

# 关于 SC 网络的等效网络分析\*

刘 鉴 平

(北京工业大学 工业自动化系)

## 提 要

本文提出了关于开关电容(SC)网络的 $z$ 域等效网络分析的若干想法。首先,在导出等效网络时引用了一组基本积木块以及特定的积木块变换方法。其次,使用为人们熟悉的信号流图分析了等效网络。最后,应用信号流图的灵敏度拓扑公式求得了网络的灵敏度。全部工作均以观察法进行,因而具有一定特色。

## 一、引 言

本文主要讨论开关电容(SC)网络分析的 $z$ 域等效网络法。这种方法简捷、灵活,可以承袭现存常规网络分析手段,并容易使用于设计过程,因而极受重视<sup>[1-4]</sup>。

作者在消化前人成果的基础上,提出了以下几点想法:

1. SC基本积木块表以及特定的积木块变换将使等效网络的导出更为方便;
  2. 使用一般信号流图技术分析等效网络,既方便、又能够考虑到运算放大器有限增益的影响;
  3. 应用信号流图灵敏度拓扑公式,可以直接求得网络的灵敏度。
- 全部分析均以观察法进行,故具有一定特色。

## 二、分析的基本模型·等效网络的导出

首先扼要叙述分析的基本模型。假定SC网络是由开关、电容和运算放大器(以下简称OA)组成。控制开关的时钟是 $N$ 相非重叠脉冲,时钟周期为 $T$ ,每相时钟以频率 $f = \frac{1}{T}$ 重复出现,各相邻相之间延时为 $\tau$ ,即有 $T = N \cdot \tau$ 。

若开关由第 $i$ 相时钟控制,则在开关旁标明数字 $i$ 。假设输入只是在开关瞬间 $K\tau$ 内变化,而在其它时间保持采样数据信号,于是可以直接引用 $z$ 变换技术,这里定义 $z = e^{sT}$ , $S$ 为复频率。

对图1所示的一般开关电容支路,列出它的节点电荷守恒方程并进行 $z$ 变换后,有如下的形式

\* 1982年7月12日收到。

$$\Delta Q_1(z) = \{C[z]\} \cdot \left[ \frac{V_1(z)}{V_2(z)} \right], \tag{1}$$

$$\Delta Q_2(z) = \{C[z]\} \cdot \left[ \frac{V_2(z)}{V_1(z)} \right]; \tag{2}$$

式中,

$$\{C[z]\} = C \left\{ [E_N \quad -E_N] - z^{-1/N} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ E_{N-1} & 0 & -E_{N-1} & & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\Delta Q_1(z) = [\Delta Q_1^1(z), \Delta Q_1^2(z), \dots, \Delta Q_1^N(z)]^t,$$

$$\Delta Q_2(z) = [\Delta Q_2^1(z), \Delta Q_2^2(z), \dots, \Delta Q_2^N(z)]^t,$$

$$V_1(z) = [V_1^1(z), V_1^2(z), \dots, V_1^N(z)]^t,$$

$$V_2(z) = [V_2^1(z), V_2^2(z), \dots, V_2^N(z)]^t;$$

这里,  $E_N$  和  $E_{N-1}$  分别是  $N$  阶和  $N-1$  阶单位矩阵;  $\Delta Q_1^i(z)$ 、 $\Delta Q_2^i(z)$  分别是第  $i$  相时钟时流入节点 1、2 的电荷;  $V_1^i(z)$ 、 $V_2^i(z)$  分别是第  $i$  相时钟节点 1、2 的节点电压。

以  $\Delta Q_1^i(z)$ 、 $\Delta Q_2^i(z)$ 、 $V_1^i(z)$ 、 $V_2^i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 为端口变量, 就可以获得图 2 所示的等效电路(当然也可以根据以上方程综合出不同形式的等效电路)。图中标明了三种元件: 单位增益隔离放大器、电导和贮阻器 (Storistor)。可以证明, 我们导出的 SC 网络的  $z$  域等效网络可以由以上三种元件加上 OA 构成。

