差和原型 滤波器阻带能量的加权和,运用迭代机制求解,设 计所得的滤波器组整体性能良好。

本文考虑线性相位的2维修正DFT调制滤波器 组设计,将设计问题归结为带2次约束的2次规划问 题,目标函数为原型滤波器的阻带能量,约束函数 为滤波器组的完全重构条件。由于完全重构条件是 关于原型滤波器系数的一组二次等式约束,优化问 题难于求解。为此,本文提出基于迭代思想的设计 算法,在每步迭代中运用拉格朗日乘子法,将带约 束的优化问题转化为无约束的优化问题。给定初始 的原型滤波器系数,通过求解线性矩阵方程来不断 更新原型滤波器系数。在线性矩阵方程求解过程中, 对对称矩阵运用块LU分解,显著降低计算复杂度。 经实验仿真发现,本算法设计得到的2维修正DFT 调制滤波器组的重构误差和阻带衰减均有较大改 善。

2 2 维修正 DFT 调制滤波器组

文献[10]中图 6.3 给出了一个通道数为 2*M*、采 样矩阵为 D_2 和调制矩阵为 $D_1 = D_2 D_3$ 的 2 维修正 DFT 滤波器组的基本结构,其中 $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。记

 $X(\omega), \overline{X}(\omega)$ 分别为输入信号和输出信号,2 维频率 向量为 $\omega = [\omega_x \ \omega_y]^T$ 。设原型滤波器的脉冲响应为 $h(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in [-L, L]^2$,对应的频率响应为 $H(\omega)$ 。对原 型滤波器进行2维DFT调制得到分析或者综合滤波 器 $H_i(\omega), G_i(\omega)(i = 0, 1, \dots, 2M - 1)^{[1]}$ 。

$$g_{i}(\boldsymbol{n}) = h_{i}(\boldsymbol{n}) = h(\boldsymbol{n}) \exp\left(j2\pi\boldsymbol{u}_{i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{1}^{-1}\boldsymbol{n}\right),$$
$$\boldsymbol{u}_{i} \in N\left(\boldsymbol{D}_{1}^{\mathrm{T}}\right)$$
$$(1)$$
$$G\left(\boldsymbol{\omega}\right) = H\left(\boldsymbol{\omega}\right) = H\left(\boldsymbol{\omega}\right) - 2\pi\boldsymbol{D}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{i}(\boldsymbol{\omega}) &= \boldsymbol{\Pi}_{i}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{D}_{1}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_{i}\right) \\ \textbf{I} \quad \textbf{T} \quad \textbf{P} \quad \textbf{,} \quad \textbf{R} \quad \pounds \quad N(\boldsymbol{D}_{1}^{\mathrm{T}}) = \{\boldsymbol{u}_{i} \equiv \boldsymbol{D}_{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{i} \in Z^{2} : \boldsymbol{x}_{i} \in [0,1)^{2}, \end{aligned}$$

 $i = 0, 1, \dots, |D_1| - 1$, $|D_1|$ 为矩阵 D_1 的行列式的绝对 值,符号 Z^2 代表2维整数集合。

系统的输出信号可表示为

$$X(\boldsymbol{\omega}) = T_0(\boldsymbol{\omega})X(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{k=1}^{|\boldsymbol{D}_2|-1} T_k(\boldsymbol{\omega})X(\boldsymbol{\omega} - 2\pi\boldsymbol{D}_2^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k), \boldsymbol{v}_k \in N(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}) \quad (2)$$

式中,传递函数 $T_0(\boldsymbol{\omega})$ 由式(3)定义:

$$T_0(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\boldsymbol{D}_1|} \sum_{i=0}^{|\boldsymbol{D}_1|-1} H_i^2(\boldsymbol{\omega})$$
(3)

混叠传递函数 $T_k(\boldsymbol{\omega}), k=1,2,\cdots, |\boldsymbol{D}_2|-1$ 由式(4)定义:

$$T_{k}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\boldsymbol{D}_{2}|} \sum_{i=0}^{|\boldsymbol{D}_{1}|-1} H\left(\boldsymbol{\omega} - 2\pi \boldsymbol{D}_{1}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{i} - 2\pi \boldsymbol{D}_{2}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_{k}\right)$$
$$\cdot H\left(\boldsymbol{\omega} - 2\pi \boldsymbol{D}_{1}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{i}\right)$$
(4)

