

基于二维不可分小波变换的矩不变量

刘斌 高强*

(湖北大学计算机与信息工程学院 武汉 430062)

摘要: 寻找相对于尺度、平移、旋转不变的小波不变量是多尺度分析在模式识别中应用的关键性问题。该文利用基于统计的不变矩这一理论和应用上都比较成熟的方法, 将图像有限个尺度的小波近似系数和图像不变矩联系起来, 从而给出了一种小波矩不变量, 得到了比较完善的理论和实验结果。同时指出了该理论方法在实际应用中所需注意的地方, 最后简要阐述了多尺度分析与不变矩的应用关系。

关键词: 模式识别; 多尺度分析; 2 维不可分小波; 不变矩; 平滑性; 近似系数

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)08-2085-06

DOI: 10.11999/JEIT151218

Moment Invariants Based on Two Dimensional Non-separable Wavelet Transform

LIU Bin GAO Qiang

(School of Computer and Information Engineering, Hubei University, Wuhan 430062, China)

Abstract: Searching for wavelet invariants is a key issue in multiresolution analysis. On the other hand, the method of moment invariants is fully developed both in the theory and the practice. A kind of wavelet moment invariants are given based on the image invariant moments and wavelet approximation coefficients from the limited number of scales of the image. A fairly complete result on theory and experiment is obtained. At the same time, some problems of the theory and method are pointed out in the practical application. Finally, the application relationship between multi-scale analysis and invariant moment is briefly described.

Key words: Pattern recognition; Multi-scale analysis; Two dimensional non-separable wavelet; Invariant moment; Smoothness; Approximation coefficients

1 引言

在信号及图像处理中, 多尺度分析的思想由来已久, 文献[1]提出了基于 LAPALACE 金字塔式的分解从而进行多尺度的特征提取与识别, 但金字塔分解后各层数据的相关性影响了它的性能。随着小波理论^[2]的发展, 文献[2]基于小波的塔式分解算法使各层的细节相对独立而具有良好的应用。由小波及其多分辨率分析理论^[3,4]可知, 一幅图像可分解为按尺度分辨率逐级降低的近似信息和细节信息, 各个尺度的细节信息表示它不同的物理结构, 而近似信息表示其总体轮廓, 基于此理论上我们可从大尺度上分析图像然后逐层细化识别, 即所谓多尺度识

别。多尺度识别的关键是找到待识别模式在有限个尺度下相对于平移、尺度、旋转变化的不变量, 这正是不变矩所具备的特性, 据此可利用不变矩理论表征这种不变量。

不变矩理论从 1 维到多维都有比较成熟的理论和方法, 可从目标图像中提取不变矩作为特征进行目标的正确识别和图像匹配等方面的应用^[5]。文献[6]利用代数不变量理论首次给出了 2 维不变矩的表示, 其中阶数小于 3 的 7 个具有平移、旋转和尺度不变性的不变矩是应用的基础。矩(中心矩)实际上反映物体灰度相对于质心的统计分布情况, 计算量大而且高阶矩受噪声影响较大一直困扰着矩方法, 这是矩对信号进行全局化处理造成的, 为减小计算量人们也提出了一些改善的方法^[7]。另一方面, 图像上物体可由各个不同相关联的结构组成, 而图像的灰度信息只在各结构之间局部地相关着, 而与其较远的结构关系不大, 就单个图像像素而言它也只与附近一定范围内的像素具有较强相关性, 而与其距离越远的像素越无相关性以至于几乎不相关。受 Fourier 变换局部化的启示, 希望能将反映相关信息

收稿日期: 2015-11-03; 改回日期: 2016-05-03; 网络出版: 2016-06-12

*通信作者: 高强 shengqiang8814@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金(61471160), 湖北省自然科学基金(2012FFA053)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61471160), The Key Project of the Natural Science of Hubei Province (2012FFA053)

