

改进的双约束稳健 Capon 波束形成算法

李立欣* 白童童 张会生 包涛 申礼斌
(西北工业大学电子信息学院 西安 710129)

摘要: 传统双约束稳健Capon波束形成算法采用牛顿迭代法求解最优加载量,存在计算精度低且运算量大的问题。该文提出一种改进的双约束稳健Capon波束形成(DCRCB)算法,该算法对信号协方差矩阵进行重构,基于期望信号导向矢量在噪声子空间的投影最优,将重构后的干扰加噪声协方差矩阵投影到噪声子空间,得到基于噪声子空间的双约束算法模型。该算法中通过模约束的辅助约束作用,将改进的双约束算法模型转化为单约束问题,最终解得最优对角加载量的解析表达式。仿真结果表明改进算法能通过调整主瓣宽度优化波束旁瓣,有效提高了抗矢量偏差的鲁棒性,同时降低了运算量。

关键词: 自适应波束形成; 双约束 Capon 波束形成; 信号协方差矩阵重构; 噪声子空间

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)08-2014-06

DOI: 10.11999/JEIT151213

Improved Double Constraint Robust Capon Beamforming Algorithm

LI Lixin BAI Tongtong ZHANG Huisheng BAO Tao SHEN Libin

(School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: Traditional double constraint robust Capon beamforming algorithm uses Newton iterative method for solving the optimal loading, presenting the problems of low accuracy and large amount of computation. An improved Double Constraint Robust Capon Beamforming (DCRCB) algorithm is proposed in this paper. The algorithm reconstructs the signal covariance matrix, and by optimizing the projection of signal steering vector onto the noise subspace, it projects the reconstructed interference-plus-noise covariance matrix onto the noise subspace, obtaining the double constraint algorithm model based on the noise subspace. For the norm constraint is accessorial, the algorithm model can be converted into a single constraint issue and be solved into an analytical expression of optimal diagonal loading finally. Simulation results show that the improved algorithm can optimize the side lobe by adjusting the beam width of the main lobe, improve effectively the anti-vector error robustness, and reduce the amount of computation.

Key words: Adaptive beamforming; Double constraint Capon beamforming; Signal covariance matrix reconstructing; Noise subspace

1 引言

波束形成是阵列信号处理的一项重要技术,广泛应用于无线通信、声呐、雷达和麦克风语音阵列处理等领域^[1-4]。然而,在实际工程应用中,当基阵位置的偏差较大、各阵元通道幅度和相位响应不

一致、阵型失配时,算法性能会受到严重影响^[5-7]。因此,如何有效改善自适应波束形成的稳健性具有重要意义。

文献[8~10]提出了一类有严格理论基础的基于导向矢量不确定集的稳健Capon波束形成算法,在此基础上,近年来出现了许多新的改进的稳健Capon波束形成算法^[11-15]。其中文献[10]提出了强加导向矢量不确定集和模值约束以改善其稳健性,即双约束稳健Capon波束形成(Double Constraint Robust Capon Beamformer, DCRCB)算法,该算法属于对角加载算法的一种,可以根据不同的导向矢量误差得到合适的加载量。其最优对角加载量通过牛顿迭代法求解,但是迭代的运算量一般比较大而且收敛速度慢。文献[15]提出一种新的基于导向矢量

收稿日期: 2015-11-03; 改回日期: 2016-03-31; 网络出版: 2016-05-24

*通信作者: 李立欣 lilixin@nwpu.edu.cn

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(3102014JCQ01052, 3102014KYJD034, 3102014KYJD040), 陕西省自然科学基金研究计划(2016JM6062), 中国航天科技集团公司航天科技创新基金

Foundation Items: The Fundamental Research Funds for the Central Universities (3102014JCQ01052, 3102014KYJD034, 3102014KYJD040), The Natural Science Foundation Research Project of Shaanxi Province (2016JM6062), The Aerospace Science and Technology Innovation Fund of CASC

不确定集的稳健Capon波束形成算法, 并且利用特征向量的结构特性推导出了最优对角加载量的解析表达式, 但是基于单约束的Capon波束形成算法鲁棒性不高, 无法使所提算法的性能达到最优。