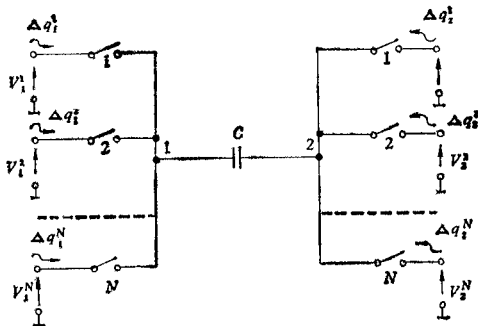


图1 一般开关电容支路

Fig.1 Universal switched capacitor branch

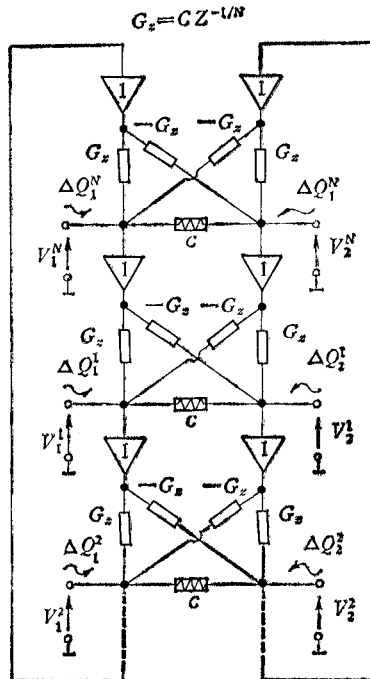


图2 一般开关电容支路的  $z$  域等效电路

Fig.2  $z$ -domain equivalent circuit of Fig.1

以上是开关与电容最一般的组合模型。对于 SC 网络中的另一个元件 OA 或电压控制电压源 (VCVS), 它的  $z$  域等效电路相当简单, 因为 OA 没有贮存这样的关联性质, 它

的等效电路只是对原电路的简单重复<sup>[3]</sup>, 这符合 OA 的  $z$  域基本方程

$$V'_i(z) = \mu \cdot [V'_i(z) - V_i(z)], \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (3)$$

式中,  $\mu$  为 OA 开环增益;  $V'_i(z)$  和  $V_i(z)$  分别是 OA 在第  $i$  相时的同相输入电压和反相输入电压;  $V'_i(z)$  为 OA 在第  $i$  相时的输出电压.

以上基本模型是导出  $z$  域网络的出发点. 一般地, 我们倾向于这样导出等效网络: 先将 SC 网络分解为若干个积木块, 再从预先制备的 SC 积木块及其  $z$  域等效电路表中, 查出这些积木块对应的等效电路, 通过适当的联接, 最后得到需要的等效网络.

我们在考虑了一般性、又照顾到实用性的基础上, 提炼了一组 SC 网络基本积木块(见表 1). 它们的特点是: 只包含那些最基本、最实用的开关电容组合模型. 为保证其基本性, 就删除了全部电路构形重复、电特性等效的积木块. 为保证其实用性, 就只收入了常见的实用网络所包含的积木块. 对于某些特殊的单元电路, 若将来发展为常用的, 就把它补充到积木块表中去; 若只是偶尔用到, 仍可以用前面的一般开关电容支路的化简(相应地对等效电路化简)来解决.

在引出以上的基本积木块表的同时, 我们提出了三种积木块变换方法, 其结果是大大扩充了积木块的种类和数目, 从而使等效网络的导出更为方便. 以下我们就来简略讨论这些积木块变换方法.

(1) 积木块全等变换 这就是在保持积木块电特性相同情况下的变换. 例如, 可以在某个开关支路里串接或并接任意多个同相开关. 值得注意的是, 为了避免杂散效应, 一些积木块使用了较多的元件以改善其实际效果, 但在原理上, 可以用元件少、构形简单的积木块来代替. 这种简单与复杂的积木块之间, 也形成了积木块的全等变换. 图 3 就是这种变换的两个例子.

