

多层环状导电媒质中离轴偶极子辐射场的级数解¹

徐建华 杨梓强

(电子科技大学高能电子学研究所 成都 610054)

摘要 当偶极子源(电偶极子或磁偶极子)置于多层环状导电媒质中偏离轴线的任意一点时,所激发的电磁场既存在 TE 波又存在 TM 波。文中导出了各层媒质中电磁场的通解,用边界条件建立了系数传递矩阵,从而完全确定了电磁场表达式。计算实例中给出了一组离轴偶极子的响应曲线。

关键词 多层环状媒质, 电偶极子, 磁偶极子, TE 波, TM 波

中图分类号 O44

1 引言

当轴向偶极子源置于环状媒质中的轴线上时,所激发的电磁场为单一极化波:磁偶极子激发 TE 波而电偶极子激发 TM 波^[1,2]。而当偶极子源置于多层环状媒质中任意一层时,源偏离了轴心位置,整个模型不再呈轴对称性,从而不管是电偶极子还是磁偶极子,所激发的电磁场既含 TE 波又包括 TM 波。

在电磁测量的一些应用技术中,源不一定刚好都能置于轴线上,且被测媒质可能是多层媒质,故对于这种分层环状媒质中离轴偶极子场的求解具有实用价值。

为使场解具有通用性,各层媒质中的介电常数、电导率和磁导率三个参数均同时考虑在内,从而场解中柱函数的宗量为复数,增大了计算工作的难度;对于理想介质情况,也可用本文的公式直接进行计算且要比导电媒质情况简单得多。

2 物理模型

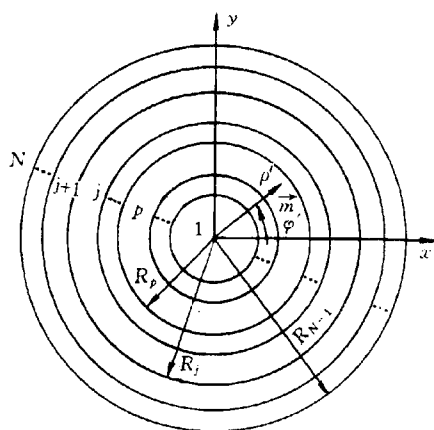


图 1 物理模型

如图 1 所示,同轴环状媒质共计 N 层,最内层的实心圆柱体记为第 1 层,最外面的第 N 层为中空无限大媒质。任意第 j 层的电导率、磁导率和介电常数分别记为 σ_j 、 μ_j 和 ϵ_j 。在任意第 p 层媒质中的 (ρ', φ', z') 处存在一 z 方向的偶极子源:电偶极子 $I dl$ 或磁偶极子 m 。偶极子源具有谐变形式 $e^{i\omega t}$ 。

源在第 p 层中首先产生辐射,称为一次场。该一次场相当于无限大 ϵ_p 、 μ_p 、 σ_p 媒质中的偶极子点源场。对电偶极子而言,一次场仅有相对于 z 方向的 TM 极化波,而磁偶极子激发的一次场仅存在 TE 极化场。

¹ 1997-08-22 收到, 1998-02-22 定稿
国家自然科学基金资助项目, 批准号 49504060

一次场经各层界面的多次反射与透射, 在每一层中将激发出二次场。虽然媒质模型呈轴对称性, 但由于偶极子不在轴线上, 因此不管是对电偶极子还是磁偶极子, 各层中的二次场既有 TE 极化分量, 又有 TM 极化分量。

3 场量基本关系

电偶极子属于电性源, 可用矢量磁位 A 来描述; 磁偶极子属于磁性源, 可用矢量电位 F 来描述。

对矢量位求微分可得到电磁场。对电性源有

$$\left. \begin{aligned} H &= \nabla \times A, \\ E &= -i\omega\mu A + \nabla\nabla \cdot A / (\sigma + i\omega\epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