的矩方法也分层局部化，具有“数学显微镜”之称的局部化分析工具小波是一种理想的选择。

在 Fourier 分析的基础上发展起来的小波分析在 1 维及其张量积形式情形下都有比较成熟的理论和方法，但利用张量积小波对 2 维图像及更高维信号进行处理，由于其人为的方向性的处理方式显然具有很大的缺陷。由此产生了 2 维非张量积的小波理论，并已有一些相关的理论和应用研究 [8-10]，但其总体的理论和应用远不及 1 维小波那样成熟。文献[11]阐明了 1 维及 2 维张量积的小波矩不变量。本文在现有 2 维非张量积(不可分)小波理论的基础上，结合不变矩的理论和方法从理论上进行推广和拓展得到了在 2 维不可分情形下的小波矩不变量。同时进行了相应的数值验证工作。此矩不变量比基于原图像的矩值计算量大幅减小，同时继承了不可分小波变换和不变矩的一些优点而使其能够更好地应用于模式识别领域。

2 2 维不可分小波变换及其多分辨率分析理论

假设 $\psi(x, y) \in L^2(R^2)$ 为 2 维母小波函数，2 维不可分小波变换存在一个抽样矩阵 A ，这里仅讨论 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的情形，令 $a = \det(A)$ ，则 $\psi_{a,s,t}(x, y) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-s}{a}, \frac{y-t}{a}\right)$ 对于 $f(x, y) \in L^2(R^2)$ ，其 2 维小波变换的定义为

$$W_f(a, s, t) = \langle f(x, y), \psi_{a,s,t}(x, y) \rangle = \frac{1}{a} \iint f(x, y) \psi\left(\frac{x-s}{a}, \frac{y-t}{a}\right) dx dy$$

其中 $\psi(x, y)$ 的 Fourier 变换 $\hat{\psi}(u, v)$ 需满足 $C_\psi = \iint_R \frac{|\hat{\psi}(u, v)|^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv < \infty$ 。

2 维不可分的多分辨率分析可从相应的 1 维的多分辨率分析作推广而得，具体是指在 $L^2(R^2)$ 中有一串嵌套的闭子空间逼近序列 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 满足下列条件：

(1) $\dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subseteq L^2(R^2), \cap V_j = \{0\}, \cup V_j = L^2(R^2)$;

(2) $V_j = \text{span}\{\phi_{j,s,t}(x, y) \mid \phi_{j,s,t}(x, y) = 2^j \phi(2^j x - s, 2^j y - t), s, t \in Z\}$;

(3) $\phi(x, y) = 2 \sum_{m,n} h_{m,n} \phi(2x - m, 2y - n), h_{m,n} \in l^2 = \left\{ h_{m,n} \mid \sum_m \sum_n |h_{m,n}|^2 < \infty \right\}$ (1)

(4) $\{\phi(x - s, y - t)\}$ 是 V_0 的 2 维 Riesz 基。

其中 $\phi(x, y)$ 为 2 维多分辨率分析的尺度函数，式(1)为其双尺度方程。对任意 $j \in Z$ ， $W_j = V_{j+1} / V_j$ ，按文献[12] $W_j = W_j^1 \oplus W_j^2 \oplus W_j^3, V_0 \oplus W_0 = V_1$ ，故 $W_0 = W_0^1 \oplus W_0^2 \oplus W_0^3 \subset V_1$ ，假设有 $\psi^1(x, y) \in W_0^1, \psi^2(x, y) \in W_0^2, \psi^3(x, y) \in W_0^3$ ，其都可由 V_1 的基函数表示为

$$\psi^1(x, y) = 2 \sum_{m,n} g_{m,n}^1 \phi(2x - m, 2y - n) \quad (2)$$

$$\psi^2(x, y) = 2 \sum_{m,n} g_{m,n}^2 \phi(2x - m, 2y - n) \quad (3)$$

$$\psi^3(x, y) = 2 \sum_{m,n} g_{m,n}^3 \phi(2x - m, 2y - n) \quad (4)$$

W_j^1, W_j^2, W_j^3 对应的基函数分别为 $\psi_{j,s,t}^1(x, y), \psi_{j,s,t}^2(x, y), \psi_{j,s,t}^3(x, y)$ ，则有