完全重构的 2 维滤波器组应满足条件: 传递函数 $T_0(\omega)$ 为纯延迟且所有的混叠传递函数 $T_k(\omega), k =$ 1,2,…, $|D_2|-1$ 为零。当条件近似满足时,该滤波器 组是近似完全重构的。在图像处理等实际应用中, 期望滤波器组具有线性相位。故本文考虑线性相位 的 2 维修正 DFT 调制滤波器组的设计。

3 修正 DFT 调制滤波器组的设计

3.1 原型滤波器的设计

2 维调制滤波器组的设计关键在于原型滤波器的设计,其性能好坏直接决定滤波器组的整体性能。本文考虑原型滤波器的阻带特性和滤波器组的重构特性^[10]。由于原型滤波器是线性相位的,即满足对称条件h(n) = h(-n),其频率响应可表示为^[8]

$$H(\boldsymbol{\omega}) = h(0,0) + 2\sum_{n_y=1}^{L} h(0,n_y) \cos\left(\left[0,n_y\right]\boldsymbol{\omega}\right) + 2\sum_{n_x=1}^{L} \sum_{n_y=-L}^{L} h(\boldsymbol{n}) \cos\left(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega},L) \quad (5)$$

式中,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} h(0,0), 2h(0,1), \cdots, 2h(0,L), \\ 2h(1,-L), \cdots, 2h(L,L) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(6)
$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega},L) = \begin{bmatrix} 1, \cos\left([0,1]\boldsymbol{\omega}\right), \cdots, \cos\left([0,L]\boldsymbol{\omega}\right), \end{bmatrix}$$

$$\cos\left([1, -L]\boldsymbol{\omega}\right), \cdots, \cos\left([L, L]\boldsymbol{\omega}\right)\right]^{\mathrm{T}}$$
(7)

阻带衰减由原型滤波器的阻带能量来定义,表 示为关于原型滤波器系数 *x* 的 2 次函数

$$E_{s}(\boldsymbol{x}) = \iint_{\boldsymbol{\Omega}_{S}} |H(\boldsymbol{\omega})|^{2} d\boldsymbol{\omega}$$
$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \iint_{\boldsymbol{\Omega}_{S}} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega}, L) \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}, L) d\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{s} \boldsymbol{x} \quad (8)$$

式中,阻带区域定义为

$$\boldsymbol{\Omega}_{S} \triangleq \left\{ \boldsymbol{\omega} \in [-\pi, \pi]^{2}, \boldsymbol{D}_{2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\omega} \notin (1+\varepsilon)[-\pi, \pi]^{2} \right\}, \varepsilon \geq 0 \quad (9)$$

文献[12]中的性质 3.1 详细阐述了 2 维修正 DFT 调制滤波器组的完全重构条件为关于滤波器系数 *x* 的一组 2 次等式方程,采取矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{10}$$

式中,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{a}_{0,0}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_{1,0}^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(|\boldsymbol{D}_{2}|-1)/2,0}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_{0,1}^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{(|\boldsymbol{D}_{2}|-1)/2,\#\boldsymbol{\Psi}_{1}-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$
(11)

$$\boldsymbol{a}_{k\,i} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r}_{i}) \boldsymbol{U}_{k} \boldsymbol{F}$$
(12)

$$\boldsymbol{b} = \left[\underbrace{\frac{1}{|\boldsymbol{D}_2|, 1/|\boldsymbol{D}_2|, \cdots, 1/|\boldsymbol{D}_2|}_{(|\boldsymbol{D}_2|+1)/2}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(\#\boldsymbol{\Psi}_1 - 1)(|\boldsymbol{D}_2|+1)/2}}_{(\#\boldsymbol{\Psi}_1 - 1)(|\boldsymbol{D}_2|+1)/2} \right]^{\mathrm{T}} (13)$$

其中,矩阵 $U_k, \Gamma(r), F$ 和集合 Ψ_1 的定义参考文献 [12],符号# Ψ_1 表示集合 Ψ_1 的元素个数。由式(11) 可知,矩阵A(x)共包括 $N = #\Psi_1 \cdot (|D_2|+1)/2$ 行, 当设计的滤波器组通道数很多(即 $|D_2|$ 很大)或者原 型滤波器长度很长(即 # Ψ_1 很大)时,A(x)维数很 高,直接计算很耗时。仔细分析A(x)结构,发现A(x)的计算不涉及任何矩阵向量相乘运算,具体运算过 程略。

根据上述性能指标,原型滤波器的设计描述为: 目标函数为原型滤波器的阻带能量,约束函数为滤 波器组的完全重构条件的带约束的优化问题

$$\begin{array}{c} \min_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{s} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array} \right\}$$
(14)