而对磁性源则有

$$\left. \begin{aligned} E &= -\nabla \times F, \\ H &= -(\sigma + i\omega\epsilon)F + \nabla\nabla \cdot F / (i\omega\mu). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对于 TE 极化波或 TM 极化波, 可由纵向电磁场表达出相应的横向场分量^[3,4]:

$$\left. \begin{aligned} H_t &= [\nabla_t / (k^2 - \xi^2)] \partial H_z / \partial z, \\ E_t &= -[i\omega\mu / (k_2 - \xi^2)] e_z \times \nabla_t H_z; \end{aligned} \right\} \quad (\text{TE 极化}) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E_t &= [\nabla_t / (k^2 - \xi^2)] \partial E_z / \partial z, \\ H &= -[(\sigma + i\omega\epsilon) / (k_2 - \xi^2)] e_z \times \nabla_t E_z; \end{aligned} \right\} \quad (\text{TM 极化}) \quad (4)$$

式中 $k = (\omega^2\epsilon\mu - i\omega\mu\sigma)^{1/2}$ 为媒质的复波数, ξ 为波谱的本征值, e_z 为 z 方向的单位矢量, ∇_t 为横向二维梯度算符。

4 一次场的展开

无限大媒质 ϵ_p 、 μ_p 、 σ_p 中的偶极子源的矢量位满足相应的方程:

$$\nabla^2 A + k_p^2 A = -e_z Idl \delta(r - r'), \quad (5)$$

$$\nabla^2 F + k_p^2 F = -i\omega\mu m e_z \delta(r - r'). \quad (6)$$

求解 (5) 和 (6) 式可分别得到电偶极子的一次矢量磁位和磁偶极子的一次矢量电位:

$$A = [Idl / (4\pi|r - r'|)] e^{-ik_p|r - r'|} e_z, \quad (7)$$

$$F = [i\omega\mu m / (4\pi|r - r'|)] e^{-ik_p|r - r'|} e_z. \quad (8)$$

分别将 (7) 和 (8) 式代入 (1) 和 (2) 式可得到电偶极子的一次电场纵向分量或磁偶极子的一次磁场纵向分量:

$$E_z^e = \frac{Idl}{4\pi(\sigma_p + i\omega\epsilon_p)} \left(k_p^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-ik_p|r - r'|}}{|r - r'|}, \quad (9)$$

$$H_z^m = \frac{m}{4\pi} \left(k_p^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-ik_p|r - r'|}}{|r - r'|}. \quad (10)$$

由于下面将在圆柱面媒质中求解边值问题,故需要将一次场展开为柱函数形式。由索末菲尔德积分公式:

$$\frac{e^{-ik_p|r-r'|}}{|r-r'|} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\lambda|\rho-\rho'|) e^{-i\xi(z-z')} d\xi \quad (11)$$

和汉克尔函数的加法公式:

$$H_0^{(2)}(\lambda|\rho-\rho'|) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda\rho') H_n^{(2)}(\lambda\rho) e^{in(\varphi-\varphi')}, & (\rho > \rho'); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda\rho) H_n^{(2)}(\lambda\rho') e^{in(\varphi-\varphi')}, & (\rho < \rho'). \end{cases} \quad (12)$$

可将 (9) 和 (10) 式展开为

$$E_z^e = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f H_n^{(2)}(\lambda_p\rho) e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, & (\rho > \rho'); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f J_n(\lambda_p\rho) e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, & (\rho < \rho'); \end{cases} \quad (13)$$

$$H_z^m = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g H_n^{(2)}(\lambda_p\rho) e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, & (\rho > \rho'); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g J_n(\lambda_p\rho) e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, & (\rho < \rho'). \end{cases} \quad (14)$$