(2) 开关相位循环变换 将积木块中开关的相位作循环对换, 由此产生的积木块等效电路构形不变, 但端口变量上标相位作循环对换, 以适用于不同的场合.

(3) 负延迟变换 两个不同的 SC 积木块具有同样构形的等效电路, 其电导同一, 但贮阻器符号不同. 这对应于电路在时域存在着反充电过程. 典型的、也是常用的负延迟变换如图 4 所示.

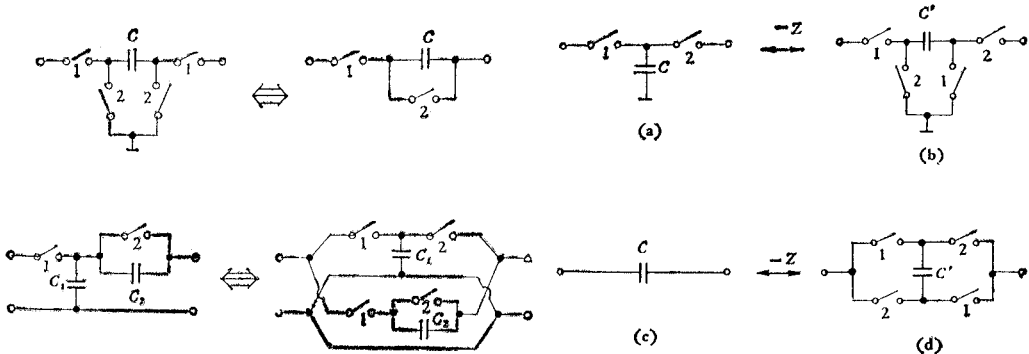


图 3 积木块全等变换举例

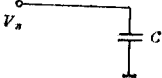
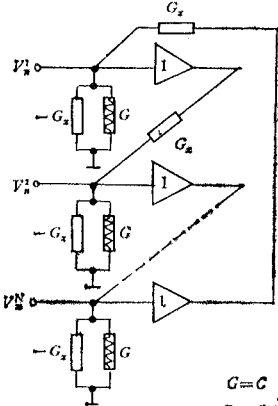
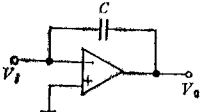
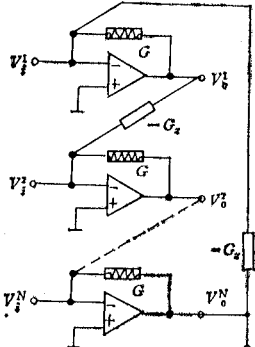
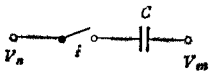
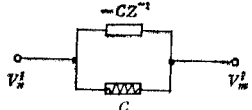
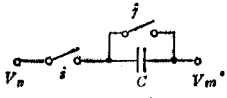
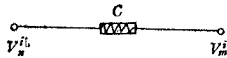
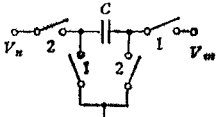
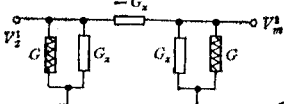
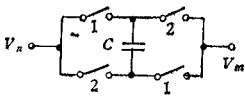
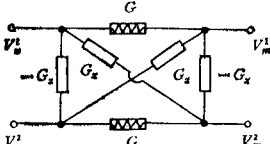
Fig.3 Identical transformation of building block

图 4 负延迟变换举例

Fig.4 Negative delay transformation

表 1 SC 基本积木块及其 z 域等效电路表

Tab.1 Basic SC building blocks and their z-domain equivalent circuits

<p>1.</p> 	 <p style="text-align: right;"> <math>G=C</math>  <math>G_z=CZ^{-\frac{1}{N}}</math> </p>
	 <p style="text-align: right;"> <math>G=C</math>  <math>G_z=CZ^{-\frac{1}{N}}</math> </p>
<p>3.</p> 	
 <p style="text-align: center;"><math>i \approx j</math></p>	
<p>5.</p> 	 <p style="text-align: right;"> <math>G=C</math>  <math>G_z=CZ^{-\frac{1}{2}}</math> </p>
<p>6.</p> 	 <p style="text-align: right;"> <math>G=C</math>  <math>G_z=CZ^{-\frac{1}{2}}</math> </p>