本文基于期望信号导向矢量在噪声子空间的投影最优, 并对信号协方差矩阵进行重构, 提出一种改进的双约束稳健Capon波束形成算法。通过分析求解不确定集约束下的Capon波束形成算法可知, 不确定集约束决定该算法的性能, 导向矢量的模约束只起辅助约束作用, 因此可以去掉改进的双约束稳健Capon波束形成算法模型中的模约束, 将算法模型转化为单约束问题, 求解单约束问题的最优对角加载量, 然后对其进行标量化。该算法运算量低于迭代求解的方法, 提高了加载量的计算精度, 并且因为进行了信号协方差矩阵重构, 算法的鲁棒性提高, 旁瓣增益大大降低。

2 双约束波束形成算法及其求解

考虑阵列是由 M 个阵元组成的理想均匀线阵, 远场空间存在一个目标信号和互不相关的 P 个干扰信号。则第 k 次快拍阵列的接收数据矢量可以表示为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_s(k) + \mathbf{n}(k) + \mathbf{i}(k) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}_s(k)$, $\mathbf{n}(k)$ 和 $\mathbf{i}(k)$ 分别为接收数据中互不相关的期望信号、干扰和噪声部分, $\mathbf{x}_s(k) = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{s}(k)$, $\tilde{\mathbf{a}}$ 为估计期望信号导向矢量, $\mathbf{s}(k)$ 为期望信号的复包络。

对接收数据进行波束形成, 则波束形成器的输出为

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \quad (2)$$

式中, $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M]^T \in C^N$ 为波束形成器的加权矢量。

根据阵列信号模型, 双约束波束形成算法的优化模型可以描述为

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\tilde{\mathbf{a}}} \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}} \\ \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 \leq \varsigma \\ \text{s.t. } \|\mathbf{a}_0\|^2 = M \end{array} \right\} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{R}_x = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k)$ 是 L 个有效快拍数据估计得到的样本协方差矩阵, 其中 $\mathbf{x}(k)$ 为第 k 次快拍时阵列接收信号, \mathbf{a}_0 为实际期望信号导向矢量, ς 为约束导向矢量的参数, $\|\cdot\|$ 表示对矢量求 2 范数。

利用 Lagrange 因子方法求解式(3), 可以得出方向向量的估计值。需最小化目标函数为

$$f_1(\tilde{\mathbf{a}}, \lambda, \mu) = \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}} + \lambda (\|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 - M) + \mu (2M - \varsigma - \mathbf{a}_0^H \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{a}_0) \quad (4)$$

式中, λ, μ 为实数的 Lagrange 因子, 对式(4)求解可得出方向向量的估计值。

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\lambda, \mu} = \mu (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{a}_0 \quad (5)$$

将方向向量代入, 可得

$$f_2(\lambda, \mu) = f_1(\tilde{\mathbf{a}}_{\lambda, \mu}, \lambda, \mu) = -\mu^2 \mathbf{a}_0^H (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0 - \lambda M + \mu(2M - \varsigma) \quad (6)$$

将式(6)对 μ 求导并令其等于零, 可得

$$\mu = \frac{2M - \varsigma}{2\mathbf{a}_0^H (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0} \quad (7)$$

将 μ 代入式(6), 可得

$$f_3(\lambda) = f_2(\lambda, \mu) = -\lambda M + \frac{(M - \varsigma/2)^2}{\mathbf{a}_0^H (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0} \quad (8)$$

Lagrange 因子 λ 可以通过式(9)求得

$$\frac{\mathbf{a}_0^H (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-2} \mathbf{a}_0}{\left[\mathbf{a}_0^H (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0 \right]^2} = \frac{M}{(M - \varsigma/2)^2} \quad (9)$$

可以证明, 式(9)左面是 λ 的单调递减函数。当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = 1/M < \rho$, 而当 $\lambda \rightarrow -1/\gamma_1$