$$W_j^1 = \text{span}\{\psi_{j,s,t}^1(x, y) = 2^j \psi^1(2^j x - s, 2^j y - t), s, t \in Z\}$$

$$W_j^2 = \text{span}\{\psi_{j,s,t}^2(x, y) = 2^j \psi^2(2^j x - s, 2^j y - t), s, t \in Z\}$$

$$W_j^3 = \text{span}\{\psi_{j,s,t}^3(x, y) = 2^j \psi^3(2^j x - s, 2^j y - t), s, t \in Z\}$$

由上述多分辨率分析有 $L^2(R^2) = V_j \oplus W_j \oplus W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus \dots$ ，将函数 $f(x, y) \in L^2(R^2)$ 作 2 维不可分小波分解得 $f(x, y) = A_j + \sum_{l \geq j} (D_l^1 + D_l^2 + D_l^3)$ ，

其中 $l = S - 1 + j$ ， S 为分解尺度数。

$$A_j = \sum_{m,n} a_{m,n}(j) \phi_{j,m,n}(x, y), a_{m,n}(j) = \langle f(x, y), \phi_{j,m,n}(x, y) \rangle$$

$$D_l^1 = \sum_{m,n} d_{m,n}^1(l) \psi_{l,m,n}^1(x, y), d_{m,n}^1(l) = \langle f(x, y), \psi_{l,m,n}^1(x, y) \rangle$$

$$D_l^2 = \sum_{m,n} d_{m,n}^2(l) \psi_{l,m,n}^2(x, y), d_{m,n}^2(l) = \langle f(x, y), \psi_{l,m,n}^2(x, y) \rangle$$

$$D_l^3 = \sum_{m,n} d_{m,n}^3(l) \psi_{l,m,n}^3(x, y), d_{m,n}^3(l) = \langle f(x, y), \psi_{l,m,n}^3(x, y) \rangle$$

对双尺度方程式(1)两边作 Fourier 变换可得

$$\hat{\phi}(2u, 2v) = H(u, v) \hat{\phi}(u, v) \quad (5)$$

其中 $H(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{m,n} h_{m,n} e^{-i(um+vn)}$ 。因为有 $\hat{\phi}(0, 0) = 1$ ，

式(5)进行无穷次乘积迭代后可得

$$\hat{\phi}(u, v) = \prod_{n=1}^{\infty} H\left(\frac{u}{2^n}, \frac{v}{2^n}\right)$$

同理分别对式(2)、式(3)、式(4)两边作 Fourier 变换，可得

$$\hat{\psi}^k(2u, 2v) = G^k(u, v) \hat{\phi}(u, v)$$

$$G^k(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{m,n} g_{m,n}^k e^{-i(um+vn)}, k = 1, 2, 3$$

又由文献[13] $H(u, v)$ 和 $G^k(u, v) (k = 1, 2, 3)$ 有式(6)关系：

$$\left. \begin{aligned} G^1(u, v) &= e^{-iu} H(u + \pi, v) \\ G^2(u, v) &= e^{-iv} H(u, v + \pi) \\ G^3(u, v) &= e^{-i(u+v)} H(u + \pi, v + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由以上分析可知 $H(u, v)$ 的构造是多分辨率分析的关键，给定共轭滤波器 $H(u, v)$ 满足：

$$|H(u, v)|^2 + |H(u, v + \pi)|^2 + |H(u + \pi, v)|^2 + |H(u + \pi, v + \pi)|^2 = 1 \quad (7)$$

$$H(0, 0) = 1 \quad (8)$$

实际设计滤波器时都对 $H(u, v)$ 有平滑性的要求，设 $H(u, v)$ 可被分解为^[14]

$$H(u, v) = \left(\frac{1 + e^{-2imv} e^{-iv}}{2} \right)^M \left(\frac{1 + e^{-2inu} e^{-iu}}{2} \right)^N S(u, v) \quad (9)$$