优化问题式(14)是一个非凸的 2 次约束 2 次优化问题(Qaudratically Constrained Qaudratic Program, QCQP),其约束函数是关于原型滤波器系数的 2 次等式方程,是一个 NP-hard 问题。可以采用迭代方法^[13]近似求解。

假设给定原型滤波器的初始值 x_0 , $A(x_0)$ 的值 也确定,约束 $A(x_0)x = b$ 就变成线性的,可利用拉 格朗日乘子法求解问题式(14)。拉格朗日函数由式 (15)表示

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{s} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{0}) \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \right)$$
(15)

式中, λ 为拉格朗日乘子列矢量,维度为 $N \times 1$ 。对式(15)关于变量x和 λ 分别求导,并令导数为零,得到式(16):

$$2\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$$
(16a)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{16b}$$

引入矢量 $y = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$,式(16a)和式(16b)可以统一地表

示为关于矢量 y 的线性矩阵方程。

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{d} \tag{17}$$

式中,
$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{Q}_s \ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0) \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0) \ \boldsymbol{0}_1 \end{bmatrix}$$
和 $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_2 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ 。其中, $\boldsymbol{0}_1$ 和 $\boldsymbol{0}_2$

分别表示 $N \times N$ 零矩阵和 $(2L^2 + 2L + 1) \times 1$ 零矢量。 综上分析,式(17)的迭代求解过程可简单地表述为: 给定初始值 x_0 ,首先计算R和d,然后利用式(17) 求出y和x。重复此过程,直到 $||x - x_0||_2$ 小于预先 给定的数。

下面,我们采用块 LU 分解^[4]来进一步降低求 解式(17)的计算复杂度。假设矩阵 R 的块 LU 分解 表示为 R = LU,其中 L 和U 分别为下三角矩阵和 上三角矩阵

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{0}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix}$$
(18)

式中, **0**₃为(2L²+2L+1)×N零矩阵。将式(18)代 入矩阵**R**得到式(19)~式(21)

$$\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{U}_{11} = \boldsymbol{2}\boldsymbol{Q}_s \tag{19}$$

$$\left(\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{U}_{12}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}_{21}\boldsymbol{U}_{11} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{0})$$
(20)

$$\boldsymbol{L}_{21}\boldsymbol{U}_{12} + \boldsymbol{L}_{22}\boldsymbol{U}_{22} = \boldsymbol{0}_1 \tag{21}$$

首先,通过对对称的正定矩阵 $2Q_s$ 进行 Cholesky 分 解求得 L_{11} ,从而 $U_{11} = L_{11}^{T}$ 。由于 Q_s 与变量 x 无关, 因此, Cholesky 分解只需进行一次。其次,由式(20) 可得 $L_{21} = U_{12}^{T}$ 。因此 $L_{21}U_{12} = U_{12}^{T}U_{12}$ 是对称的正定 矩阵,同样进行 Cholesky 分解得到下三角矩阵和上 三角矩阵。不失一般性,记为 $L_{21}U_{12} = U_{12}^{T}U_{12}$ = $L_{22}L_{22}^{T}$,最后根据式(21)得出 $U_{22} = -L_{22}^{T}$ 。

令
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix}$$
(其中 \boldsymbol{z}_1 维度为 (2 $L^2 + 2L + 1$)

×1, z_2 维度为 $N \times 1$),因此 Lz = d。根据式(18) 可知, z_1 为零向量, z_2 可通过 $L_{22}z_2 = b$ 求解得到。 进而,由 Uy = z 和式(18)可得式(22)和式(23)

$$\boldsymbol{L}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{22}$$

$$-\boldsymbol{L}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{z}_{2} \tag{23}$$

最终,通过式(22)和式(23),求解出每步迭代中原型 滤波器的系数 x。

综上所述,本文基于拉格朗日乘子法的两维修 正 DFT 调制滤波器组的设计步骤如下:

第 1 步 设定相关参数,包括原型滤波器的长度 *L*,采样矩阵 *D*₂。

第 2 步 利用最小均方算法^[8]设计长度为 $2L^2$ +2L+1的初始原型滤波器 x_0 。

第3步 计算**Q**_s, **A**(**x**₀)和**b**,根据式(19)~式 (21)得到矩阵**L**和**U**。

第 4 步 根据式(22)和式(23)更新原型滤波器 的系数 *x*。

第5步 判断条件($\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \|_2 < \eta$, η 是给定的 很小的正数)是否满足。如果满足,终止迭代,输出 最终解 \boldsymbol{x} ; 否则, 令 $\boldsymbol{x}_0 = \gamma \boldsymbol{x}_0 + (1 - \gamma) \boldsymbol{x} (0 < \gamma < 1)$, 返回到第3步继续迭代。