时, $\lim_{\lambda \rightarrow -1/\gamma_1} h(\lambda) > \rho$ 。所以式(9)中 λ 存在唯一解。

把式(7)代入式(5), 可得信号方向向量的估计值为

$$\tilde{\mathbf{a}} = (M - \varsigma/2) \frac{(\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^H (\mathbf{R}_x^{-1} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0} \quad (10)$$

又解得 λ 的取值范围为

$$\lambda \leq \frac{1/\gamma_M - (M\rho)^{1/2} (1/\gamma_1)}{(M\rho)^{1/2} - 1} \quad (11)$$

利用牛顿法解式(9)求出中满足式(11)的拉格朗日因子 λ , 将 λ 代入式(7)得到 μ , 进而求解式(5), 得出方向向量的估计值。从而得到权重向量公式为

$$\tilde{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}}}{\tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}}} \quad (12)$$

由于双约束波束形成算法没有对信号协方差矩阵进行重构, 所以在抑制干扰信号的同时也抑制了期望信号, 导致对干扰信号零陷不够深。并且此算法对角加载值通过牛顿迭代法求得, 计算量较大。因此, 提出改进的双约束波束形成算法对上述问题进行改进, 提高算法性能。

3 改进的双约束波束形成算法及其求解

3.1 改进的双约束波束形成算法

目前, 有很多对信号协方差矩阵进行重构的方法, 比如利用窗函数进行重构^[16], 构造平均协方差矩阵^[17], 重新定义一个谱来构造干扰加噪声协方差矩阵^[18], 空间功率谱估计^[19]等。前面 3 种方法侧重

于对干扰零陷的展宽,并且在展宽零陷的同时使得零陷深度变浅,因为本文的研究重点在于滤除协方差矩阵中的期望信号,加深零陷深度,提高算法抗导向矢量偏差的鲁棒性,而且利用空间谱估计来重构信号协方差矩阵这种方法的复杂度较低,并且性能良好,在多篇论文中也已经得到验证,综合考虑后,故采用空间功率谱估计的方法来重构信号协方差矩阵。

下面针对导向矢量失配问题,对信号协方差矩阵进行重构

$$\widehat{\mathbf{R}}_{i+n} = \int_{\Omega} P(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta \quad (13)$$

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (14)$$

式中, $P(\theta)$ 为空间谱函数,式(13)中 $\widehat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 是重构的干扰加噪声协方差矩阵, Ω 为定义的干扰区间,实际应用中,对 Ω 的选择没有特别严格的要求,只需保证所有干扰分量均包含于 Ω 内,而期望分量不在 Ω 内即可。假设 θ 代表期望信号区间,满足 $\theta \cap \Omega = \emptyset$, $\theta \cup \Omega$ 为整个观测区间。基于此方法,调整 Ω 和 θ 的大小可获得不同的波束响应特性。例如,增加 θ 减小 Ω 会使主瓣变宽,导致波束分辨率降低,但能获得更低的旁瓣级;减小 θ 增大 Ω 则会有相反的效果。实际应用中, Ω 和 θ 的大小根据需求设定。

将式(14)代入式(13)可得

$$\widehat{\mathbf{R}}_{i+n} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{a}(\theta)} d\theta \quad (15)$$

式(15)为重构后的干扰加噪声协方差矩阵。

在仿真中,我们采用的是求和的方法来对此式进行求解,将干扰区间 Ω 分为 L 个方向,每一个方向的导向矢量为 $\mathbf{a}(\theta_i)$,对 $\frac{\mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i)}{\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{a}(\theta_i)}$ 进行 L 次积分求和,公式为

$$\widehat{\mathbf{R}}_{i+n} = \sum_{i=1}^L \frac{\mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i)}{\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{a}(\theta_i)} \quad (16)$$

用重构后的协方差矩阵 $\widehat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 代替式(3)中的 \mathbf{R}_X ,那么 DCRCB 算法可描述为