其中， m, n 不同时为零，由式(9)可知 $H(u, \pi) = H(\pi, v) = H(\pi, \pi) = 0$ ，且 $H(u, v)$ 在 (u, π) 有 M 重根，在 (π, v) 有 N 重根，在 (π, π) 有 $\max(M, N)$ 重根，因此有

$$\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=\pi} = 0, \quad 0 \leq r + s \leq M + N \quad (10)$$

对式(7)的 u 求 r 阶偏导，对 v 求 s 阶偏导，并令 $u = v = 0$ ，同时将式(8)和式(10)代入可得 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$ ，其中 $0 \leq r + s \leq M + N$ 。

引理 1 如果有 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$ 成立，

其中， $0 \leq r + s \leq M + N$ ，称 $H(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 点有 $M + N$ 次平滑性，则有

(1) $\hat{\phi}(0, 0) = 1, \hat{\psi}^k(0, 0) = 0$ ，其中， $k = 1, 2, 3$ ，下同；

$$(2) \left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\phi}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\psi}^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0。$$

证明 由 2 维小波分析理论，(1)中的等式显然是成立的，以下简要证明(2)中结论。

式(5)两边对 u 求 r 阶偏导，对 v 求 s 阶偏导，并令 $u = v = 0$ 同时将 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$ 代入，可得

$$\left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\phi}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0, \quad \text{即有结论} \left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\phi}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0,$$

利用式(5)上述结论可以逆推，故有 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\phi}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$ 。

要证 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\psi}^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0}$

$$= 0, \quad \text{首先证明} \left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{\partial^{r+s} G^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 1 \leq r + s \leq M + N。$$

对式(6) $H(u, v)$ 和 $G^k(u, v)$ ($k = 1, 2, 3$) 的 3 个关系式两边的 u 求 r 阶偏导， v 求 s 阶偏导，并令 $u = v = 0$ 同时将 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$ 代入，可得

$$\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} G^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0,$$

此过程也可以逆推，则有 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{\partial^{r+s} G^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 1 \leq r + s \leq M + N。$$

结合小波函数双尺度方程的频域表现 $\hat{\psi}^k(2u, 2v) = G^k(u, v)\hat{\phi}(u, v)$ ， $k = 1, 2, 3$ 作类似于 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\phi}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0$ 的推

导过程，可得 $\left[\frac{\partial^{r+s} G^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\psi}^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 1 \leq r + s \leq M + N。$$

综合以上结果最终有 $\left[\frac{\partial^{r+s} H(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\phi}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial^{r+s} \hat{\psi}^k(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} \right]_{u=v=0} = 0。 \text{证毕}$$

3 矩与小波不变矩

2 维平面上灰度图像 $f(x, y)$ 的 $p + q$ 阶几何矩^[6] 的定义为

$$m_{pq} = \iint x^p y^q f(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

当 $f(x, y)$ 在 $x - y$ 平面上的有限区域内非零且分段连续时， m_{pq} 与 $f(x, y)$ 互相唯一确定。矩的特定代数式在图像平移、旋转、尺度变化时保持定值，称为不变矩。把坐标原点移至 $f(x, y)$ 的质心，再除以一个尺度因子，可得到 $p + q$ 阶中心化规格矩：

$$\eta_{pq} = \iint (x - m_{10})^p (y - m_{01})^q f(x, y) dx dy / m_{00}^{(p+q)/2+1} \quad (12)$$

而由中心化规格矩可以组合表示出文献[6]中的 7 个具有平移、旋转、尺度变化的不变矩，这里不再列出。在文献[6]工作的基础上，文献[15]进一步给出了离散情况下各阶矩的计算方法，另外为保证离散情