这里有 $\lambda_p^2 = k_p^2 - \xi^2$, 且已设

$$f(\xi, n) = \begin{cases} -\frac{iIdl\lambda_p^2}{8\pi(\sigma_p + i\omega\epsilon_p)} J_n(\lambda_p\rho'), & (\rho > \rho'); \\ -\frac{iIdl\lambda_p^2}{8\pi(\sigma_p + i\omega\epsilon_p)} H_n^{(2)}(\lambda_p\rho'), & (\rho < \rho'); \end{cases} \quad (15)$$

$$g(\xi, n) = \begin{cases} -\frac{im\lambda_p^2}{8\pi} J_n(\lambda_p\rho'), & (\rho > \rho'); \\ -\frac{im\lambda_p^2}{8\pi} H_n^{(2)}(\lambda_p\rho'), & (\rho < \rho'). \end{cases} \quad (16)$$

5 二次场的一般表达形式

不管是电偶极子还是磁偶极子,在各层中所产生的二次电磁场的纵向分量均满足齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 E_{zj}[H_{zj}] + k_j^2 E_{zj}[H_{zj}] = 0. \quad (17)$$

解此方程可得到与一次场相适配的二次场一般表达形式:

$$E_{zj}[H_{zj}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [L_{jn} J_n(\lambda_j\rho) + M_{jn} H_n^{(2)}(\lambda_j\rho)] e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, \quad (18)$$

式中 L_{jn} 和 M_{jn} 为待定系数。

6 磁偶极子源

若在第 p 层中的 $r' = (\rho', \varphi', z')$ 处置一轴向磁偶极子源, 所激发的 TM 波在各层中仅有二次场存在, 由 (18) 式可写出相邻 j 层和 $(j+1)$ 层纵向电场的表达式:

$$E_{zj} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C_{jn} J_n(\lambda_j \rho) + D_{jn} H_n^{(2)}(\lambda_j \rho)] e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, \quad (19)$$

$$E_{z(j+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C_{(j+1)n} J_n(\lambda_{j+1} \rho) + D_{(j+1)n} H_n^{(2)}(\lambda_{j+1} \rho)] e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, \quad (20)$$

对于 TE 波部分, 在源区需要加上一次场的贡献, 而纵向一次场的展开式又分为 $\rho > \rho'$ 和 $\rho < \rho'$ 两种情况, 则需要分两种情况讨论磁场的通解。为方便起见, 定义函数:

$$\tau_j = \begin{cases} 1, & (j = p); \\ 0, & (j \neq p). \end{cases} \quad (21)$$

当 $j \geq p$ 时, 相邻 j 层和 $(j+1)$ 层的界面 $R_j > \rho'$, 此时 $(j+1)$ 层中一定无源, 由 (14) 和 (18) 式可构造出纵向磁场的通解:

$$H_{zj} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tau_j g H_n^{(2)}(\lambda_j \rho) + A_{jn} J_n(\lambda_j \rho) + B_{jn} H_n^{(2)}(\lambda_j \rho)] e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi, \quad (22)$$

$$H_{z(j+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [A_{(j+1)n} J_n(\lambda_{j+1} \rho) + B_{(j+1)n} H_n^{(2)}(\lambda_{j+1} \rho)] e^{-i\xi(z-z')} e^{in(\varphi-\varphi')} d\xi. \quad (23)$$

由 (19)~(23) 式可看出, 各层中有四个系数待确定。将 (19)~(23) 式代入 (3) 和 (4) 式可写出电磁场的 j 方向分量。在 $\rho = R_j$ 的交界面上, 利用电磁场 φ 方向和 z 方向分量连续的边界条件可建立四个系数方程。将 $(j+1)$ 层的四个系数 $A_{(j+1)n}$ 、 $B_{(j+1)n}$ 、 $C_{(j+1)n}$ 和 $D_{(j+1)n}$ 作为已知量, 求解方程组可得到相邻两层间的系数递推关系:

$$\begin{bmatrix} A_{jn} \\ B_{jn} \\ C_{jn} \\ D_{jn} \end{bmatrix} = \frac{\pi \lambda_j R_j}{2i} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(j+1)n} \\ B_{(j+1)n} \\ C_{(j+1)n} \\ D_{(j+1)n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ im\lambda_j^2 \tau_j J_n(\lambda_j \rho') / 8\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