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^H \widehat{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1} \mathbf{a} \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_0\|^2 \leq \varsigma \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{a}_0\|^2 = M \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在进行分析之前,假定天线阵列接收端总共有 $P+1 < M$ 个信号源,其中 P 个干扰源,1个信号,对重构的协方差矩阵 $\widehat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 进行矩阵特征分解,则有

$$\widehat{\mathbf{R}}_{i+n} = \sum_{i=1}^M \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^H \quad (18)$$

式中, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_{P+1} \geq \gamma_{P+2} \approx \dots \approx \gamma_M = \sigma_M^2$ 表示 $\widehat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 对应的 M 个特征值, $\mathbf{u}_i, i=1, \dots, M$ 表示对应的特征向量, $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{P+1})$ 和 $\mathbf{\Lambda}_N = \text{diag}(\gamma_{P+2}, \dots, \gamma_M)$ 分别为对应的特征值组成的对角阵 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{P+1}]$, $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{P+2}, \dots, \mathbf{u}_M]$ 分别为信号子空间和噪声子空间。

根据矩阵特征分解理论,实际上信号导向矢量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 属于信号子空间。因此 $\tilde{\mathbf{a}}$ 可以表示成信号子空间的 \mathbf{U}_S 各列向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{P+1}$ 的线性组合。

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{U}_S \boldsymbol{\alpha} \quad (19)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}$ 表示组合系数组成的列向量。

把式(19)和式(18)代入式(17)中,可得

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{a}} \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S^{-1} \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N^{-1} \mathbf{U}_N \tilde{\mathbf{a}} \\ & \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 \leq \varsigma \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{a}_0\|^2 = M \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由于 $\mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S = \mathbf{I}$, $\mathbf{\Lambda}_N = \sigma_M^2 \mathbf{I}$, 而 $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{P+1})$, 那么 $\mathbf{\Lambda}_S^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}, \dots, \frac{1}{\gamma_{P+1}}\right)$ 。由于 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_{P+1}$, 因此 $\mathbf{\Lambda}_S^{-1} \geq \text{diag}\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_1}, \dots, \frac{1}{\gamma_1}\right) = \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{I}$ 。这样上述最优化问题可以进一步描述为

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{a}} \frac{1}{\gamma_1} \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \frac{1}{\sigma_M^2} \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}} \\ & \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 \leq \varsigma \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{a}_0\|^2 = M \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中, σ_M^2 表示噪声功率。由于 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的模值为 \sqrt{M} , 且 $\|\tilde{\mathbf{a}}\| = \|\mathbf{U}_S \boldsymbol{\alpha}\|_V = \sqrt{M}$, 其中, $\|\mathbf{U}_S \boldsymbol{\alpha}\|_V$ 满足 $\|\mathbf{U}_S \boldsymbol{\alpha}\|_V \leq \|\mathbf{U}_S\|_F \cdot \|\boldsymbol{\alpha}\|$ 。 $\|\mathbf{U}_S\|_F$ 表示 \mathbf{U}_S 的 F 范数, 且有 $\|\mathbf{U}_S\|_F = \text{Tr}(\mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S)^{1/2}$, 进而有 $\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq \sqrt{M} / \text{Tr}(\mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S)^{1/2} = \sqrt{M} / \sqrt{P+1}$, 由于 M 和 P 仅和阵列天线数目和信号源数目有关, 并且利用 $\|\mathbf{a}_0\|^2 = \|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 = M$, 因此上述最优化问题可以进一步描述为

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}} \\ & \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 \leq \varsigma \\ & \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 = M \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

3.2 改进的双约束波束形成算法的求解

通过分析求解双约束下的 Capon 波束形成算法,可以得到导向矢量的模约束只是起辅助约束的作用,这是因为对于满足不确定约束的解进行标量

化, 使其满足模约束, 然后代入信号功率 σ_0^2 的估计式中, 只是相当于增加了一常数因子。因此, 对于式(22)的求解可以转化为求解单约束波束形成算法。

$$\left. \begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{a}}} \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}} \\ \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 \leq \varsigma \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