3.2 算法复杂度分析

本文算法迭代过程中涉及 Cholesky 分解、矩阵

求逆和矩阵向量相乘运算。经过分析,可以得出本 文算法的计算复杂度为 $O(M^3 + N^3)$,其中 $M = 2L^2$ +2L+1。文献[12]也是迭代算法,迭代计算公式为 $x = (A^T(x_0)A(x_0) + 0.5\alpha Q_s)^{-1}A^T(x_0)b$,其中 $A(x_0)$ 维数为 $N \times (2L^2 + 2L + 1)$,b 维数为 $N \times 1$, Q_s 维数 为 $(2L^2 + 2L + 1) \times (2L^2 + 2L + 1)$ 。因此,文献[12]的 计算复杂度为 $O(M^3)$ 。对于文献[11]而言,其利用 MATLAB 自带的函数 fminune 求解无约束优化问 题。虽然该函数 fminune 采用置信域或拟牛顿法求 解,但是每次迭代中,都需要多次数值计算梯度向 量和 Hesse 矩阵来确定最优的下降方向和步长,大 大地增加了计算开销,也使得文献[11]算法的计算复 杂度难以度量。后续的仿真表明,文献[11]的计算代 价明显大于文献[12]算法和本文算法。

4 仿真结果与分析

在本节中,我们给出算法设计实例,并将本文的算法与现有的算法比较,进行性能分析。为了保证比较的公平性,在仿真实例中不同算法采样相同的初始原型滤波器,并且运行环境均为英特尔i7-2640 CPU,4 GB内存的计算机。滤波器组的性能指标包括:(1)滤波器组的重构误差RE:输入信号(零均值、单位方差的高斯白噪声)和重构信号之间的均方误差;(2)滤波器组的完全重构失真PRD:PRD= $||A(x)x - b||_2$;(3)原型滤波器的最大阻带衰减SA: 在松弛的阻带区域^[15]中(式(9)中,取 $\varepsilon = 0.3$),原型滤波器归一化幅度响应的最大值。

例1设计一个2维线性相位的修正DFT调制滤 波器组,参数设置与文献[12]中例2相同。

$$\boldsymbol{D}_{2} = \begin{bmatrix} 5 & 0\\ 5 & -5 \end{bmatrix}, \ L = 8, \ \eta = 3 \times 10^{-4}, \ \gamma = 0.7$$
 (24)

分别利用文献[11]、文献[12]和本文算法进行设 计。本文算法迭代次数为 154 次,每次迭代的平均 时间仅为 0.068 s,得到原型滤波器的冲激响应和幅 度响应如图 1(a)和图 1(b)所示。表 1 对这 3 种方法 所设计的滤波器组进行性能比较。不难发现,相比 于文献[11]、[12]的算法,本文算法设计的滤波器组 具有较好的整体性能。一方面,与文献[11]相比,本 文算法所需的计算复杂度明显小,这进一步印证了 3.2节的算法复杂度分析结果。并且设计所得的原型 滤波器具备更低的阻带衰减,原因在于本文将阻带 衰减作为优化的性能指标,而文献[11]并未考虑。另 一方面,与文献[12]相比,本文算法设计所得的滤波 器组重构误差改善了约10dB。同时本文算法中无需 调节参数,而文献[12]的目标函数为滤波器组重构误 差和原型滤波器阻带能量的加权和,为了达到性能上 的折中,需要手动调节权值,难以平衡各性能指标。

5 结束语

本文围绕2维修正DFT调制滤波器组的设计问题,提出了一种有效的迭代设计算法。考虑到带约束的优化问题求解困难,为了得到对应的无约束的优化问题,运用拉格朗日乘子法进行转化。在解线性矩阵方程的过程中,运用块 LU 分解,显著降低了求解的计算量。仿真实验表明,相比于现有的设计算法相比,本算法设计得到的2维修正DFT 调制滤波器组具备更好的整体性能,而且算法拥有低的计算复杂度,适用于较大规模系统的设计。

设计算法	$\operatorname{RE}(\operatorname{dB})$	PRD	SA(dB)	CPU 时间(s)
文献[11]算法	-72.43	2.37×10^{-5}	-14.58	5335.23
文献[12]算法	-51.73	2.57×10^{-4}	-18.04	182.82
本文算法	-61.34	8.55×10^{-5}	-18.29	126.53

表1 例1中本文算法与现有算法的性能比较



图 1 例 1 中本文设计方法得到的原型滤波器

参考文献

- VAIDYANATHAN P P. Multirate Systems and Filter Banks[M]. Englewood Cliffs, NJ, US, Prentice-Hall, 1993: 545–650.
- [2] 江淮,赵惠昌,汉敏,等.基于DFT滤波器组的大斜视SAR成 像算法[J].电子与信息学报,2016,38(1):104-110.doi: 10.11999/JEIT150381.