推导中用到了贝塞尔函数的朗斯基关系:

$$J'_n(x) H_n^{(2)}(x) - J_n(x) H_n^{(2)'}(x) = 2i / (\pi x) \quad (25)$$

传递矩阵各元素为

$$p_{11} = (a_{j+1}/a_j)J'_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)}(\lambda_jR_j) - J_n(\lambda_jR_j)H_n^{(2)'}(\lambda_{j+1}R_j), \quad (26)$$

$$p_{12} = (a_{j+1}/a_j)H_n^{(2)'}(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)}(\lambda_jR_j) - H_n^{(2)'}(\lambda_jR_j)H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}R_j), \quad (27)$$

$$p_{13} = -p_{31} = [(b_{j+1} - b_j)/a_j]J_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)}(\lambda_jR_j), \quad (28)$$

$$p_{14} = -p_{32} = [(b_{j+1} - b_j)/a_j]H_n^{(2)}(\lambda_jR_j)H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}R_j), \quad (29)$$

$$p_{21} = J_n(\lambda_{j+1}/R_j)J'_n(\lambda_jR_j) - (a_{j+1}/a_j)J_n(\lambda_jR_j) - J'_n(\lambda_{j+1}R_j), \quad (30)$$

$$p_{22} = H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}/R_j)J'_n(\lambda_jR_j) - (a_{j+1}/a_j)J_n(\lambda_jR_j)H_n^{(2)'}(\lambda_{j+1}R_j), \quad (31)$$

$$p_{23} = -p_{41} = [(b_j - b_{j+1})/a_j]J_n(\lambda_jR_j)J_n(\lambda_{j+1}R_j), \quad (32)$$

$$p_{24} = -p_{42} = [(b_j - b_{j+1})/a_j]J_n(\lambda_jR_j)H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}R_j), \quad (33)$$

$$p_{33} = (c_{j+1}/c_j)J'_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)}(\lambda_jR_j) - J_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)'}(\lambda_jR_j), \quad (34)$$

$$p_{34} = (c_{j+1}/c_j)H_n^{(2)}(\lambda_jR_j)H_n^{(2)'}(\lambda_{j+1}R_j) - H_n^{(2)'}(\lambda_jR_j)H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}R_j), \quad (35)$$

$$p_{43} = J_n(\lambda_{j+1}R_j)J'_n(\lambda_jR_j) - (c_{j+1}/c_j)J_n(\lambda_jR_j) - J'_n(\lambda_{j+1}R_j), \quad (36)$$

$$p_{44} = H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}R_j)J'_n(\lambda_jR_j) - (c_{j+1}/c_j)J_n(\lambda_jR_j)H_n^{(2)'}(\lambda_{j+1}R_j); \quad (37)$$

且已设

$$\left. \begin{aligned} a_j &= i\omega\mu_j/\lambda_j, \\ b_j &= -i\xi n/(\lambda_j^2 R_j), \\ c_j &= (\sigma_j + i\omega\epsilon_j)/\lambda_j. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(24) 式又可简记为

$$U_j = [(\pi\lambda_j R_j)/(2i)]P_j U_{j+1} + S_d. \quad (39)$$

当 $j < p$ 时, 源只可能出现在 $(j+1)$ 层中, 此时的纵向磁场则可记为

$$H_{zj} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [A_{jn}J_n(\lambda_j\rho) + B_{jn}H_n^{(2)}(\lambda_j\rho)]e^{-i\xi(z-z')}e^{in(\varphi-\varphi')}d\xi, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} H_{z(j+1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tau_j g J_n(\lambda_{j+1}\rho) + A_{(j+1)n} J_n(\lambda_{j+1}\rho) \\ &\quad + B_{(j+1)n} H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}\rho)]e^{-i\xi(z-z')}e^{in(\varphi-\varphi')}d\xi, \end{aligned} \quad (41)$$