况下不变矩的尺度不变性,文献[16]对归一化的中心距进行了修正,实际情况下可借鉴这些方法以取得更好的应用效果。

对函数 $f(x, y)$ 作 2 维 Fourier 变换可得 $F(u, v) = \iint f(x, y)e^{-i(ux+vy)} dx dy$, 对等式两边同时对 u 求 p 阶偏导, 再接着对 v 求 q 阶偏导, 最后令 $u = v = 0$ 有

$$\iint x^p y^q f(x, y) dx dy = m_{pq} = \left[\frac{\partial^{p+q} F(u, v)}{\partial u^p \partial v^q} \cdot i^{(p+q)} \right]_{u=v=0}, \quad (13)$$

$p, q = 0, 1, 2, \dots$

由式(13)和引理 1 可得引理 2。

引理 2 如果 $H(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 点有 $M + N$ 次平滑性, 则

(1) $\iint \phi(x, y) dx dy = 1, \iint \psi^k(x, y) dx dy = 0$, 其中 $k = 1, 2, 3$, 下同;

(2) $\iint x^r y^s \phi(x, y) dx dy = 0, \iint x^r y^s \psi^k(x, y) dx dy = 0, 1 \leq r + s \leq M + N$ 。

将 $f(x, y) = A_j + \sum_{l \geq j} (D_l^1 + D_l^2 + D_l^3)$ 两边同时乘

以 $x^p y^q$ 对 x 和 y 作二重积分同时利用二项式定理展开, 并利用引理 2 的结论进行化简, 最终可得定理 1。

定理 1 如果共扼滤波器 $H(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 点有 $M + N$ 次平滑性, 将 $f(x, y)$ 按 $H(u, v)$ 构造的尺度函数 $\phi(x, y)$ 及小波函数 $\psi^k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) 作小波展开, $a_{m,n}(j)$ 是其近似系数, 令 W_{pq} 表示基于 $f(x, y)$ 2 维不可分小波变换近似系数的 $p + q$ 阶小波矩, 则

$$W_{pq} = 2^{-(p+q+1)j} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} m^p n^q a_{m,n}(j), \quad (14)$$

$0 \leq p + q \leq M + N$

在设计共扼滤波器 $H(u, v)$ 时, 如果使 $H(u, v)$ 在零点有 $M + N$ 次平滑性, 那么按照 $H(u, v)$ 得到的尺度函数 $\phi(x, y)$ 和小波函数 $\psi^k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$), 将 2 维图像 $f(x, y)$ 在其上分解后产生的任一层次 j 的近似系数, 理论上可无误差地表达阶次不大于 $M + N$ 的矩值, 式(14)中不出现细节系数。这表明图像作 2 维不可分小波分解后, 它的有限个视觉不变量将始终保留在任一层次的近似中而与任一层的细节无关, 即得到了基于近似系数的小波矩不变量。这种基于近似系数的小波矩不变量, 通过作平移、规格化及类似 7 个几何不变矩的代数组合变换, 就可得到基于近似系数的小波不变矩。这样的小波不变矩有 3 个基本优点: 其一, 由于近似系数只为原始图像数据量的 1/4 甚至更小(分解尺度增加时), 故基于小波分解近似系数的矩值计算复杂性将大幅减

小; 其二, 如果原始图像存在噪声, 对图像进行 2 维不可分小波分解后噪声主要存在于细节系数中, 这样基于少量噪声的近似系数计算得到的矩值比通过原始噪声图像计算的矩值应更准确和更能表征物体的特征, 而有利于模式的正确识别; 其三, 小波变换可以获取图像中物体的细节结构特征, 而在模式识别的理论和方法中, 基于统计的不变矩能很好地对模式的特征信息进行描述^[17], 故将小波变换和不变矩方法结合起来可充分利用两者的优点, 为进一步提出相关高效的模式识别应用算法奠定了基础^[18]。

实际应用中逼近层 j 和平滑性 $M + N$ 的值是有限制的, 尽管从原则上增大逼近层 j 和平滑性 $M + N$ 能以较小的计算代价获得更多的矩不变量信息, 但在实际应用中将受到物体大小和 Gibbs 效应的影响。总地来说, 为保证足够的计算精度以利于精确识别, 逼近层 j 应满足 $j \ll \log_2 L$, L 为图像尺寸, 对此文献[6]有较为详细的分析; 另一方面, 图像小波分解过程中的卷积会存在破坏边界的 Gibbs 效应, 这将影响待识别物体从背景的分割, 而分割的好坏直接影响矩不变量的计算。为减少 Gibbs 效应的影响, $M + N$ 值也不能太大。