JIANG Huai, ZHAO Huichang, HAN Min, *et al.* Highly squint SAR imaging algorithm based on DFT filter banks[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(1): 104–110. doi: 10.11999/JEIT150381.

[3] 周祚峰,曹剑中,程源源,等.新的方向滤波器组及其在图像去噪中的应用[J].光子学报,2010,39(2),380-384. doi: 10.3788/gzxb20103902.0380.
 ZHOU Zuofeng, CAO Jianzhong, CHENG Yuanyuan, et al.

New directional filter bank and its application in image denoising[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, 39(2): 380–384. doi: 10.3788/gzxb20103902.0380.

- [4] SUZUKI T and KUDO H. Two-dimensional non-separable block-lifting structure and its application to M-channel perfect reconstruction filter banks for lossy-to-lossless image coding[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(12): 4943–4951. doi: 10.1109/TIP.2015.2472294.
- [5] GAWANDE J P, RAHULKAR A D, and HOLAMBE R S. Design of new class of regular biorthogonal wavelet filter banks using generalized and hybrid lifting structures[J]. Signal Image and Video Processing, 2015, 9(1): 265–273. doi: 10.1007/s11760-015-0814-0.
- [6] 蒋俊正,程小磊,欧阳缮.双原型离散傅里叶变换调制滤波器 组的快速设计方法[J].电子与信息学报,2015,37(11): 2628-2633. doi: 10.11999/JEIT150298.
 JIANG Junzheng, CHENG Xiaolei, and OUYANG Shan. Fast design of double-prototype discrete fourier transform modulated filter banks[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2015, 37(11): 2628-2633. doi: 10.11999/JEIT150298.
- [7] JIANG J Z, ZHOU F, SHUI P L, et al. Theory and design of two-dimensional DFT modulated filter bank with arbitrary modulation and decimation matrices[J]. *Digital Signal Processing*, 2015, 44(1): 123–130. doi: 10.1016/j.dsp.2015.

05.012.

- [8] JIANG J Z and SHUI P L. Design of 2D oversampled linear phase DFT modulated filter banks via modified Newton's method[J]. Signal Processing, 2012, 92(6): 1411–1421. doi: 10.1016/j.sigpro.2011.11.029.
- [9] ZHOU F, JIANG J Z, and SHUI P L. Fast design of 2D fully oversampled DFT modulated filter bank using Toeplitz-block Toeplitz matrix inversion[J]. Signal Processing, 2015, 111: 194–198. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.12.021.
- [10] 蒋俊正. DFT调制滤波器组的设计算法研究[D]. [博士学位论 文],西安电子科技大学,2011:81-106.
 JIANG Junzheng. Design algorithms of DFT modulated filter banks[D]. [Ph.D. dissertation], Xidian University, 2011: 81-106.
- [11] SHUI P L and JIANG J Z. Two-dimensional 2× oversampled DFT modulated filter banks and critically sampled modified DFT modulated filter banks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(11): 5597–5611. doi: 10.1109/TSP.2010. 2059016.
- [12] JIANG J Z and ZHOU F. Iterative design of two-dimensional critically sampled MDFT modulated filter banks[J]. Signal Processing, 2013, 93(11): 3124–3132. doi: 10.1016/j.sigpro. 2013.03.022.
- [13] ZHANG Z J and Yang Y. Efficient iterative design of modified DFT filter banks[J]. *Electronics Letters*, 2011, 47(15): 846–847. doi: 10.1049/el.2011.1450.
- [14] HIGHAM N J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms[M]. Philadelphia, PA, US, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002: 245–258.
- [15] LU W S, ANTONIOU A, and XU H. A direct method for the design of 2-D nonseparable filter banks[J]. *IEEE Transactions* on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 1998, 45(8): 1146–1150. doi: 10.1109/82.718828.
- 周 芳: 女,1984年生,博士生,讲师,研究方向为多速率滤波器组的设计及应用.
- 水鹏朗: 男,1967年生,教授,博士生导师,研究方向为多速率 滤波器组与图像处理、海杂波背景下的雷达目标检测.
- 蒋俊正: 男,1983年生,副教授,硕士生导师,研究方向为多速 率滤波器组理论与应用、通信信号处理.