经与 $j \geq p$ 情况类似推导可得到相邻两层间的系数关系为

$$U_j = [(\pi\lambda_j R_j)/(2i)]P_j U_{j+1} + [(\pi\lambda_j R_j)/(2i)]S_x, \quad (42)$$

式中传递矩阵 P_j 的各元素由 (26)~(37) 式给出, 且源矩阵 $S_x = [s_{x1}, s_{x2}, s_{x3}, s_{x4}]^t$ 的各元素

为

$$s_{x1} = -[im\lambda_{j+1}^2/(8\pi)]\tau_{j+1}H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}\rho') \\ \times \left[(a_{j+1}/a_j)J'_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)}(\lambda_jR_j) - J_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)'}(\lambda_jR_j) \right], \quad (43)$$

$$s_{x2} = -[im\lambda_{j+1}^2/(8\pi)]\tau_{j+1}H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}\rho') \\ \times [J'_n(\lambda_jR_j)J_n(\lambda_{j+1}R_j) - (a_{j+1}/a_j)J'_n(\lambda_{j+1}R_j)J_n(\lambda_jR_j)], \quad (44)$$

$$s_{x3} = -[im\lambda_{j+1}^2/(8\pi)]\tau_{j+1}H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}\rho')[(b_{j+1} - b_j)/c_j]J_n(\lambda_{j+1}R_j)H_n^{(2)'}(\lambda_jR_j), \quad (45)$$

$$s_{x4} = -[im\lambda_{j+1}^2/(8\pi)]\tau_{j+1}H_n^{(2)}(\lambda_{j+1}\rho')[(b_{j+1} - b_j)/c_j]J_n(\lambda_{j+1}R_j)J'_n(\lambda_jR_j). \quad (46)$$

以 (39) 和 (42) 式为基础可归纳出第一层与第 N 层间的系数关系:

$$U_1 = \eta_1 AU_N + \eta_2 BS_d + \eta_2 CS_x, \quad (47)$$

式中已设

$$\left. \begin{aligned} A &= P_1 P_2 \cdots P_{N-1}, \\ B &= P_1 P_2 \cdots P_{p-1}, \\ C &= P_1 P_2 \cdots P_{p-2}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= [\pi\lambda_1 R_1/(2i)][\pi\lambda_2 R_2/(2i)] \cdots [\pi\lambda_{N-1} R_{N-1}/(2i)], \\ \eta_2 &= [\pi\lambda_1 R_1/(2i)][\pi\lambda_2 R_2/(2i)] \cdots [\pi\lambda_{p-1} R_{p-1}/(2i)]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

在最内层, 要求轴线上的二次场为有限值, 由 (19) 和 (40) 式知 $B_{1n} = D_{1n} = 0$; 同理最外层 $\rho \rightarrow \infty$ 时, 二次场应趋于零, 故由 (20) 和 (23) 式知 $A_{Nn} = C_{Nn} = 0$, 从而展开 (47) 式可得到四个方程:

$$A_{1n} - \eta_1 a_{12} B_{Nn} - \eta_1 a_{14} D_{Nn} = \eta_2 (b_{12} S_{d2} + c_{11} s_{x1} + c_{12} s_{x2} + c_{13} s_{x3} + c_{14} s_{x4}), \quad (50)$$

$$\eta_1 (a_{22} B_{Nn} + a_{24} D_{Nn}) = -\eta_2 (b_{22} S_{d2} + c_{21} s_{x1} + c_{22} s_{x2} + c_{23} s_{x3} + c_{24} s_{x4}), \quad (51)$$

$$C_{1n} - \eta_1 a_{32} B_{Nn} - \eta_1 a_{34} D_{Nn} = \eta_2 (b_{32} S_{d2} + c_{31} s_{x1} + c_{32} s_{x2} + c_{33} s_{x3} + c_{34} s_{x4}), \quad (52)$$

$$\eta_1 (a_{42} B_{Nn} + a_{44} D_{Nn}) = -\eta_2 (b_{42} S_{d2} + c_{41} s_{x1} + c_{42} s_{x2} + c_{43} s_{x3} + c_{44} s_{x4}). \quad (53)$$