4 实验与结果分析

本文利用设计得到的 2 维不可分小波滤波器在 Matlab8.0 平台上对 Lena 灰度图像进行分解后, 计算其基于近似系数的矩不变量, 结果列于表 1。

理论上说阶数小于 5 的矩值在任一层得小波逼近系数中应保持定值, 而且阶数越小其误差值越小, 实验结果很好地反映了这一点。当然, 随着矩阶数的增高和逼近层数的加大, 误差也逐渐增大, 这是物体尺寸和 Gibbs 效应的影响, 已在第 3 节中指出。

为验证式(14)的抗噪性能, 本文对 Lena 图像加噪声(见图 1)后同样利用 2 维不可分滤波器对噪声图像进行分解求其不同尺度下的矩不变量, 将其与按式(11)计算得到的无噪声图像原始准确矩值比较, 得出表 2 数据。

由表 2 的矩值误差数据明显可知第 0 层的矩值误差是最大的, 而随着分解层数的增加近似系数受噪声影响越来越小使其矩值误差相对准确值的误差越来越小, 正如第 3 节所述这是由于小波变换将原图像的大部分噪声分解到细节系数中, 而近似系数所含噪声较少的缘故。当然随着尺度的进一步增大, 由于物体尺寸和 Gibbs 效应及其他原因导致的误差增加导致相对准确矩值的误差值有所变大, 但总体成减小的趋势。

表 1 基于分解近似系数的图像矩值及其误差值

逼近层/误差值	逼近层尺寸	$m_{00}(\times 10^7)$	$m_{10}(\times 10^9)$	$m_{11}(\times 10^{12})$	$m_{21}(\times 10^{14})$	$m_{22}(\times 10^{17})$	$m_{23}(\times 10^{19})$
第 0 层(原图像)	512×512	2.53766	6.30512	1.72056	5.81138	2.05821	8.03481
第 1 层(矩值)	256×256	2.53766	6.31838	1.72620	5.83641	2.06860	8.08162
误差值(%)		0.00014	0.21031	0.32784	0.43067	0.50482	0.58262
第 2 层(矩值)	128×128	2.53767	6.34491	1.73847	5.88985	2.09113	8.18424
误差值(%)		0.00029	0.63114	1.04107	1.35029	1.59923	1.85988
第 3 层(矩值)	64×64	2.53767	6.39785	1.76332	5.99824	2.13702	8.39419
误差值(%)		0.00043	1.47068	2.48528	3.21550	3.82916	4.47282
第 4 层(矩值)	32×32	2.53767	6.50435	1.81354	6.21822	2.23057	8.82409
误差值(%)		0.00058	3.15979	5.40407	7.00072	8.37434	9.82333
第 5 层(矩值)	16×16	2.53768	6.72008	1.91960	6.69550	2.43654	9.78239
误差值(%)		0.00072	6.58131	11.5683	15.2137	18.3812	21.7502