注: 除积木块(5)、(6)的时钟是二相的之外,其余积木块的时钟都是N相的。

图 3 中 (a)、(b) 和 (c)、(d) 各形成了负延迟变换对, 即有以下关系式成立

$$G = G', G_z = -G'_z. \quad (4)$$

一般来说, 在得到了等效网络后, 还可能对等效网络进行一些化简, 这包括: 消去某些我们不感兴趣的端口变量, 或利用“虚地端接”性质删去某些多余元件。

“虚地端接”性质是在 SC 网络中常见的, 为了造成对杂散电容不敏感的电路, 电路的构成要求电容必须端接或经开关联接于接地的电压源、OA 的输入和输出这样的端子上。这种性质对于我们的分析是有利的, 因为, 接于“虚地端接”处的积木块, 其等效电路端口的接地元件可以全部省略。

### 三、用信号流图分析等效网络

上面讨论了建立 SC 网络的  $z$  域等效网络的简捷方法。现在讨论等效网络的分析。从理论上讲, 等效网络可以用多种方法来进行分析。我们认为, 应用信号流图来分析等效网络是有好处的。等效网络中常常包含有多个 OA, 而所有与 OA 相接的电路, 都可以比较简单地求出它对应的信号流图。同时, OA 又起到了各部分电路的级间隔离作用, 于是, 规模较大的等效网络可以按一定方式, 分解为多个简单的子网络, 很有利于信号流图的导出。

基本 OA 组合电路及其信号流图表示见图 5。图中, (a) 是理想 OA 的情况, (b) 是 OA 开环增益为  $\mu$  的情况。

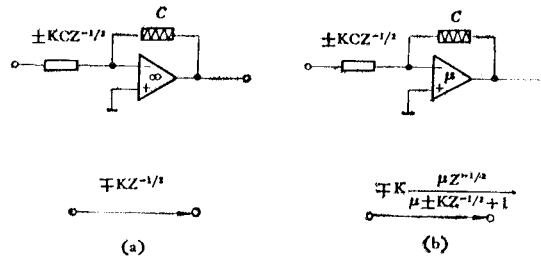


图 5 OA 组合电路及其信号流图

Fig.5 Basic structure with operational amplifier and its signal flow graph

使用上图的 OA 组合电路模型, 再应用叠加原理和节点分析公式, 就能方便地导出等效网络的信号流图。因此, 我们不必另行提出专门的一组信号流图建立规则。

SC 网络的离散传递函数定义为

$$H^{kj}(z) \triangleq \frac{V_o^j(z)}{V_{in}^k(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

它表示 SC 网络在第  $k$  相输入  $V_{in}^k(z)$ , 第  $j$  相输出  $V_o^j(z)$  (或是说在第  $j$  相观察) 时网络的传递特性。

应用 Mason 公式, 网络的离散传递函数就可以通过观察求出。显然, 在运用 Mason 公式之前, 对信号流图进行一定程度的化简会更有利。另外, 在信号流图的基础上, 调用全符号机辅分析程序来进行分析也是可行的。

灵敏度是网络综合和设计的关键指标之一,因而需要对 SC 网络进行灵敏度分析.

我们发现,应用信号流图的计算灵敏度的拓扑公式<sup>[5,6]</sup>,在由 SC 网络的等效网络导出的信号流图上,可以使 SC 网络的灵敏度分析得到解决. 因为,该拓扑公式是根据信号流图的 Tellegen 定理导出的,它只与流图的拓扑性质有关,故适用于所有用信号流图表征的系统(无论系统是稳态的、还是动态的),因而可以应用于 SC 网络的灵敏度分析.