解上述四个方程组可很容易唯一地确定出第 1 层和第 N 层的四个系数。在得到第 N 层的系数值后, 其他各层的系数值可很方便地由 (39) 和 (42) 式逐层递推算出。

7 电偶极子源

若 p 层中 r' 处存在一电偶极子源, 所激发的 TE 波仅有二次场, (19) 式中 E_{zj} 和 $E_{z(j+1)}$ 分别用 H_{zj} 和 $H_{z(j+1)}$ 代替即得 TE 波的磁场表达式; 将 (22) 和 (23) 式中的 H_{zj} 和 $H_{z(j+1)}$ 分别用 E_{zj} 和 $E_{z(j+1)}$ 代替, 且用 f 代替 g 即可得到电偶极子所激发 TM 波纵向电场的一般表达形式。沿用磁偶极子方法可推导出两层间的系数递推关系, 其传递矩阵元素只需将 (26)~(37) 式中的 a_j 和 c_j 分别用 c_j 和 a_j 代替即可得到, 详细推导过程这里不再详述。

8 特例讨论

若源位于轴线上, 即 $|\rho'| = 0$, 由 (11) 式知一次场只需用零阶汉克尔函数来表达; 关于二次场, 源位于轴线上时, 整个模型呈轴对称性, 即其二维亥姆霍兹方程的通解 (18) 式应为零阶贝塞尔函数与零阶汉克尔函数的线性组合。由此可见 (19)~(23) 式中的 n 仅能取 0 值, 由 (26)~(38) 式知, 当 $n = 0$ 时, 有 $b_j = b_{j+1} = 0$, 即 $p_{13} = p_{31} = p_{14} = p_{32} = p_{23} = p_{41} = p_{24} = p_{42} = 0$, 且此时只出现 $\rho > \rho' = 0$ 的情况, (ρ' 为偏心距离), 展开 (24) 式并考虑到传递矩阵右上角和左下角各有四个元素为零的特殊情况, 故有

$$\begin{bmatrix} A_{jn} \\ B_{jn} \end{bmatrix} = \frac{\pi \lambda_j R_j}{2i} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(j+1)n} \\ B_{(j+1)n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ im\lambda_j^2 \tau_j J_n(\lambda_j \rho') / (8\pi) \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} C_{jn} \\ D_{jn} \end{bmatrix} = \frac{\pi \lambda_j R_j}{2i} \begin{bmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{(j+1)n} \\ D_{(j+1)n} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

(55) 式为奇异线性方程组, 只存在零解, 即有 $C_{jn} = D_{jn} = C_{(j+1)n} = D_{(j+1)n} = 0$ 。由 (19) 和 (20) 式知, 此时的 $E_{zj} = E_{z(j+1)} = 0$, 说明不存在 TM 波, 即证明了轴向磁偶极子源位于轴线上时, 仅能激发 TE 波而不能激发 TM 波。

同理也可证明位于轴线上的轴向电偶极子源只能激发 TM 波而不能激发 TE 波。

9 应用示例

在地质探测的井下测量中, 发射线圈和接收线圈同轴且均位于井筒泥浆中, 仪器偏心距离 ρ' 不同, 响应信号大小不同。这里给出了一组两层媒质中的计算结果。计算中关于复宗