注：表 1 中数量级只对矩值数据有效，不包括误差值，同时误差值都是相对第 0 层的误差

表 2 基于分解近似系数的加噪图像矩值及其对比误差值

逼近层/误差值	逼近层尺寸	$m_{00}(\times 10^7)$	$m_{10}(\times 10^9)$	$m_{11}(\times 10^{12})$	$m_{21}(\times 10^{14})$	$m_{22}(\times 10^{17})$	$m_{23}(\times 10^{19})$
第 0 层(原图像)	512×512	2.54579	6.32735	1.72486	5.82615	2.06220	8.04843
误差值(%)		3.20445	3.52667	2.50120	2.54187	1.93813	1.69596
第 1 层(矩值)	256×256	2.54509	6.33596	1.73134	5.85546	2.07577	8.11430
误差值(%)		3.14375	3.48931	2.45563	2.49667	1.86316	1.59031
第 2 层(矩值)	128×128	2.54394	6.35334	1.74420	5.91328	2.10263	8.24506
误差值(%)		3.15798	3.44932	2.34069	2.28582	1.56971	1.21589
第 3 层(矩值)	64×64	2.54167	6.38873	1.76985	6.02898	2.15658	8.50870
误差值(%)		3.05998	3.40227	2.20408	2.07286	1.23842	0.78928
第 4 层(矩值)	32×32	2.53857	6.46479	1.81944	6.25220	2.26042	9.01767
误差值(%)		3.00191	3.35106	2.06031	1.81371	0.80253	0.17666
第 5 层(矩值)	16×16	2.53422	6.61709	1.91178	6.66093	2.44738	9.93252
误差值(%)		2.94680	3.35375	2.09820	1.90930	0.74901	0.07953

注：表 2 中数量级只对矩值数据有效，不包括误差值，同时误差值都是相对相应的无噪图像矩值误差



图1 原始Lena图像和加噪Lena图像

就式(14)的计算复杂度而言，由理论推导可知近似系数只有原始图像数据量的 1/4。假设离散的原图像尺寸为 $N \times N$ ，一般几何矩是按式(11)对

原始图像进行处理，其计算复杂度为 $O(pN^2 + qN^2)$ ，而本文是对只有原始图像尺寸 1/4 的近似系数进行处理，原始数据量的减小显然将大幅降低计算量。假如式(14)的计算是基于第 1 层的近似系数，则其计算复杂度将降低为 $O(pN^2 / 4 + qN^2 / 4)$ ，而如果其基于更大尺度(层数)的近似系数即 $S(S \geq 1)$ 尺度的近似系数，计算复杂度将进一步降为 $O(pN^2 / 4S + qN^2 / 4S)$ ，这显然在原始 $O(pN^2 + qN^2)$ 的计算复杂度基础上大幅减小了 $(4S - 1) / 4S$ 的计算量。

5 结束语

本文从理论上推导得到了基于矩的小波矩不变量(小波不变矩)，并指出它在实际应用中的局限性

和需要注意的地方。多尺度分析是通过减少信号不必要的细节在大尺度范围内进行识别, 而不变矩方法则要求尽可能多地保留物体的特征, 特别是有助于区分近似物体的细节特征, 这两种方法之间有一种内在的矛盾性和互补性。通常在模式识别中, 需从总体轮廓上把握物体的特征, 这样的识别方法具有抗噪性和抗干扰性^[9], 而保留物体的细节特征有助于区分形近物体但却导致对噪声和干扰的敏感。于是为了消除细节减少数据量, 必须增大尺度, 但这样做同时会使不变量数值不精确和导致表征细节特征信息不充分; 另一方面, 为尽可能准确地计算不变量必须尽量保持数据, 从而要求逼近尺度不能太大。实际应用中两种方法的有机结合是很必要的, 最合理的妥协就是每个物体在其合适的层次得到识别。