据文献[5、6]导出的结果,我们有以下的计算 SC 网络灵敏度的拓扑公式

$$\frac{\partial H(z)}{\partial \alpha} = A(z) + B(z), \quad (6)$$

式中,  $\alpha$  为网络中的某个参数,如电容比、导纳值或 OA 增益等;  $A(z)$  是输入支路对灵敏度的贡献;  $B(z)$  是中间支路对灵敏度的贡献.

先对图进行编号,输入节点编号为 0,输出节点编号为  $\omega$ ; 假定有  $h$  条输入支路,  $q$  条中间支路;  $i$  为输入支路终点,  $x$  为中间支路始点,  $v$  为中间支路终点,则有

$$A(z) = \sum_{i=1}^h H_{i\omega}(z) \cdot \frac{\partial H_{oi}(z)}{\partial \alpha}. \quad (7)$$

(7) 式意味着: 按输入支路顺序检查该支路传输是否是  $\alpha$  的函数; 若是,则求该支路传输  $H_{oi}(z)$  对  $\alpha$  的偏导数,再乘以从该支路终点至输出节点的传输  $H_{i\omega}(z)$ ;  $h$  条输入支路全部检查完毕之后,将所得结果累加.

另外,我们有

$$B(z) = \sum_{x=h+1}^{h+q} H_{ox}(z) \cdot H_{v\omega}(z) \cdot \frac{\partial H_{xv}(z)}{\partial \alpha}. \quad (8)$$

这意味着: 按中间支路顺序检查该支路传输是否是  $\alpha$  的函数; 若是,则求该支路传输  $H_{xv}(z)$  对  $\alpha$  的偏导数; 乘以源节点经输入支路至该中间支路始点  $x$  的传输  $H_{ox}(z)$ , 再乘以从该中间支路终点  $v$  至输出节点的传输  $H_{v\omega}(z)$ ;  $q$  条中间支路全部检查完毕之后,将所得结果累加.

正象应用 Mason 公式一样,以上的计算灵敏度的拓扑公式,只要凭观察就可以得到结果.

#### 四、分析实例

为了说明以上提出的分析方法,我们对文献[3]中的例 2 所示的 SC 网络再做分析. 图 6(a)、(b) 分别画出了这个 SC 网络及其  $z$  域等效网络.

该 SC 网络的  $z$  域等效网络,查表 1 就可以获得,它与文献[3]中导出的等效网络大致相同. 根据图 6(b),很容易得到该网络的信号流图,如图 7 所示. 这一流图与文献[3]中导出的双节点图完全等效,但它比双节点图更简单、更直接.

由信号流图可以求得

$$H^{22}(z) = \frac{c_1 c_2 (z^{-1} - 1) \cdot z^{-1}}{c_2 c_3 z^{-2} - z^{-1}(c_1 c_3 - c_1^2 + 2c_2 c_3) + c_3(c_1 + c_2)}. \quad (9)$$

现应用式(6)求  $H^{22}(z)$  对  $c_3$  的灵敏度. 因

$$S_{c_3}^{H^{22}}(z) = -S_{1/c_3}^{H^{22}}(z) = -\frac{1}{c_3 \cdot H^{22}(z)} \cdot \frac{\partial H^{22}(z)}{\partial(1/c_3)}, \quad (10)$$

直接在流图上观察, 可得

$$\frac{\partial H^{22}(z)}{\partial(1/c_3)} = -\frac{c_1 c_2 (1 - z^{-1})^2 \cdot z^{-1}}{\left[ 1 + \frac{c_1 z^{-1}}{\sigma} \cdot \frac{c_1}{c_3} - z^{-1} \right]^2}, \quad (11)$$

故

$$\begin{aligned} S_{c_3}^{H^{22}}(z) &= -\frac{(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1} + \frac{c_1^2 \cdot z^{-1}}{c_3 \cdot \sigma}} \\ &= -\frac{c_3 \cdot (1 - z^{-1}) \cdot [c_1 + c_2(1 - z^{-1})]}{c_3 [c_1 + c_2(1 - z^{-1})] \cdot (1 - z^{-1}) + c_1^2 z^{-1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $\sigma = c_1 + c_2(1 - z^{-1})$ .