为了去掉没有意义的解 $\tilde{\mathbf{a}} = 0$, 假设

$$\|\mathbf{a}_0\|^2 > \varsigma \quad (24)$$

这样把式(23)中的不等式约束转化为等式约束。

$$\left. \begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{a}}} \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}} \\ \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 = \varsigma \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)的最优解是利用拉格朗日因子的方法最小化函数 f :

$$f = \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}} + \lambda (\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_0\|^2 - \varsigma) \quad (26)$$

式中, $\lambda \geq 0$ 为实数的拉格朗日因子。将式(26)对方向向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 求导并令其为零, 得到方向向量的估计值为

$$\tilde{\mathbf{a}} = \left(\frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\lambda} + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{a}_0 \quad (27)$$

这样, 最优对角导向矢量的求解将依赖于 λ 值, 为求解 λ , 将式(27)代入式(26)可得

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\lambda} + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_0 \right\|^2 = \varsigma \quad (28)$$

根据式(18), 可设 $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_N]$, 因为 $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$, 则有

$$\mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{I} \quad (29)$$

将式(29)代入 $\left(\frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\lambda} + \mathbf{I} \right)^{-1}$ 可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\lambda} + \mathbf{I} \right)^{-1} &= \left(\frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\lambda} + \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H + \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H \right)^{-1} \\ &= [\mathbf{U}_N, \mathbf{U}_S] \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \right) \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_N^H \\ \mathbf{U}_S^H \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{U}_N, \mathbf{U}_S] \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right) \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_N^H \\ \mathbf{U}_S^H \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H + \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H \end{aligned} \quad (30)$$

将式(30)代入 $\left(\frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\lambda} + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_0$ 可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H + \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H \right) \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_0 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H + \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H - \mathbf{I} \right) \mathbf{a}_0 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H + \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H - \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \right) \mathbf{a}_0 \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda+1} \right) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}_0 \end{aligned} \quad (31)$$

将式(31)代入式(28)可得

$$\left\| \left(-\frac{1}{\lambda+1} \right) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}_0 \right\|^2 = \varsigma \quad (32)$$

令 $\mathbf{z} = \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}_0 = [z_1, z_2, \dots, z_M]$, 由于 $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{p+2}, \dots, \mathbf{u}_M]$, 则式(32)可以化为

$$\left(\frac{1}{\lambda+1} \right)^2 \sum_{l=p+2}^M |\mathbf{u}_l^H \mathbf{a}_0|^2 = \left(\frac{1}{\lambda+1} \right)^2 \sum_{l=p+2}^M |z_l|^2 = \varsigma \quad (33)$$

解式(33), 由于 $\lambda \geq 0$, 因而可以得到其解为

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\varsigma} \sum_{l=p+2}^M |z_l|^2} - 1 \quad (34)$$

将式(34)代入式(27)就可得最优导向矢量的精确解, 因此, 本文提出的改进的双约束波束形成算法的求解步骤就能得到了。但是需要注意的是, 本文算法需要准确知道噪声子空间的维数, 因此需要估计信号源的数目, 当信号和干扰功率较强时, 可以直接从特征值的界限加以判断。但是当功率较弱时, 无法直接判断, 这时则可以通过信源估计方法^[20]估计。算法的实现步骤如下:

步骤 1 对信号协方差矩阵进行重构, 滤除协方差矩阵中的有用信号。

步骤 2 对重构后的干扰加噪声协方差矩阵进行特征值分解, 求出噪声子空间的特征向量矩阵 \mathbf{U}_N 。

步骤 3 根据 \mathbf{U}_N 求 \mathbf{z} , 得到 \mathbf{z} 后, 把选定的约束参数 ς 代入到式(34)很容易求得最优 λ , 将 λ 代入式(27), 得到最优对角加载量 $\tilde{\mathbf{a}}$, 对 $\tilde{\mathbf{a}}$ 进行标量化, 使其满足 $\|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 = M$, 如令 $\tilde{\mathbf{a}} = \sqrt{M} \tilde{\mathbf{a}} / \|\tilde{\mathbf{a}}\|$, 即得满足双约束的最优解。

步骤 4 计算最优权矢量

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_{i+n}^H \tilde{\mathbf{a}} / (\tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_{i+n}^H \tilde{\mathbf{a}}) \quad (35)$$