参考文献

- [1] 李骏扬, 金立左, 费树岷, 等. 基于多尺度特征表示的城市道路检测[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(11): 2578-2585. doi: 10.3724/SP.J.1146.2014.00271.
LI Junyang, JIN Lizuo, FEI Shumin, et al. Urban road detection based on multi-scale feature representation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(11): 2578-2585. doi: 10.3724/SP.J.1146.2014.00271.
 - [2] MALLAT S G. A Theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 1(7): 674-693.
 - [3] MALLAT S G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$ [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, 315(1): 69-87.
 - [4] DAUBECHIES I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. *Communications on Pure And Applied Mathematics*, 1988, 41(7): 909-996.
 - [5] PRASHAN P and MALIN P. Image matching using moment invariants[J]. *Neurocomputing*, 2014, 137: 65-70. doi: 10.1016/j.neucom.2013.02.058.
 - [6] HU M K. Visual pattern recognition by moment invariants[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1962, 8(2): 179-182.
 - [7] 谢生龙, 王夏黎, 董春雨, 等. 基于不变矩理论线矩法图像特征的提取[J]. 计算机技术与发展, 2014, 24(11): 139-143. doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.035.
XIE Shenglong, WANG Xiali, DONG Chunyu, et al. Extraction of figure features based on line moment method of moment invariant theory[J]. *Computer Technology and Development*, 2014, 24(11): 139-143. doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.035.
 - [8] 轩建平, 郑锋. 基于 Coiflet 的二维小波有限元构造与应用[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2014, 42(5): 21-24. doi: 10.13245/j.hust.140505.
XUAN Jianping and ZHENG Feng. Construction and application of two-dimensional wavelet finite element based on Coiflet[J]. *Huazhong University of Science & Technology*, 2014, 42(5): 21-24. doi: 10.13245/j.hust.140505.
 - [9] HUR Y, PARK H, and ZHENG Fang. Multi-D wavelet filter bank design using quillen-suslin theorem for laurent polynomials[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(20): 5348-5358. doi: 10.1109/TSP.2014.2347263.
 - [10] HUAIE Y. Construction of compactly supported nonseparable orthogonal wavelet with dilation 4[J]. *Advanced Materials Research*, 2014, 1061(1): 1064-1069.
 - [11] 金琪, 戴汝为. 基于矩表示的小波不变量[J]. 模式识别与人工智能, 1995, 8(3): 179-187.
JIN Qi and DAI Ruwei. Wavelet invariants based on moment presentation[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1995, 8(3): 179-187.
 - [12] AYACHE A. Some methods for constructing non-separable, orthonormal, compactly supported wavelet bases[J]. *Letter to the Editor In Applied And Computational Harmonic Analysis*, 2001, 10(1): 99-111.
 - [13] DAUBECHIES I. Ten Lectures on Wavelets [M]. Vermont: Capital City Press, 1992: 299-300.
 - [14] 徐应祥, 关履泰. 具有消失矩的新二元正交小波[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2010, 32(4): 385-391.
XU Yingxiang and GUAN Lütai. New bivariate orthogonal wavelets with vanishing moments[J]. *Journal of Yunnan University*, 2010, 32(4): 385-391.
 - [15] WONG Y R. Scene matching with invariant moments[J]. *Computer Graphics and Image Processing*, 1978, 8(1): 16-24.
 - [16] 潘泉, 程咏梅, 杜亚娟, 等. 离散不变矩算法及其在目标识别中的应用[J]. 电子与信息学报, 2001, 23(1): 30-36.
PAN Quan, CHENG Yongmei, DU Yajuan, et al. Discrete moment invariant algorithm and its application on target recognition[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2001, 23(1): 30-36.
 - [17] 沈会良, 李志能. 基于矩和小波变换的数字、字母字符识别研究[J]. 中国图象图形学报, 2000, 5A(3): 249-252. doi: 10.3969/j.issn.1006-8961.2000.03.015.
SHEN Huiliang and LI Zhineng. A study of number and letter character recognition based on moments and wavelet transform[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2000, 5A(3): 249-252. doi: 10.3969/j.issn.1006-8961.2000.03.015.
 - [18] 毛贤光, 李云欣, 李罕, 等. 基于不变矩和小波分析的指横纹匹配新算法[J]. 计算机工程与应用, 2015, 51(20): 172-177. doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1310-0109.
MAO Xianguang, LI Yunxin, LI Han, et al. New matching algorithm of knuckleprint based on moment invariants and wavelet multi-resolution analysis[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2015, 51(20): 172-177. doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1310-0109.
 - [19] 丁晓青. 汉字识别研究的回顾[J]. 电子学报, 2002, 9(9): 1364-1368. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2002.09.029.
DING Xiaoqing. Chinese character recognition: a review[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 9(9): 1364-1368. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2002.09.029.
- 刘 斌: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 主要从事模式识别、图像处理及小波理论的研究。
高 强: 男, 1988年生, 硕士生, 研究方向为图像处理、模式识别。