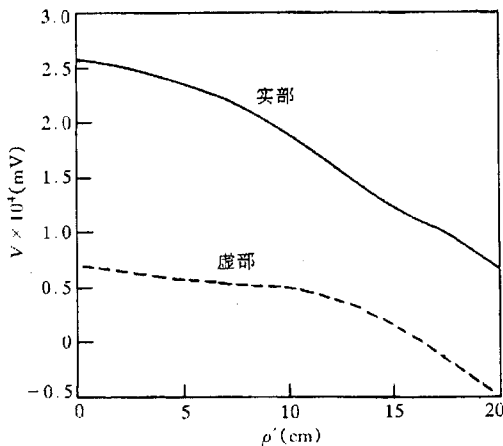


图 2 感应电动势随偏心距的变化

量柱函数的计算可参考其他人的研究成果^[5]。发射线圈和接收线圈均取单环作为示例, 其半径均为 3cm, 发射频率 25kHz, 接收信号用感应电动势表示。井筒泥浆电导率为 $\sigma_1 = 1000\text{mS/m}$, 介电常数为 $\epsilon_1 = 70\epsilon_0$; 筒外媒质电导率和介电常数分别取 $\sigma_2 = 10\text{mS/m}$, $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$; 磁导率均取 μ_0 。收发间距 $(z - z') = 25\text{cm}$; 由于收发器同轴, 则场点和源点方位角 φ 和 φ' 相等; 井筒半径 $R_1 = 20\text{cm}$ 。

图 2 给出了感应电动势随偏心距离 ρ' 的变化曲线, 其中实线为实部电动势的变化曲线, 虚线为虚部电动势的变化曲线。

由图 2 看出, 仪器位于轴线上时信号最强, 随着偏心距的增大, 信号逐渐减弱。分析其原因, 随着发射线圈远离轴线, 高电导媒质 σ_1 中的涡流变弱, 而涡流电流又是产生感应电动势的二次场源, 故其信号减弱。

若以测量媒质 2 的参数 σ_2 和 ϵ_2 为目的, 仪器在媒质 1 中的位置影响必须考虑在内, 尤其对收发间距不大的仪器结构更不能忽略这种影响。

在计算程序中若取各层电性参数相同, 所得结果与均匀媒质中磁偶极子点源场完全吻合, 说明了理论体系和计算方法的正确性。

参 考 文 献

- [1] Gianzero S, Anderson B. Mathematical theory for the fields due to a finite a. c. coil in an infinite thick bed with an arbitrary number of co-axial layers. *The Log Analyst*, 1984, 25(2): 25-32.
- [2] Wait J R. General formulation of the induction logging problem for concentric layers about the borehole. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 1984, GR-22(3): 34-42.
- [3] Chew W C. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990, 70-79.
- [4] 徐建华编著. 层状媒质中的电磁场与电磁波. 北京: 石油工业出版社, 1997, 96-126.
- [5] 张善杰, 唐汉. 任意实数阶复宗量第一类和第二类 Bessel 函数的精确解. *电子学报*, 1996, 24(3): 77-81.

SERIES SOLUTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD EXCITED BY AN OFF-AXIS DIPOLE IN CIRCULARLY MULTILAYERED MEDIUM

Xu Jianhua Yang Ziqiang

(*University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054*)

Abstract When a dipole source (electric dipole or magnetic dipole) is located at arbitrary point in circularly multilayered conductive medium, the electromagnetic fields excited by the source contain both TE and TM waves. The series solutions of the fields in every layer are derived analytically in this paper. A coefficient recurrence matrix is established by means of the boundary conditions. In such way, the expressions of fields can be determined definitely. As a numerical example, a group of response curves of an off-axis source are given finally.

Key words Circularly multilayered medium, Electric dipole, Magnetic dipole, TE wave, TM wave

徐建华: 男, 1962 年生, 博士, 副教授, 1995 年至 1996 年曾赴美国休斯敦大学电子工程系进修. 主要研究领域为电磁场工程, 微波电子学. 已公开发表学术论文 20 余篇, 出版学术著作 1 部.
杨梓强: 男, 1965 年生, 副教授, 在职博士研究生, 参加了多项科研项目, 发表学术论文 12 篇.