4 仿真分析

为了验证算法的正确性, 进行如下的仿真实验。考虑阵列阵元数为 50, 阵元间隔为半个信号波长的理想均匀线阵。本文假设信源的数目已知, 且信号互不相关。假设空间存在一个有用信号和 2 个互不相关的干扰信号, 其中假定期望信号来波方向为 0° , 实际来波方向为 2° 。信噪比为 0 dB。两个干扰信号

功率分别为 40 dB, 50 dB, 相应的干扰信号方向为 $-60^\circ, 40^\circ$ 。

为了验证本文算法的稳健性, 图 1 给出了几种 Capon 波束形成算法方向图。其中 RCB 算法和 DCRCB 算法分别为文献[8]提出的稳健 Capon 波束形成算法和文献[10]提出的双约束稳健 Capon 波束形成算法, 算法 1 表示文献[15]提出的新的稳健 Capon 波束形成算法。算法的参数 ς 根据经验选择为 3.2。

从图 1 可以看出, 本文算法能够准确地指向信号真实的期望方向, 并且具有较低的旁瓣, 而且在两个干扰方向均能形成零陷。因为对信号协方差矩阵进行了重构, 将期望信号滤除, 因此能提高算法的鲁棒性。并且因为本文算法使期望信号导向矢量在噪声子空间的投影最优, 因此算法的旁瓣较低。DCRCB 算法虽然也具有较低的旁瓣, 且在干扰方向形成零陷, 但是在期望信号方向也能形成零陷。RCB 算法和算法 1 旁瓣增益太大, 效果较差。

图 2(a)给出了不同快拍数对波束形成器输出 SINR 的影响。显然本文提出的新的双约束鲁棒波束形成算法输出 SINR 性能明显高于其他 3 种算法, 这是因为新算法旁瓣较低。DCRCB 算法性能优于 RCB 算法和算法 1, 并且算法的输出性能随着快拍数的增大逐渐趋于平稳, RCB 算法和算法 1 在快拍数较大时性能比较接近。

图 2(b)给出了几种算法的不同输入 SNR 的变

化对输出 SINR 的影响。可以看出随着输入 SNR 的增大, 4 种算法的输出 SINR 都在逐渐增大, 并且本文算法与算法 1 的曲线斜率基本一致, DCRCB 算法与 RCB 算法曲线斜率基本一致, 这是由算法的最优对角加载量的求解方式决定的。由图 2 可知, 本文算法在输入 SNR 相同时输出 SINR 至少比其他算法大 10 dB, 并且随着输入 SNR 的增大, 该算法的优势体现的越来越大。算法 1 在 SNR 较大时性能优于 DCRCB 和 RCB 两种算法。

图 3(a)给出了不同约束参数对输出 SINR 的影响。4 种算法的输出 SINR 受约束参数的影响都不大, 因为本文算法对信号协方差矩阵进行重构且期望信号导向矢量在噪声子空间投影最优, 所以其旁瓣低, 主瓣宽, 因此其输出 SINR 性能明显高于其他 3 种算法, 且约束参数为 3 到 7 之间时输出性能比较稳定。其他 3 种算法的输出性能受约束参数的影响差别不大。

图 3(b)给出了不同角度误差对输出 SINR 的影响。本文提出的新的双约束鲁棒波束形成算法输出 SINR 性能明显高于其他 3 种算法, 这是因为该算法在对信号协方差矩阵进行重构时, 合理选择积分范围能够使得方向图主瓣变宽, 旁瓣降低, 使得算法在角度误差较大时仍能保持较好的性能。RCB 和 DCRCB 算法抗角度误差性能较差, 算法 1 较两种算法抗角度误差性能有了一定提升, 但是当角度误差大于 1° 时, 性能下降比较严重。