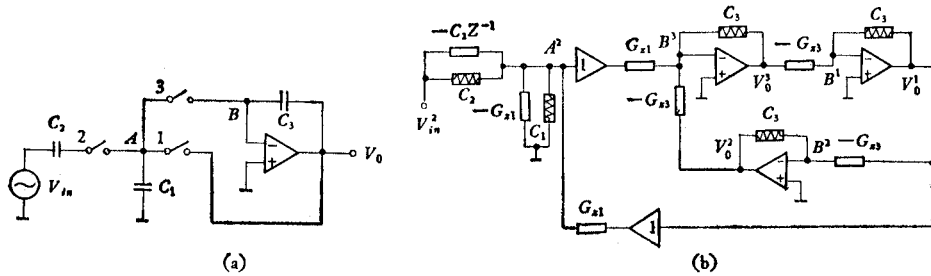


图 6 (a) SC 网络; (b) SC 网络的等效网络

Fig.6 (a) SC network with 3 phase clock; (b) z-domain equivalent network of (a)

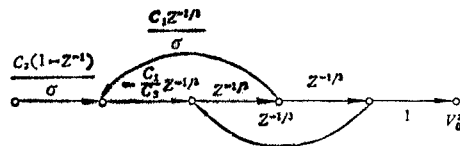


图 7 图 6(b) 的信号流图

Fig.7 Signal flow graph of Fig. 6 (b)

## 五、结 束 语

本文的重点是: (1) 建立 \$z\$ 域等效网络的简捷方法; (2) 用信号流图分析等效网络并计算灵敏度. 在以 SC 网络的设计为目标的分析过程中, 本文介绍的方法是行之有效的. 但在对规模较大、比较复杂的 SC 网络进行分析时, 有必要寻找更有力的分析手段. 我们考虑了二种有效的等效网络机辅分析方法: 连续时间等效网络法和 \$z\$ 域等效网络直接分析法. 前者通过某种离散-连续时间变换, 将等效网络从 \$z\$ 域变换到 \$S\$ 域, 因而可以套用现成的网络分析程序进行分析. 后者是将现有程序小作修改, 以包含贮阻器这样的元件模型, 则可以完成对 \$z\$ 域等效网络的直接分析. 它们作为对本文所述方法的补充, 为 SC

网络的分析提供了比较令人满意的工具。

本项工作中得到钟佐华、许道展老师的指导和帮助,在此表示衷心的感谢。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] C. F. Kurth et al., *IEEE Trans. on CAS*, CAS-26(1979), 166.
- [ 2 ] K. R. Laker, *BSTJ*, 58(1979), 729.
- [ 3 ] J. J. Mulawka, *Int. J. Electronics*, 49(1980), 359.
- [ 4 ] Y. L. Kuo et al., *IEEE Trans. on CAS*, CAS-26(1979), 708.
- [ 5 ] 赵永昌, *电子学报*, 5(1981), 48.
- [ 6 ] A. Y. Lee, *IEEE Trans. on CAS*, CAS-21(1974), 209.

## ON THE ANALYSIS OF SWITCHED CAPACITOR NETWORKS USING EQUIVALENT NETWORKS IN THE z-DOMAIN

Liu Jianping

(*Department of Industry Automation, Beijing Polytechnic University*)

The approach using the equivalent networks in the z-domain to analyze switched capacitor networks is very attractive. This paper presents a powerful procedure. In the first place the equivalent networks are derived by applying a group of basic building blocks which are resulted under the consideration of generality and practicability. At the same time some specified transformations are proposed, with which the basic building blocks can be greatly expanded to fit in to direct use. Those transformations are also found to be useful in designing SC filters. The application of the well-known signal flow graph facilitates the derivation of discrete transfer functions. Furthermore the sensitivity of SC network can be calculated with a simple topological formula. The whole work can be done by inspection; this is the highlight.