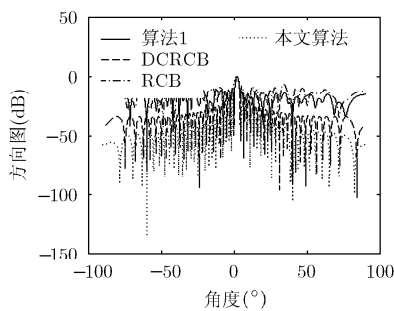
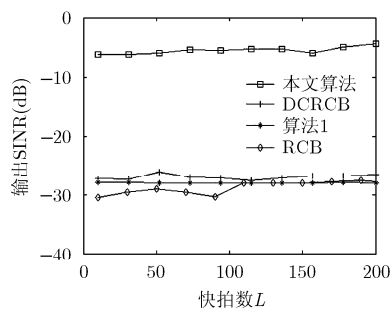
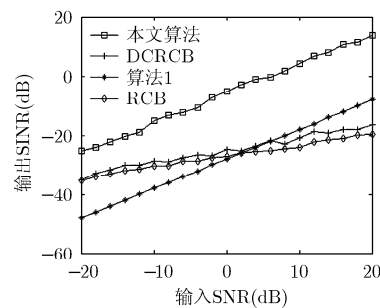


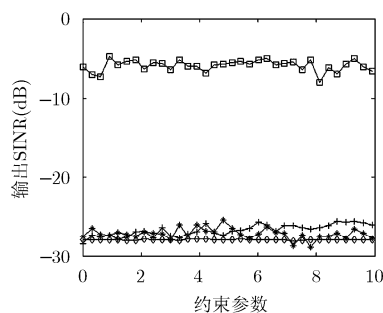
图 1 Capon 波束形成算法的方向图



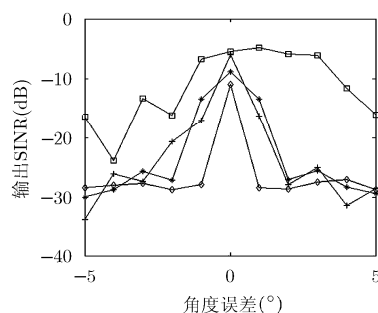
(a)输出 SINR 相对于快拍数的变化



(b)输出 SINR 相对于输入 SNR 的变化



(a)输出 SINR 相对于约束参数的变化



(b)输出 SINR 相对于角度误差的变化

图 3 输出 SINR 相对于不同参数的变化

5 结论

基于双约束稳健 Capon 波束形成算法,本文提出一种新的双约束稳健 Capon 波束形成算法。该算法基于期望信号导向矢量在噪声子空间的投影最优,并对干扰协方差矩阵进行重构,给出了该算法的最优对角加载量的解析表达式。理论分析和仿真实验表明,本文提出的新的 DCRCB 算法运算量小且旁瓣低于其他算法。不管在何种情况下,其输出性能均优于其他算法。

参考文献

- [1] 李洪涛, 陈斌, 曾文浩, 等. 基于导向矢量估计的鲁棒自适应波束形成算法[J]. 电波科学学报, 2015, 30(1): 188-194.
LI Hongtao, CHEN Bin, ZENG Wenhao, *et al.* Steering vector estimation based robust adaptive beamforming algorithm[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2015, 30(1): 188-194.
- [2] 金伟, 贾维敏, 姚敏立, 等. 一种分解迭代二阶锥规划鲁棒自适应波束形成算法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(9): 2051-2057. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.00146.
JIN Wei, JIA Weimin, YAO Minli, *et al.* An robust adaptive beamforming algorithm using decomposition and iterative second-order cone programming[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(9): 2051-2057. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.00146.
- [3] ZHAO H P, DAI Y H, ZHU D Z, *et al.* Robust beam-space adaptive beamforming algorithm[J]. *Application Research of Computers*, 2014, (4): 1151-1153.
- [4] ROH W, SEOL J Y, PARK J, *et al.* Millimeter-wave beamforming as an enabling technology for 5G cellular communications: theoretical feasibility and prototype results [J]. *IEEE Communications Magazine*, 2014, 52(2): 106-113.
- [5] 李文兴, 毛晓军, 孙亚秀. 一种新的波束形成零陷展宽算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(12): 2882-2888. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.02018.
LI Wenxing, MAO Xiaojun, and SUN Yaxiu. A new algorithm for null broadening beamforming[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(12): 2882-2888. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.02018.
- [6] XIA M, WU Y C, and AISSA S. Non-orthogonal opportunistic beamforming: performance analysis and implementation[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(4): 1424-1433.
- [7] HOU Yunshan, ZHANG Xincheng, and JIN Yong. Adaptive beamforming algorithm based on interference-noise covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Computer Applications*, 2014, 34(3): 649-652. doi: 10.11772/j.issn.1001-9081.2014.03.0649.
- [8] STOICA P, WANG Z, and LI J. Robust capon beamforming [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 1(6): 172-175.
- [9] LI J, STOICA P, and WANG Z. On robust capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702-1715.
- [10] LI J, STOICA P, and WANG Z. Doubly constrained robust capon beamformer[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 52(9): 2407-2423.
- [11] CHOI Y H. Doubly constrained robust beamforming method using subspace-associated power components[J]. *Digital Signal Processing*, 2015, 42(C): 43-49.
- [12] 戴凌燕, 王永良, 李荣锋, 等. 基于不确定集的稳健 Capon 波束形成算法性能分析[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(12): 2931-2936.
DAI Lingyan, WANG Yongliang, LI Rongfeng, *et al.* Performance analysis of robust capon beamforming based on uncertain set[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(12): 2931-2936.
- [13] YUAN X L, GAN L, and LIAO H S. A robust interference covariance matrix reconstruction algorithm against arbitrary interference steering vector mismatch[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications & Computer Sciences*, 2015, E98.A(7): 1553-1557.
- [14] 林静然, 彭启琮, 邵怀宗, 等. 最坏情况下的鲁棒自适应波束形成算法性能分析[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2161-2166. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2006.12.008.
LIN Jingran, PENG Qicong, SHAO Huaizong, *et al.* Performance analysis of robust capon beamforming based on worst-case performance optimization[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(12): 2161-2166. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2006.12.008.
- [15] 徐定杰, 贺瑞, 沈锋, 等. 一种新的稳健 Capon 波束形成算法 [J]. 宇航学报, 2012, 33(10): 1492-1497. doi: 10.3873/j.issn.1000-1328.2012.10.019.
XU Dingjie, HE Rui, SHEN Feng, *et al.* A new algorithm for robust capon beamforming[J]. *Journal of Astronautics*, 2012, 33(10): 1492-1497. doi: 10.3873/j.issn.1000-1328.2012.10.019.
- [16] 范展, 梁国龙, 王逸林. 一种零陷展宽鲁棒自适应波束形成算法 [J]. 电子与信息学报, 2013, 35(11): 2764-2770. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00087.
FAN Zhan, LIANG Guolong, and WANG Yilin. Robust adaptive beamforming with null widening[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(11): 2764-2770. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00087.
- [17] MAO X, LI W, LI Y, *et al.* Robust adaptive beamforming against signal steering vector mismatch and jammer motion [J]. *International Journal of Antennas & Propagation*, 2015, 2015: 1-12.
- [18] 阳凯, 杨善国. 一种宽零陷的自适应波束形成算法[J]. 电子信息对抗技术, 2015, 30(2): 57-61. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00087.
YANG Kai and YANG Shanguo. An adaptive beamforming algorithm with wide nulls[J]. *Electronic Information Warfare Technology*, 2015, 30(2): 57-61. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00087.
- [19] GU Y and LESHEM A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3881-3885.
- [20] 庄学彬, 陆明泉, 冯振明. 一种数值稳健且低复杂度的信号子空间估计新方法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(1): 90-94. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01392.
ZHUANG Xuebin, LU Mingquan, and FENG Zhenming. A numerically robust and low-complexity method of signal subspace estimation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(1): 90-94. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01392.

李立欣: 男, 1979 年生, 副教授, 研究方向为通信信号处理。

白童童: 女, 1993 年生, 硕士, 研究方向为阵列信号处理。

张会生: 男, 1955 年生, 教授, 研究方向为通信信号处理。